SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

TEMAT 3.1

Wyrażenia arytmetyczne i algebraiczne

10 godzin lekcyjnych

Tadeusz STYŠ

Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\frac{3^3 * 2^3 - 3^2 * 2^2}{3 * 2^3 + 2 * 3}$$

Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla $b = 3$

$$\frac{(\frac{b}{5} * \frac{3}{b} - \frac{b}{9} * \frac{3}{b})(\frac{3}{b} * \frac{3}{b} - \frac{1}{b} * \frac{3}{5})}{(\frac{b}{3} * \frac{2}{b} + \frac{3}{7} * \frac{b}{3})(\frac{b}{3} * \frac{b}{5} + \frac{b}{7} * \frac{b}{3})}$$

Warszawa czerwiec 2023

Contents

Chapter 1

Wyrażenia arytmetyczne i algebraiczne

Zacznijmy od sformułowania pojęć wyrażenia arytmetycznego i algebraicznego.

Defimnicja 1.1 *Wyrażeniem arytmetycznym nazywamy ciąg liczb połączonych czterema operacjami arytmentycznymi dodawania, odejmowania mnożenia i dzielenia przez liczby różne od zera.*

Na przykład, wyrażenie

$$\frac{3*4+6:2-2*3}{2^3+3^2-8:2}$$

jest wyrażeniem arytmetycznym składającym się z ciągu liczb

$$\begin{array}{ll} Licznik: & 3,4,6,2,2,3, \\ mianiwnik: & 2,3,3,2,8,2 \end{array}$$

połączonych operacjami arytmetycznymi

$$*,\ +,\ :,\ -,\ *, /,\ '+,\ '-,\ :$$

Podobnie definiujemy wyrażenia algebraiczne. Mianowicie

Defimnicja 1.2 *Wyrażeniem algebraicznym nazywamy ciąg liczb lub liter połączonych czterema operacjami arytmentycznymi dodawania, odejmowania mnożenia i dzielenia przez liczby lub litery, których wartości są różne od zera.*

Na przykład

$$\frac{a*4+x:2-2*3}{x^3+3^2-b:2}$$

jest wyrażeniem algebraicznym składającym się z ciągu liczb i liter

$$a,4,x,2,2,3,x,3,3,3,2,b,2$$

połączonych operacjami arytmetycznymi

$$*,\ +,\ :,\ -,\ *, /,\ '+,\ '-,\ :$$

które dla wartości $a = 3,\ x = 6,\ b = 8$ staje się wyrażeniem arytmetycznym.
Obliczając wartość wyrażenia arytmetycznego należy zachować kolejność wykonywania operacji arytmetycznych.

Najpierw wykonujemy operacje mnożenia i dzielenia, w następnej kolejności wykonujemy operacje dodawania i odejmowania.

Kolejność wykonywania operacji arytmetycznych mogą zmienić nawiasy, jeżeli w wyrażeniu nawiasy występują.

W szkołach i na uniwersytetach, w zakresie przedmiotów ścisłych, wiele wzorów mają postać wyrażeń algebraicznych.
W szkołach podstawowych już od pierwszej klasy uczymy obliczania wartości najprostrzych wyrażeń arytmetycznych.
Zatem, wyrażenia arytmetyczne lub algebraiczne są ważną częścią programów nauczania matematyki. Im wcześniej uczniowie osiągną sprawność rachunkową obliczania wartości tych wyrażeń tym lepiej.

1.1 Wyrażenia arytmetyczne proste i z nawiasami

Zacznijmy ćwiczenia obliczania wartości wyrażeń arytmetycznych od prostych zadań.

1.1.1 Ćwiczenia

Zadanie 1.1 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$(a) \quad 12 + 14 + 24$$

$$(b) \quad 50 - 24 - 8$$

Zadanie 1.2 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność działań*

$$(a) \quad 18 - 16 + 2 * 8$$

$$(b) \quad 5 * 6 + 24 : 3$$

Zadanie 1.3 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

$$(a) \ 3 * (4 + 6) - 2 * (3 + 5)$$

$$(b) \ (50 - 40) * 2 - (10 + 6) : 2$$

Zadanie 1.4 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$5^2 * 2^3 + 3^2 * 2^3 - 4^2 * 5^2$$

Zadanie 1.5 *Oblicz wartość wyrażenia artmetycznego*

$$\frac{3^3 * 2^3 - 3^2 * 2^2}{3 * 2^3 + 2 * 3}$$

Odp:6

Zadanie 1.6 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{\frac{2}{5}*\frac{3}{5}-\frac{2}{9}*\frac{3}{8}}{\frac{5}{3}*\frac{2}{5}+\frac{3}{7}*\frac{7}{3}}$$

Zadanie 1.7 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{\frac{1}{3}*\frac{2}{5}-\frac{1}{2}*\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}*\frac{1}{4}+\frac{3}{4}*\frac{4}{3}}$$

Zadanie 1.8 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

$$\frac{(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})}{(\frac{2}{3}+\frac{3}{4})(\frac{4}{3}+\frac{5}{4})}$$

Zadanie 1.9 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

$$\frac{(\frac{2}{5}*\frac{3}{5}-\frac{2}{9}*\frac{3}{8})(\frac{3}{5}*\frac{3}{5}-\frac{1}{5}*\frac{3}{5})}{(\frac{5}{3}*\frac{2}{5}+\frac{3}{7}*\frac{7}{3})(\frac{5}{3}*\frac{2}{5}+\frac{3}{7}*\frac{7}{3})}$$

Zadanie 1.10 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

$$\frac{(\frac{1}{3}*\frac{2}{5}-\frac{1}{2}*\frac{3}{5})(\frac{1}{3}*\frac{2}{5}-\frac{1}{2}*\frac{3}{5})}{(\frac{2}{3}*\frac{1}{4}+\frac{3}{4}*\frac{4}{3})(\frac{2}{3}*\frac{1}{4}+\frac{3}{4}*\frac{4}{3})}$$

1.2 Wyrażenia algebraiczne

Przypominamy, że oprócz wyrażeń arytmetycznych, mamy wyrażenia algebraiczne. W wyrażeniach algebraicznych dopuszczamy litery, symbole o zmiennej warości. Zatem, wyrażeniem algebraicznym nazywamy ciąg liczb i liter połączonych operacjami arytmetycznymi dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia.

Przykład 1.1 *Uprość wyrażenie*

$$\frac{a^2-a}{a-1}-(a+1), \qquad a>1.$$

Rozwiązanie. Wykonując działania arytmetyczne, obliczmy

$$\begin{aligned}
\frac{a^2-a}{a-1}-(a+1) &= \frac{(a^2-a)-(a-1)(a+1)}{a-1} \\
&= \frac{(a^2-a)-[a(a+1)-1(a+1)]}{a-1} \\
&= \frac{a^2-a-[a^2+a-a-1]}{a-1} \\
&= \frac{a^2-a-a^2+1]}{a-1} \\
&= \frac{1-a}{a-1} = -\frac{1-a}{1-a} = -1.
\end{aligned}$$

1.2.1 Zadania

Zadanie 1.11 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości* $a = 2$

$$\frac{\frac{a}{3} - \frac{a}{2}}{\frac{a}{3} + \frac{a}{4}}$$

Zadanie 1.12 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości* $b = 1$

$$\frac{\frac{2}{b} * \frac{3}{b} - \frac{2}{b} * \frac{3}{b}}{\frac{b}{3} * \frac{b}{5} + \frac{b}{7} * \frac{b}{3}}$$

Zadanie 1.13 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości* $c = 3$

$$\frac{\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{3} * \frac{3}{c}}{\frac{c}{3} * \frac{1}{c} + \frac{3}{c} * \frac{c}{3}}$$

Zadanie 1.14 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla* $a = 2$

$$\frac{(\frac{a}{3} - \frac{a}{2})(\frac{2}{3} - \frac{a}{2})}{(\frac{2}{3} + \frac{a}{4})(\frac{4}{a} + \frac{a}{4})}$$

Zadanie 1.15 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla* $b = 3$

$$\frac{(\frac{b}{5} * \frac{3}{b} - \frac{b}{9} * \frac{3}{b})(\frac{3}{b} * \frac{3}{b} - \frac{1}{b} * \frac{3}{5})}{(\frac{b}{3} * \frac{2}{b} + \frac{3}{7} * \frac{b}{3})(\frac{b}{3} * \frac{b}{5} + \frac{b}{7} * \frac{b}{3})}$$

Zadanie 1.16 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla* $c = 1$

$$\frac{(\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{2} * \frac{c}{5})(\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{2} * \frac{c}{5})}{(\frac{c}{3} * \frac{c}{4} + \frac{c}{4} * \frac{c}{3})(\frac{c}{3} * \frac{c}{4} + \frac{c}{4} * \frac{c}{3})}$$

1.3 Wyrażenie algebraiczne liniowe

Wyrażenie algebraiczne

$$a * x + b$$

nazywamy liniowym ze względu na zmienną x, gdzie współczynniki wyrażenia liniowego a i b mają ustaloną wartość.

Na przykład

$$2 * x + 1, \quad gdzie\ wspolczynniki \qquad a = 2, \quad b = 1$$

$$-5 * x + 4, \quad gdzie\ wspolczynniki \qquad a = -5, \quad b = 4$$

1.3.1 Zadania

Zadanie 1.17 *Napisz wyrażenie algebraiczne liniowe o współczynnikach*

$$(i) \quad a = 5, \qquad b = -25$$

$$(ii) \quad a = \frac{3}{5}, \qquad b = \frac{2}{9}$$

$$(iii) \quad a = -\frac{13}{15}, \quad b = -\frac{15}{29}$$

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

TEMAT 3.2

Równania i nierówności liniowe

10 godzin lekcyjnych

Tadeusz STYŠ

1.4 Równanie liniowe

Równanie w postaci

$$a * x + b = 0$$

lub każde inne równanie, które można sprowadzić do tej postaci nazywamy równaniem liniowym ze względu na niewiadomą x. współczynniki a i b tego równania mają wartość ustaloną.
Rozwiązaniem równania liniowego z niewiadomą x jest każda liczba, która podstawiona w miejsce x, spełnia to równanie.
Rozwiązanie równania liniowego otrzymujemy postępując według schematu:
• przenosimy liczby na prawą stronę zmieniając ich znak na przeciwny,
• niewiadomą x zostawiamy na lewej stronie
• dzielimy lub mnożymy przez współczynnik $a \neq 0$, żeby otrzymać współczynnik 1 przy zmiennej x.

Przykłady równań liniowych z rozwiązaniami.

$$2 * x - 4 = 0, \quad x = 2, \quad bo \qquad 2 * 2 - 4 = 0, \quad dla \qquad a = 2, \quad b = -4$$

$$-3 * x + 3 = 0, \quad x = 1, \quad bo \quad -3 * 1 + 3 = 0, \quad dla \quad a = -3, \quad b = 3$$

Przykład 1.2 *Rozwiąż równanie liniowe*

$$2x - 1 = 0, \quad a = 2, \ b = -1.$$

Rozwiązanie.
Przenosimy liczbę -1 na prawą strone, zmieniając znak na przeciwny idzielimy obie strony tego równania przez 2

$$2x = 1 \mid : 2$$

W ten sposób znajdujemy rozwiązanie

$$x = \frac{1}{2}$$

Podstawiając do równania $x = \frac{1}{2}$, sprawdzamy, że otrzymane rozwiązanie spełnia to równanie. Mianowicie dla $x = \frac{1}{2}$, mamy

$$2x - 1 = 2\frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Widzimy, że rozwiązanie $x = \frac{1}{2}$ spełnia to równanie. Teraz podamy ogólny schemat rozwiązania równania liniowego.

$$a\,x + b = 0,$$

$$a \neq 0,$$

$$a\,x = -b,$$

$$x = -\frac{b}{a},$$

1.4.1 Zadania

Zadanie 1.18 *Rozwiąż równanie*

$$(i) \qquad 3\,x - 12 = 0$$

$$(ii) \qquad 5\,x + 20 = 10$$

$$(iii) \qquad \frac{3}{4}x + \frac{5}{8} = 1$$

$$(iv) \qquad 1,5x + 2,9 = 7$$

Zadanie 1.19 *Mały pastuszek zauważył lecące bociany i krzyknął chyba ich leci 100. Starszy pastuch odpowiedział dużo mniej, gdyby leciało ich dwa razy tyle, i pół tyle, i ćwierć tyle i ty żebyś z nimi poleciał to wtedy byłoby ich razem z tobą 100. Ile bocianów leciało po niebie?*

Obraz Józefa Chełmońskiego (1849-1914). Bociany

Zadanie 1.20 *Franek czytał książkę 25 stron dziennie. Przeczytał całą książkę w ciągu 3 dni.*
Oblicz ile stron ma ta książka ?

Zadanie 1.21 *Marysia kupiła 3 zeszyty po 7 złotych każdy. Kazik kupił piłkę za 10 złotych i zegarek za 35 złotych?*

Ile zapłaciła Marysia za 3 zeszyty ?

Ile zapłacił Kazik za piłkę i za zegarek ?

O Ile więcej złotych Kazik zapłacił za zakupy od Marysi ?

Bolek jest 2 razy starszy od Stefki, która ma 7 lat. Olek ma tyle lat co Bolek i Stefka razem.

(a) Ile lat ma Bolek ?

(b) Ile lat ma Olek ?

Zadanie 1.22 *Na kilku drzewach siedziały wrony. Janek powiedział do Ojca*
Tato dużo wron widzę na drzewach, chyba jest ich 100.
Ojciec odpowiedział Jasiu gdyby było 2 razy tyle i połowę tyle to wtedy byłoby 100 wron.

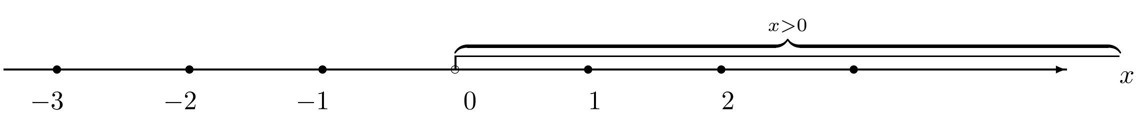
Ile wron siedziało na drzewach ?

Zadanie 1.23 *Uprość wyrażenie algebraiczne*

$$\frac{a^2 - a}{a - 1} - (a + 1), \qquad a > 1.$$

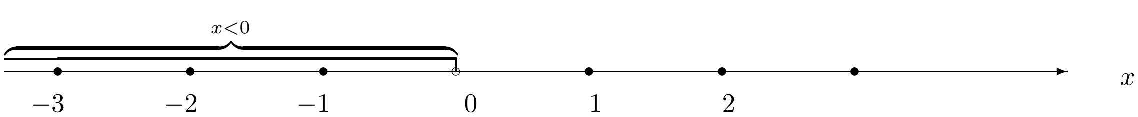
1.5 Nierówności

Zaznacz na osi liczbowej te wartości zmiennej x, które są większe od zera.



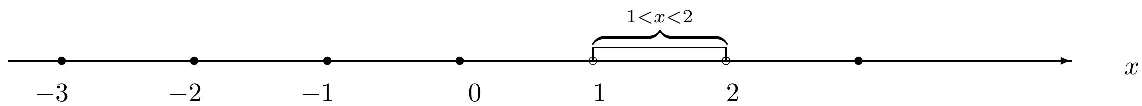
Nierówność ostra $x > 0$ wartości dodatnich zmiennej x

Zaznacz na osi liczbowej te wartości zmiennej x, które są mniejsze od zera.



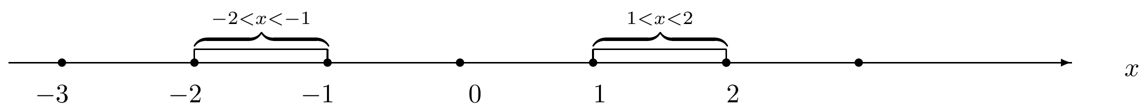
Nierówność ostra $x < 0$ wartości ujemnych zmiennej x

Zaznacz na osi liczbowej te wartości zmiennej x, które leżą pomiędzy liczbą 1 i liczbą 2.



Wartości zmiennej x pomiędzy 1 i 2

Zaznacz na osi liczbowej te wartości zmiennej x, które leżą pomiędzy liczbą -2 i liczbą -1 lub liczbą 1 i liczbą 2.



Wartości zmiennnej x pomiędzy -2 i -1 lub 1 i 2

gdy $-2 \leq x \leq -1$ lub $1 \leq x \leq 2$

1.5.1 Zadania

Zadanie 1.24 *Rozwiąż nierówność*

$$(i) \quad 2x - 1 > 1$$

$$(ii) \quad 4x - 6 \leq 10$$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości zmiennej x, dla których nierówności (a) i (b) są prawdziwe.

Przykład 1.1 *Rozwiąż nierówność*

$$3(x-1) < 2(x+1)$$

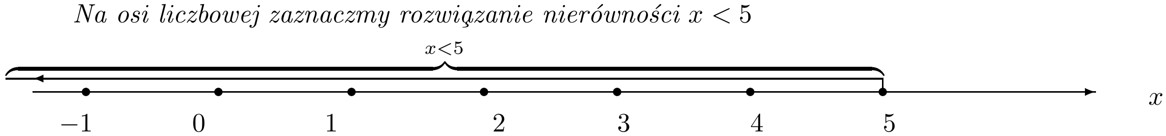
Zaznacz na osi liczbowej te wartości zmiennej x, dla których nierówność jest prawdziwa.
Rozwiązanie
Wykonujemy mnożenia po lewej i po prawej stronie nierówności

$$3x - 3 < 2x + 2$$

Zawsze, przenosimy zmienną x na lewą stronę nierówności ze znakiem przeciwnym, natomiast liczby przenosimy na prawą stronę nierówności też ze znakiem przeciwnym

$$3x - 2x < 2 + 3, \qquad x < 5$$

Na osi liczbowej zaznaczmy rozwiązanie nierówności $x < 5$



Nierówność ostra wartości zmiennej x mniejszych od 5

Zadanie 1.25 *Rozwiąż nierówność*

$$(i) \qquad 3(3x-1)-2(2x+1) < 4(x-1)$$

$$(ii) \qquad 3(x-2)+4(x+2) \leq 2x+10$$

$$(iii) \qquad \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad dla \;\; x \neq -1$$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości zmiennej x, *dla których nierówności* (i), (ii) *i* (iii) *są prawdziwe.*

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

TEMAT 3.3
Ułamki dziesiętne

5 godzin lekcyjnych

Tadeusz STYŠ

1.6 Ułamki dziesiętne

Ułamki zwykłe o mianownikach 10,100, 1000 na zywamy ułamkami dziesiętnymi. Ułamki dziesiętne piszemy używając przecinka zamiast kreski, piszemy jak niżej

$$\frac{1}{10} = 0,1, \quad \frac{1}{100} = 0,01, \quad \frac{1}{1000} = 0,001.$$

oraz

$$\begin{array}{rclrcl} \frac{3}{10} & = & 0,3, & \frac{5}{100}, & = & 0,05, \\ \frac{35}{1000} & = & 0,035 & \frac{735}{1000} & = & 0,735, \\ 2\frac{3}{10} & = & 2,3, & 10\frac{12}{100} & = & 10,12 \end{array}$$

Mamy relacje odwrotne, ułamki dziesiętne zamieniamy na ułamki zwykłe

$$
\begin{aligned}
0,1 &= \frac{1}{10}, & 0,01 &= \frac{1}{100},\\
0,001 &= \frac{1}{1000}, & 0,3 &= \frac{3}{10},\\
0.05 &= \frac{5}{100}, & 0,035 &= \frac{35}{1000},\\
0,735 &= \frac{735}{1000}, & 2,3 &= \frac{3}{10},\\
10,12 &= 10\frac{12}{100}.
\end{aligned}
$$

Każdy ułamek zwykły możemy zamienić na ułamek dziesiętny.
Pierwszy prosty sposób zamiany ułamka zwykłego na dziesiętny polega na zapisaniu tego ułamka przy mienowniku, $10, 100, 1000, \ldots$ Ten sposób jest prosty tylko dla wybranych ułamków.

Przykład 1.2

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{1*5}{2*5} = \frac{5}{10} = 0.1\\
\frac{3}{4} &= \frac{3*25}{4*25} = \frac{75}{100} = 0.25\\
\frac{7}{5} &= \frac{7*20}{5*20} = \frac{140}{100} = 1.4\\
\frac{15}{250} &= \frac{15*4}{250*4} = \frac{60}{1000} = 0.06
\end{aligned}
$$

Drugi sposób zamiany ułamków zwykłych na dziesiętne polega na dzieleniu licznika przez mianownik.

Przykład 1.3 *Zamień ułamek* $\frac{1}{4}$ *na ułamek dziesiętny.*

Rozwiązanie. *Dzielimy 1=1,00 przez 4. Zauważamy, że zera po przecinku nie zmieniają wartości 1*

$$
\begin{array}{rll}
 & 0,25 & \\
 & -- & \\
 & 1,00 & :4\\
- & 0 & \\
 & -- & \\
 & 10 & \\
 & -8 & \\
 & -- & \\
 & \ \ 20 & \\
 & - \ 2 & \\
 & -- & \\
 & \ \ \ 0 &
\end{array}
$$

Odpowiedź: $\frac{1}{4} = 0,25$

1.6.1 Zadania

Zadanie 1.26 *Zamień ułamek zwykły na dziesiętny*

$$(i) \quad \frac{3}{5}$$
$$(ii) \quad \frac{37}{50}$$
$$(iii) \quad \frac{253}{250}$$

Zadanie 1.27 *Zamień ułamek zwykły na dziesiętny*

$$(i) \quad \frac{2}{15}$$
$$(ii) \quad \frac{23}{45}$$
$$(iii) \quad \frac{37}{150}$$

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

Temat 3.3
Procenty

5 godzin lekcyjnych

Tadeusz STYŠ

1.7 Procenty i promile

$p\%$ procent to ułamk $\frac{p}{100}$ o liczniku p i o mianowniku 100.

Na przykład

1% jeden procent to ułamek $\frac{1}{100} = 0.01$ o liczniku 1 i o mianowniku 100.

25% to ułamek $\frac{25}{100} = 0.25$ o liczniku 25 i o mianowniku 100.

100% to całość $\frac{100}{100} = 1$ o liczniku 100 i o mianowniku 100

Obliczamy $p\%$ procent z wartości a

$$p\% \ * \ a = \frac{p}{100} * a$$

jako ułamek o liczniku p i o mianowniku 100 z a.

1.7.1 Zadania

Zadanie 1.28 *Oblicz* 15% *z wartości a=60*

$$15\% * 60 = \frac{15}{100} * 60 = \frac{15 * 60}{100} = \frac{15 * 6}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

Zadanie 1.29 *Oblicz* 25% *z wartości a=3000*

$$25\% * 3000 = \frac{25}{100} * 3000 = \frac{25 * 3000}{100} = \frac{75000}{100} = 750$$

Odwrotnie, mając $p\% * a$ procent wartości a, obliczamy wartość a

Przykład 1.4 30% *procent wartości a równa się* 600. *Oblicz wartość a*

Rozwiązanie.

$$30\% * a = 600, \quad \frac{30}{100} * a = 600, \quad a = \frac{600}{\frac{30}{100}} = \frac{600 * 100}{30} = 2000$$

Zadanie 1.30 *Oblicz* 75% *z wartości* $a = 2000$

Zadanie 1.31 *Oblicz* 15% *z wartości* $a = 4000$

Odwrotnie, mając $p\% * a$ procent wartości a, oblicz wartość a podaną niżej w ćwiczeniach

Zadanie 1.32 50% *procent wartości a równa się* 800. *Oblicz wartość a*

Zadanie 1.33 30% *procent wartości a równa się* 5000. *Oblicz wartość a*

Zadanie 1.34 *Cena metra kwadratowego materiału na zasłony okien kosztowała* 50 *zł. Najpierw podwyższono cenę o* 30% *potem obniżono o* 10 % *za metr kwadratowy. Ile zapłacił klient za* 10 m^2 *materiału ?*

Zadanie 1.35 *Cena materiału razem z* 7% *VAT kosztowała* 107 *zł. Podatek VAT materiału wrósł do* 22%. *Ile kosztował materiał z całym VAT ?. O ile procent wrosła cena materiału ?*

1.8 Promile

Promile to ułamki o mianowniku 1000.
$p\%\%$ promili to ułamk $\frac{p}{1000}$ o liczniku p i o mianowniku 1000.

Na przykład

1%% jeden procent to ułamek $\frac{1}{1000} = 0.001$ o liczniku 1 i o mianowniku 1000.

25%% to ułamek $\frac{25}{1000} = 0.025$ o liczniku 25 i o mianowniku 1000.

1000%% to całość $\frac{1000}{1000} = 1$ o liczniku 1000 i o mianowniku 1000.

Obliczamy $p\%\%$ procent z wartości a

$$p\%\% \ * \ a = \frac{p}{1000} * a$$

jako ułamek o mianowniku 1000 z a.

1.8.1 Zadania

Zadanie 1.36 *Oblicz* 15%% *z wartości a=3000*

$$15\%\% * 3000 = \frac{15}{1000} * 3000 = \frac{15 * 3000}{1000} = 45$$

Zadanie 1.37 *Oblicz* 25%% *z wartości a=3000*

$$25\%\% * 3000 = \frac{25}{1000} * 3000 = \frac{25 * 3000}{1000} = 75$$

Odwrotnie, mając $p\%\% * a$ procent wartości a, obliczamy wartość a

Przykład 1.5 30%% *procent wartości a równa się* 600*. Oblicz wartość a*

Rozwiązanie.

$$30\%\% * a = 600, \quad \frac{30}{1000} * a = 600, \quad a = \frac{600}{\frac{30}{1000}} = \frac{600 * 1000}{30} = 20000$$

Zadanie 1.38 *Oblicz* 75%% *z wartości* $a = 2000$

Zadanie 1.39 *Oblicz* 15%% *z wartości* $a = 4000$

1.9 Procent składany

Wprowadźmy następujące oznaczenia

- K_0 - kapitał początkowy
- K_n - kapitał po n latach

- p - procent wzrostu kapitału lub malenia kapitału kredytu w skali roku, przy stałych ratach miesięcznych R spłacania kredytu K_0.
- n - ilość lat oszczędności

Po pierwszym roku oszczzędzania kapitał K_0 wzrośnie o $p\%$

$$K_1 = K_0 + K_0\frac{p}{100} = K_0(1 + \frac{p}{100})$$

Po drugim roku oszczędności kapitał K_1 wzrośnie o $p\%$

$$K_2 = K_1 + K_1\frac{p}{100} = K_1(1 + \frac{p}{100}) = K_0(1 + \frac{p}{100})^2$$

Ogólnie, stosując zasadę indukcji zupełnej, po n latach oszczędzania kapitał K_{n-1} wrośnie o $p\%$. To znaczy

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1}\frac{p}{100} = K_0(1 + \frac{p}{100})^n$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na końcowy kapitał po n latach oszczędzania

$$K_n = K_0(1 + \frac{p}{100})^n \tag{1.1}$$

Przykład 1.3 *Oblicz o ile wzrośnie kapitał* $150000PLN$ *po 10 latach, jeżeli prcent* $p = 5\%$.

Rozwiązanie. Stosując wzór (1.1) dla $K_0 = 150000,\ n = 10,\ p = 5$, obliczamy

$$K_{10} = 150000(1 + \frac{5}{100})^{10} = 150000 * 1.05^{10} = 150000 * 1.62889 = 244334PLN$$

Odpowiedź: Kapitał $150000PLN$ wzrośnie przez 10 lat do sumy $244334PLN$.

Spłata kredytu. Podobnie obliczamy procent składany od kredytu K_0 przy ratach miesięcznych R, jeżeli procent kredytu jest równy $p\%$
Po pierwszym roku spłacania kapitał K_0 zmaleje o $12R$ rat plus $p\%$ z kapitału K_0.

$$K_1 = K_0 + K_0\frac{p}{100} - 12R = K_0(1 + \frac{p}{100}) - 12R$$

Po drugim roku spłacania kapitał K_1 zmaleje o $12R$ rat plus $p\%$ z kapitału K_1.

$$\begin{aligned}
K_2 = &= K_1(1 + \frac{p}{100}) - 12R \\
&= \underbrace{(K_0(1 + \frac{p}{100}) - 12R)}_{K_1}(1 + \frac{p}{100}) - 12R \\
&= K_0(1 + \frac{p}{100})^2 - 12R(1 + \frac{p}{100}) - 12R = K_0(1 + \frac{p}{100})^2 - 12R(1 + (1 + \frac{p}{100}))
\end{aligned}$$

Ogólnie, stosując zasadę indukcji zupełnej, po n latach spłacania kapitał K_n zmaleje do sumy

$$\begin{aligned}
K_n = &= K_{n-1}(1 + \frac{p}{100}) - 12R \\
&= K_0(1 + \frac{p}{100})^n - 12R(1 + (1 + \frac{p}{100}) + (1 + \frac{p}{100})^2 + \cdots + (1 + \frac{p}{100})^{n-1})
\end{aligned}$$

Stosując wzór

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

na sumę postępu geometrycznego o ilorazie $q = 1 + \frac{p}{100}$, otrzymamy wzór na końcowy kapitał po n latach spłacania kredytu.

$$K_n = K_0(1+\frac{p}{100})^n - 12R\frac{(1+\frac{p}{100})^n - 1}{1+\frac{p}{100} - 1} = K_0(1+\frac{p}{100})^n - 12R*100\frac{(1+\frac{p}{100})^n - 1}{p} \quad (1.2)$$

Przykład 1.4 *Oblicz do jakiej sumy zmaleje kredyt od kapitału* $K_0 = 300000PLN$ *po 20 latach spłacania kredytu obciążonego* $p = 5\%$ *przy ratach miesięcznych* $R = 2000PLN$.

Rozwiązanie. Stosując wzór (1.2) dla $K_0 = 300000,\ n = 20,\ R = 2000,\ p = 5$, obliczamy

$$K_{20} = 300000(1+\frac{5}{100})^{20} - 12*2000*100\frac{(1+\frac{5}{100})^{20} - 1}{5} = 2406.41$$

Odpowiedź: Po 20 latach kredyt zmaleje do sumy $K_{20} = 2406.41PLN$.

Zadanie 1.40 *Oblicz do jakiej sumy zmaleje kredyt* $K_0 = 500000PLN$ *po 20 latach spłaconia, jeżeli raty miesięczne* $R = 2500$, *a procent* (i) $p = 5\%$, (ii) $p = 6\%$.[1]

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

TEMAT 3.5
Wrtość bezwzlędna

3 godzin lekcyjnych

Tadeusz STYŠ

1.10 Wartość bezwzglęna

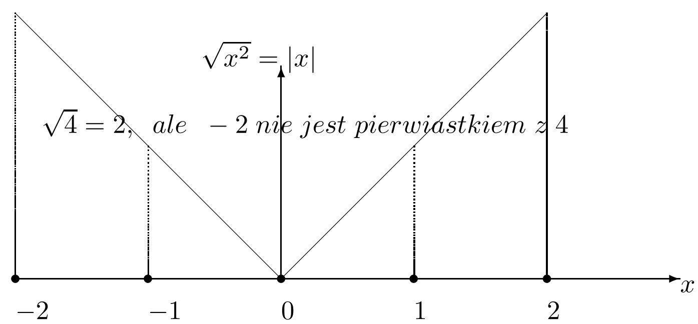
Wartość bezwzględna liczby to odległość punktu x od począdku układu oznaczonego przez 0. Zatem, wartość bezwzględna liczby x jest zawsze nieujemna.

Defimnicja 1.3 *Wartość bezwzględną liczby x określamy jak następuje:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{gdy} \quad x < 0 \end{cases}$$

[1] Jeżeli roczny wzrost kredytu równy jest sumie 12 rat spłaty kredytu to kredyt K_0 nigdy nie zmaleje i nie wzrośnie

Na przykład $|5| = 5$ bo $5 > 0$, również $|-5| = -(-5) = 5$, gdy $x = -5 < 0$.
Również wartość bezwzględną liczby x jest dana wzorem $|x| = \sqrt{x^2}$.



Wykres wartości bezwzlędnej $y = |x|$

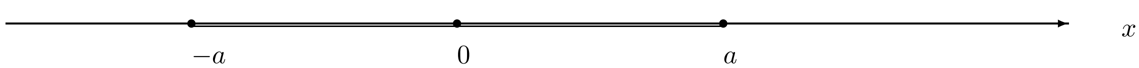
Odcinek na osi liczbowej. Z definicji wartości bezwzględnej liczby x, wynika nierówność

$$|x| \leq a, \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad -a \leq x \leq a, \quad a \geq 0.$$

Rzeczywiście, zauważamy, że

$$|x| \leq a, \quad \text{gdy} \quad x \leq a \quad \text{i} \quad -x \leq a, \quad \text{to znaczy} \quad -a \leq x \leq a.$$

Na osi liczbowej zaznaczmy zbiór liczb x, które spełniają $-a \leq x \leq a$



Odcinek na osi liczbowej $|x| \leq a$.

Podobnie, odcinek $[a, b]$ o początku w punkcie a i końcu w punkcie b, to jest zbiór punktów x leżących pomiędzy punktami a i b piszemy jak następuje:

$$[a, b] = \{x \in R : \ a \leq x \leq b\}$$

Długość odcinka $[a, b]$, to jest odległość punktu a od punktu b, równa się wartości bezwzględnej różnicy $|b - a|$.

Przykład 1.5 *Rozwiąż równanie*

$$|2x - 3| = 5.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Rozwiązanie. Z defincji wartości bezwzględnej

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x - 3 = 5, & gdy \quad 2x - 3 \geq 0, \quad to \quad x = 4, \\ -(2x - 3) = 5 & gdy \quad -2x + 3 \leq 0, \quad to \quad x = -1, \end{cases}$$

Rozwiązanie x=-1 lub $x = 4$ podane jest niżej na osi liczbowej.

Rozwiązanie $x = -1$ lub $x = 4$.

Przykład 1.6 *Rozwiąż nierówńść*

$$|x - 3| \leq 2.$$

Rozwiązanie. Z definicji wartości bezwzlęnej nierówność

$$|x-3| \leq 2.$$

jest równoważna z podwójną nierównością

$$-2 \leq x-3 \leq 2, \quad \text{lub} \quad 1 \leq x \leq 5.$$

Odpowiedź: $1 \leq x \leq 5$.

Przykład 1.7 *Podaj zbiór punktów, które spełniają nierówność*

$$|x-1| + |x+1| \leq 1.$$

Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej.

Rozwiązanie. Z definicji wartości bezwzlęnej znajdujemy

1. *dla* $x+1 \leq 0$, $|x+1| = -(x+1) = -1-x$, *i* $|x-1| = -(x-1) = -1-x$

   $|x-1| + |x+1| = 1-x-1-x = -2x \leq 1$,

   gdy $x \geq -\frac{1}{2}$, *wtedy nierownosc nie ma rozwiazania*

2. *dla* $-1 \leq x \leq 1$, $|x-1| = (x-1) = x-1$, *i* $|x+1| = -(x+1) = -1-x$

   $|x-1| + |x+1| = x-1-1-x = -2 \leq 1$,

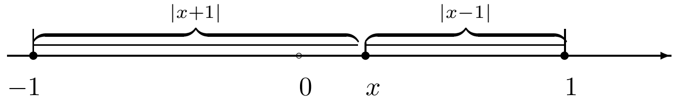
   gdy $-1 \leq x \leq 1$, *wtedy nierownosc jest prawdziwa dla* $-1 \leq x \leq 1$

3. *dla* $x-1 \geq 0$, $|x-1| = x-1$, *i* $|x+1| = x+1$

   $|x-1| + |x+1| = (x-1)+(x+1) = 2x \leq 1$,

   gdy $x \leq \frac{1}{2}$, *wtedy nierownosc nie ma rozwiazania*

Odpowiedź: Nierówność jest spełniona dla $-1 \leq x \leq 1$. To znaczy dla wszystkich x takich, że $|x| \leq 1$.
Zauważmy, że odległość każdego punktu $x \in [-1,1]$ od punktu -1 plus odległość tego punktu x od punktu 1 równa się 1. Zatem nierówność jest spełniona również dla $x=-1$ lub $x=1$, wtedy zachodzi znak równości. Zaznaczmy to rozwiązanie na rysunku.



$|x-1| + |x+1| = 1$ dla każdego $x \in [-1,1]$

1.10.1 Zadania

Zadanie 1.41 *Rozwiąż równanie*

$$|3x-5| = 4.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 1.42 *Rozwiąż równanie*

$$|2x-3|=5.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 1.43 *Rozwiąż nierówność*

$$|x-5|\leq 2.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 1.44 *Podaj zbiór punktów, które spełniają nierówność*

$$|x|+|x-2|\leq 2.$$

Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

TEMAT 3.6

Ciągi i szregi liczbowe

5 godzin lekcyjnych

Tadeusz STYŠ

1.11 Ciąg arytmetyczne i szereg arytmetyczny.

Wyrażenia postaci

$$a_0, a_0+r, a_0+2r,\ a_0+3r, ..., a_0+n\,r; \qquad n=0,1,2,...;$$

nazywamy ciągiem arytmetcznym, gdzie $a_0 \in R$ jest pierwszym wyrazem ciągu i $r \in R$ jest różnicą ciągu.
Zatem wyraz ogólny ciągu a_n można zapisać wzorem

$$a_n = a_0 + n\,r, \qquad n=0,1,2,...;$$

Różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu wynosi

$$a_{n+1}-a_n = a+(n+1)r-(a+n\,r)=r, \qquad n=0,1,2,...;$$

Na przyład, ciąg kolejnych liczb naturalnych

$$0, 1, 2, ...;$$

jest ciągiem arytmetycznym o wyrazie pierwszym $a_0 = 0$, różnicy $r = 1$ i o wyrazie ogólnym $a_n = n$.
Średnia Arytmetyczna. Zauważmy, że wyraz ciągu arytmetycznego

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

jest średnią arytmetyczną wyrazu poprzedniego i następnego.
Rzeczywiście, obliczamy

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_0 + (n-1)r) + (a_0 + (n+1)r)}{2} = \frac{2a_0 + 2nr}{2} = a_n$$

Również sumy dwóch wyrazów odległych o liczbę k od a_0 i o liczbę k od a_n

$$a_0 + a_n = a_k + a_{n-k}$$

są równa dla każdego $k = 0, 1, 2, ...n$;
Mianowicie, sprawdzamy, że dla każdego $k = 0, 1, 2, ..., n$, may

$$a_k + a_{n-k} = \underbrace{a_0 + kr}_{a_k} + \underbrace{a_0 + (n-k)r}_{a_{n-k}} = a_0 + \underbrace{a_0 + nr}_{a_n} = a_0 + a_n.$$

Przykład 1.8 *Sprawdź czy następujący ciąg jest artmetyczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{3n+1}{3}, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$
$$(ii) \quad a_n = 1 + n^2, \quad n = 0, 1, 2, ..., :$$

Rozwiązanie (i). Sprawdzamy czy różnica r kolejnych wyrazów tego ciągu jest stała, to znaczy jest niezależna od n

$$r = a_{n+1} - a_n = \underbrace{\frac{3(n+1)+1}{3}}_{a_{n+1}} - \underbrace{\frac{3n+1}{3}}_{a_n} = \frac{3n+1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3n+1}{3} = \frac{1}{3}, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Odpowiedź: Ciąg (i) jest arytmetyczny, gdyż różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami tego ciągu jest stała $r = \frac{1}{3}$ i nie zależy od $n = 0, 1, 2, ...$;
Rozwiązanie (ii). Sprawdzamy czy różnica kolejnych wyrazów ciągu jest stała, to znaczy niezależy od n

$$r = a_{n+1} - a_n = \underbrace{1 + (n+1)^2}_{a_{n+1}} - \underbrace{(1+n^2)}_{a_n} = 1 + n^2 + 2n + 1 - (1 + n^2) = 1 + 2n,$$

Odpowiedź: Widzimy, że ciąg (ii) nie jest ciągiem arytmetyczny, gdyż różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu $r = 2n + 1$ dla $n = 0, 1, 2, ...$; zależy od n.

1.11.1 Zadania

Zadanie 1.45 *Sprawdź czy następujący ciąg jest artmetyczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{8n+1}{5}, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$
$$(ii) \quad a_n = 1 + 2^n, \quad n = 0, 1, 2, ..., :$$

Postęp Arytmetyczny. Postępem arytmetycznym nazywamy sumę wyrazów ciągu arytmetycznego

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

lub

$$a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \cdots + (a_0 + nr),$$

W sigma notacji piszemy szereg arytmetyczny jako następującą sumę:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

lub

$$\sum_{k=0}^{n} (a_0 + kr) = a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \cdots + (a_0 + nr).$$

Łatwo wyprowadzić wzór na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego.
Mianowicie, oznaczmy sumę przez

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Napiszmy tą sumę w odwrotnej kolejności dodawania wyrazów

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$$

Dodając stronami, otrzymamy

$$2S_n = (a_0 + a_n) + (a_1 + a_{n-1}) + (a_2 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_1) + (a_n + a_0)$$

Ponieważ, wyrazy postępu arytmetycznego spełniają równość

$$a_0 + a_n = a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2} = \cdots = a_n + a_0$$

dlatego, suma wyrazów ciągu arytmetycznego

$$2S_n = (n+1)(a_0 + a_n)$$

lub

$$S_n = \frac{n+1}{2}(2a_0 + nr).$$

Przykład 1.9 *Oblicz sumę postępu arytmetycznego*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że w tym postępie arytmetycznym pierwszy wyraz $a_0 = 0$ i różnica $r = 1$.
Stosując powyższy wzór, znajdujemy sumę

$$S_n = \frac{(n+1)}{2}(2a_0 + nr) = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Zadanie 1.46 *Oblicz sumę n wyrazów postępu arytmetycznego o wyrazie ogólnym*

$$a_n = \frac{3n+5}{2}, \quad n = 0, 1, 2, ..., ;$$

1.11.2 Ciągi geometryczne i postępy geometryczne.

Wyrażenie postaci

$$a_0, a_0q, a_0q^2,\ a_0q^3, ..., a_0q^n \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

nazywamy ciągiem geometrycznym, gdzie $a_0 \in R$ jest pierwszym wyrazem ciągu i $q \in R$ jest ilorazem ciągu.
Zatem wyraz ogólny ciągu geometrycznego piszemy

$$a_n = a_0q^n, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Zakładamy nie trywialny przypadek gdy $a_0 \neq 0,\ q \neq 0$.
Iloraz dwóch kolejnymi wyrazów ciągu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Na przykład, ciąg liczb

$$1, 2, 2^2, 2^3...; 2^n$$

o wyrazie pierwszym $a_0 = 1$, ilorazie $q = 2$ i o wyrazie ogólnym $a_n = 2^n$ jest ciągiem geometrycznym. Zauważmy, że gdy iloraz $q = 0$ to ciąg geometryczny jest o wyrazie ogólnym stałym $a_n = a_0$ dla każdego $n1, 2, ...;$
Średnia Geometryczna. Zauważmy, że wartość bezwzględna wyrazu ciągu geometryczngo jest średnią geometryczną wyrazu poprzedniego i następnego

$$|a_n| = \sqrt{|a_{n-1}a_{n+1}|}$$

Rzeczywiście, obliczamy

$$a_{n-1} * a_{n+1} = a\ q^{n-1} * a * q^{n+1} = a^2 * q^{2n} = a_n^2.$$

Skąd wynika średnia geometryczna

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} * a_{n+1}}$$

Również iloczyny dwóch wyrazów odległych o liczbę k od a_0 i liczbę k od a_n

$$a_0 * a_n = a_k * a_{n-k}$$

są równa dla każdego $k = 0, 1, 2, ...n;$
Mianowicie, sprawdzamy, że dla każdego $k = 0, 1, 2, ..., n$

$$a_k * a_{n-k} = \underbrace{a_0 * q^k}_{a_k} * \underbrace{a_0 * q^{n-k}}_{a_{n-k}} = \underbrace{a_0(a_0q^n)} = a_0 * a_n.$$

Przykład 1.10 *Sprawdź czy następujący ciąg o danym wyrazie ogólnym jest geometryczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{3^n}{2^n}, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$
$$(ii) \quad a_n = n^2, \quad n = 1, 2, ..., :$$

Rozwiązanie (i). Sprawdzamy czy iloraz q kolejnych wyrazów ciągu jest stały, to znaczy jest niezależny od n

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}) : (\frac{3^n}{2^n}) = \frac{3^{n+1} * 2^n}{2^{n+1} * 3^n} = \frac{3}{2} = q, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Odpowiedź: Ciąg jest geometryczny, gdyż iloraz kolejnych wyrazów ciągu jets stały i nie zależy od n, $q = \frac{3}{2}$ dla $n = 0, 1, 2, ...;$

Rozwiązanie (ii). Sprawdzamy czy iloraz q kolejnych wyrazów ciągu jest stały, to znaczy jest niezależny od n

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, ...;$$

Odpowiedź: Ciąg nie jest geometryczny, gdyż iloraz kolejnych wyrazów ciągu $q = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$ dla $n = 1, 2, ...;$ zależy od n.

1.11.3 Zadania

Zadanie 1.47 *Sprawdź czy następujący ciąg jest geometryczny.*

$$(i) \quad \frac{(\sqrt{2})^n}{5^n}, ... \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

$$(ii) \quad \sqrt{n}, ... \qquad n = 1, 2, ...;$$

Zadanie 1.48 *Podaj pierwszy wyraz, n-ty wyraz i oblicz iloraz ciągu geometrycznego*

$$(i) \quad \frac{1}{5}, \ \frac{3}{5}, \ \frac{3^2}{5}, \ \frac{3^3}{5}, ...;$$

$$(ii) \quad \sqrt{2}, \ 2, \ 2\sqrt{2}, \ 4, \ 4\sqrt{2}, ... :$$