SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 Warszawa
ul. Bażancia 16

ZASTOSOWANIE ILOCZYNU WEKTOROWEGO DO OBLICZANIA POLA CZWOROKĄTA

Tadeusz STYŚ

Warszawa styczeń 2020

Contents

0.1 Zastosowanienie iloczynu wektorowego do obliczania pola czworokąta dowolnego.

Pole dowolnego czworokąta $ABCD$ o danych wierzchołkach A, B, C, D we współrzędnych kartezjańskich możemy obliczyć stosując iloczyn wektorowy w przestrzeni kartezjańskiej R^3 cf. (1)

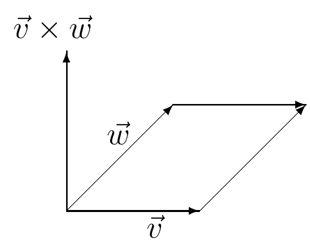
0.1.1 Iloczyn wektorowy w przestrzen trójwymiarowej R^3

Naturalnie iloczyn wektorowy wykonalny jest w przestrzeni kartezjańskiej trójwymiarowej i opisany jest w rozdziale geometrii przestrzennej. W tym rozdziale, geometrii płaskiej, stosujemy iloczyn wektorowy do obliczania pola czorokąta dowolnego. Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad i \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

w przestrzeni trójwymiarowej

$$R^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : \ -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty \ \}$$



Wynikiem mnożenia wektorowego wektora $\vec{v}$ przez wektor $\vec{w}$ jest trzeci wector $\vec{v} \times \vec{w}$, którego wpółrzędne obliczamy z rozwinięcia Laplace'a macierzy utworzenej ze współrzędnych wektorów

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ & & \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ & & \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \right\}$$

Mianowicie iloczyn

$$\vec{v} \times \vec{w} = [Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\}, -Det(\left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right\}), Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right\}]$$

gdzie wyznaczniki -determinants

$$Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\} = v_2 * w_3 - v_3 * w_2,$$

$$-Det\left\{\begin{matrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{matrix}\right\} = -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1),$$

$$Det\left\{\begin{matrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{matrix}\right\} = v_1 * w_2 - v_2 * w_1$$

Skąd otzymamy wzòr na współrzędne iloczynu wektorowego

$$\vec{v} \times \vec{w} = [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]. \qquad (1)$$

Wektor $\vec{v} \times \vec{w}$ jest prostopadły do wektoròw $\vec{v}$ i $\vec{w}$, piszemy

$$\vec{v} \times \vec{v} \perp \vec{w}, \qquad \vec{w} \times \vec{v} \perp \vec{w}$$

Wiemy, że wektory są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, jeżeli ich iloczy skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

ròwny jest zero.
Zatem, sprawdzamy iloczyn skalarny

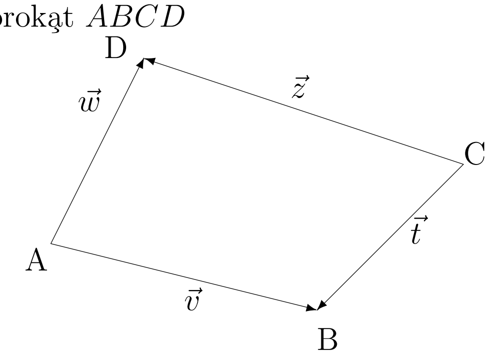
$$\begin{aligned}
(\vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}) &= ([v_1, v_2, v_3], [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]) \\
&= v_1(v_2 * w_3 - v_3 * w_2) - v_2(v_1 * w_3 - v_3 * w_1) + v_3(v_1 * w_2 - v_2 * w_1) \\
&= (v_1 v_2 w_3 + v_2 v_3 w_1 + v_3 v_1 w_2) - (v_1 v_3 w_2 + v_2 v_1 w_3 + v_3 v_2 w_1) = 0
\end{aligned}$$

Długość ròwna jest polu ròwnoległoboku o bokach $\vec{v}$ i $\vec{w}$.
[1] Zatem długość wektora

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{|v_2 * w_3 - v_3 * w_2|^2 + |-(v_1 * w_3 - v_3 * w_1)|^2 + |v_1 * w_2 - v_2 * w_1|^2}$$

0.1.2 Pole czworokąta. Przykłady

Rozpatrzymy czworokąt $ABCD$



o wierzchołkach

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3)$$

$$C = (c_1, c_2, c_3), \quad D = (d_1, d_2, d_3)$$

[1] Długość iloczynu wektorowego $|\vec{v} \times \vec{w} = |\vec{v}| * |\vec{w}| * cos\alpha$, gdzie α oznacza kąt pomiędzy wektorami $\vec{v}, \vec{w}$. Pole czworokąta $P_{ABCD} = |\vec{v} \times \vec{w} = |\vec{v}| * |\vec{w}| * cos\alpha$ ròwne jest długości ioczynu wektorowego.

rozpięty na wektorach

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = \vec{AD},$$

$$\vec{z} = [z_1, z_2, z_3] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [t_1, t_2, t_3] = \vec{CD},$$

gdzie współrzędne wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$, $\vec{t}$ określamy przez różnice współrzędnych wierzchołków A, B, C, D czworokąta $ABCD$

$$\begin{array}{lll} v_1 = b_1 - a_1, & v_2 = b_2 - a_2, & v_3 = b_3 - a_3, \\ w_1 = d_1 - a_1, & w_2 = d_2 - a_2, & w_3 = d_3 - a_3, \\ z_1 = b_1 - c_1, & z_2 = b_2 - c_2, & z_3 = b_3 - c_3, \\ t_1 = d_1 - c_1, & t_2 = d_2 - c_2, & t_3 = d_3 - c_3. \end{array}$$

Stosując iloczyn wektorowy (cf. (1)) możemy obliczyć pole dowolnego czworokąta o danych współrzędnych jego wierzchołków. Mianowicie, pole czworokąta wypukłego $ABCD$ równe jest połowie sumy iloczynu wektorowego wektorów [2]

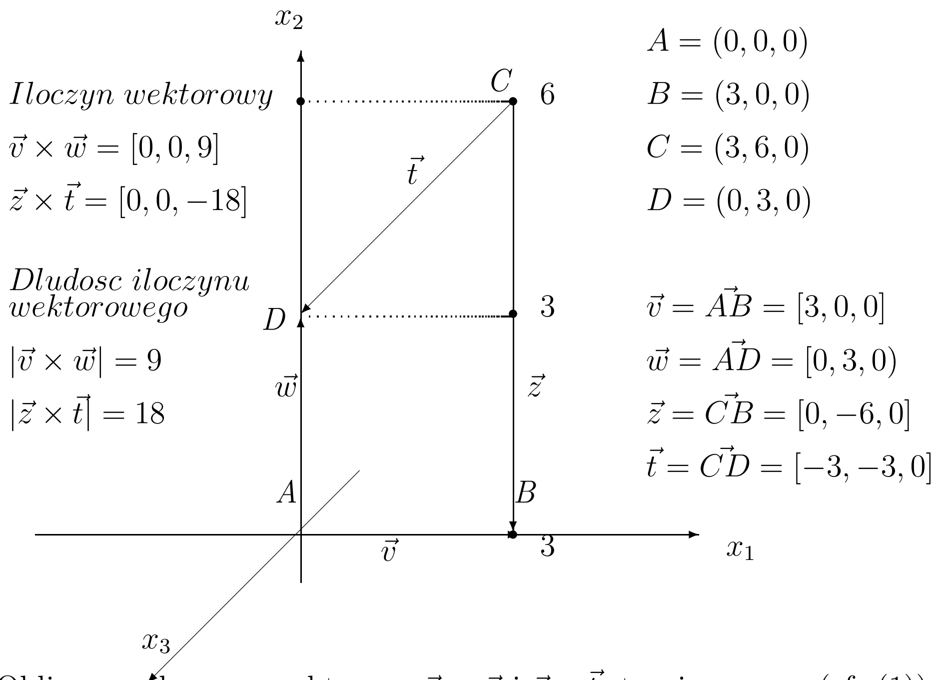
$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{z} \times \vec{t} \tag{2}$$

Przykład 0.1 *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [3, 0, 0] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [0, 3, 0] = \vec{AD},$$

$$\vec{z} = [0, -6, 0] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [-3, -3, 0] = \vec{CD}$$

[2]Pole czworokąta wklęsłego równe jest różnicy iloczynów wektorowych $P_{ABCD} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{w} - \frac{1}{2}\vec{z} \times \vec{t}$



Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{z} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (1))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0*0-3*0, -(3*0-0*0), 3*3-0*0] \\ &= [0,0,9] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{z} \times \vec{t} &= [-6*0-3*0, -(0*0-3*0), 0*3-6*3] \\ &= [0,0,-18] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$ i $\vec{z}$, $\vec{t}$.
Mianowicie

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{z} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+9^2} + \frac{1}{2}|\sqrt{0^2+0^2+(-18)^2} \\ &= \frac{1}{2}*9 + \frac{1}{2}*18 \\ &= 4.5 + 9 = 13.5 \end{aligned}$$

[3]

Rozpatrzmy inny przykład obliczania pola czworokąta stosując iloczyn wektorowy.

[3] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 w przestrzeni kartezjańskiej R^3 obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

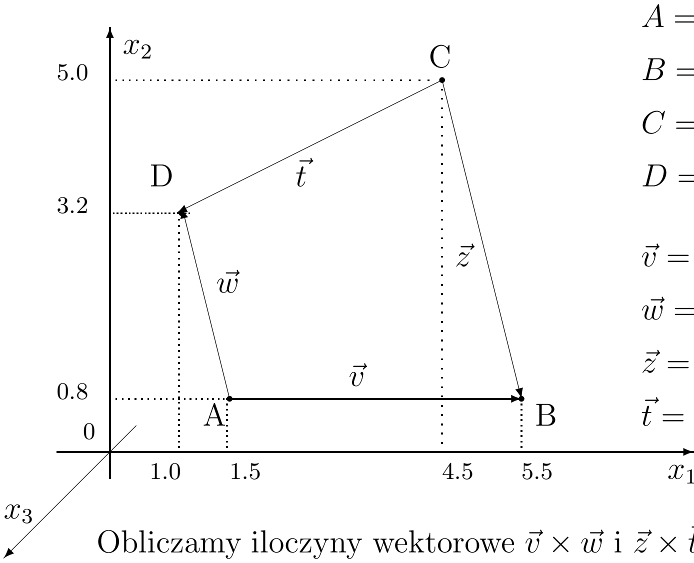
Przykład 0.2 *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [4.0, 0, 0] = \vec{AB},$$

$$\vec{w} = [-0.5, 2.4, 0] = \vec{AD},$$

$$\vec{z} = [-1.0, 4.2, 0] = \vec{CB},$$

$$\vec{t} = [-3.5, -1.8, 0] = \vec{CD}$$



$$A = (1.5, 0.8, 0)$$
$$B = (5.5, 0.8, 0)$$
$$C = (4.5, 5.0, 0)$$
$$D = (1.0, 3.1, 0)$$

$$\vec{v} = \vec{AB} = [4.0, 0, 0]$$
$$\vec{w} = \vec{AD} = [-0.5, 2.4, 0)$$
$$\vec{z} = \vec{CB} = [-1.0, 4.2, 0]$$
$$\vec{t} = \vec{CD} = [-3.5, -1.8, 0]$$

Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{z} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (1))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 0 * 2.4, -(4 * 0 + 0.5 * 0), 4 * 2.4 + 0.5 * 0] \\ &= [0, 0, 9.6] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{z} \times \vec{t} &= [4.2 * 0 + 1.8 * 0, -((-1) * 0 - (-3.5) * 0), 1 * 1.8 + 4.2 * 3.5] \\ &= [0, 0, 16.5] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$ i $\vec{z}$, $\vec{t}$.
Mianowicie

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{z} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 9.6^2} + \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 16.5^2} \\ &= \frac{1}{2} * 9.6 + \frac{1}{2} * 16.5 \\ &= 4.8 + 8.25 = 13.05 \end{aligned}$$

[4]

Zadanie 0.1 *Oblicz długości wektorẃ*

$$(i)\ \ \vec{v} = [3, 0, 4], \qquad \vec{w} = [8, -6, 0]$$

(ii) *Oblicz iloczyn wektorowy $\vec{v} \times \vec{w}$ wektorów*

$$\vec{v} = [3, 0, 4], \qquad \vec{w} = [8, -6, 0]$$

(iii) *Sprawdź, że wektory*

$$\vec{v} \perp \vec{w} \times \vec{w}$$

są prostopadłe.

Zadanie 0.2 *Sprawdź, że wektor*

$$\vec{w} = [w_1, w_2, 0]$$

jest prostopadły do wektora

$$\vec{v} \times \vec{w},$$

gdzie wektor

$$\vec{v} = [v_1, v_2, 0]$$

[4] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 w przestrzeni kartezjńskiej R^3 obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$