

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS  
02-892 WARSZAWA  
ul. BAŻANCIA 16

**TEMAT 2.1: O liczbach**

wymiernych i liczbach niewymiernych.

Ułamkach właściwych i ułamkach niewłaściwych

Tadeusz STYŚ

Wśród ułamków zwykłych wyróżniamy *ułamki właściwe* i *ułamki niewłaściwe*.  
*Ułamkami właściwymi* nazywamy ułamki

$$\frac{\overbrace{p}^{\text{licznik}}}{\underbrace{q}_{\text{mianownik}}}, \quad p < q \quad q \neq 0$$

w których licznik  $p$  jest mniejszy od mianownika  $q$ .

*Ułamkami niewłaściwymi* nazywamy ułamki

$$\frac{\overbrace{p}^{\text{licznik}}}{\underbrace{q}_{\text{mianownik}}}, \quad p > q \quad q \neq 0$$

w których licznik  $p$  jest większy od mianownika  $q$ .

# Contents

<b>1</b>	<b>Liczby wymierne i liczby niewymierne. Ułamki</b>	<b>3</b>
1.1	Ułamki zwykłe . . . . .	3
1.1.1	Przykłady . . . . .	4
1.1.2	Zadania . . . . .	5
1.2	Dodawanie ułamków . . . . .	5
1.2.1	Przykłady . . . . .	5
1.2.2	Zadania . . . . .	6
1.3	Odejmowanie ułamków . . . . .	6
1.3.1	Przykłady . . . . .	6
1.3.2	Zadania . . . . .	7
1.4	Mnożenie ułamków . . . . .	7
1.4.1	Przykłady . . . . .	8
1.4.2	Zadania . . . . .	8
1.5	Dzielenie ułamków . . . . .	8
1.5.1	Przykłady . . . . .	8
1.5.2	Zadania . . . . .	8

# Chapter 1

## Liczby wymierne i liczby niewymierne. Ułamki

### 1.1 Ułamki zwykłe

Iloraz dwóch liczb całkowitych  $p$  i  $q$

$$\frac{\overbrace{p}^{\text{licznik}}}{\underbrace{q}_{\text{mianownik}}}, \quad q \neq 0$$

nazywamy ułamkiem zwykłym, gdzie liczba  $p$  jest licznikiem ułamka zwykłego, a liczba  $q \neq 0$  zawsze różna od zera jest mianownikiem ułamka zwykłego.

Na przykład ułamek zwykły

$$\frac{\overbrace{5}^{\text{licznik}}}{\underbrace{8}_{\text{mianownik}}}$$

ma licznik  $p = 5$  i mianownik  $q = 8$ .

Zauważmy, że liczniki ułamków zwykłych

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$$

równe są 1. Natomiast mianowniki tych ułamków są kolejnymi liczbami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Natomiast niżej podane ułamki mają różne liczniki i różne mianowniki.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{9}{7}, \frac{11}{8}, \frac{10}{9}, \frac{11}{10}, \frac{12}{11}, \frac{13}{12}$$

Wśród ułamków zwykłych wyróżniamy *ułamki właściwe* i *ułamki niewłaściwe*.

*Uławkami właściwymi* nazywamy ułamki

$$\frac{\overbrace{p}^{\text{licznik}}}{\underbrace{q}_{\text{mianownik}}}, \quad p < q \quad q \neq 0$$

w których licznik  $p$  jest mniejszy od mianownika  $q$ .  
Podobnie *Uławkami niewłaściwymi* nazywamy ułamki

$$\frac{\overbrace{p}^{\text{licznik}}}{\underbrace{q}_{\text{mianownik}}}, \quad p > q \quad q \neq 0$$

w których licznik  $p$  jest większy od mianownika  $q$ .  
Ułamki niewłaściwe piszemy również w postaci *liczb mieszanych* wyróżniając część całkowitą  
Na przykład ułamek niewłaściwy

$$\frac{5}{2}$$

piszemy umownie w postaci liczby mieszanej  $2\frac{1}{2}$ , ponieważ

$$\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

### 1.1.1 Przykłady

**Przykład 1.1** *Zamień ułamek niewłaściwy*

$$\frac{9}{4}$$

na liczbę mieszaną

Wylączając całość z tego ułamka, wykonaj dzielenie

$$9 : 4 = 2 + \frac{2}{4} = 2 + \frac{1}{2}$$

Skąd ułamek niewłaściwy  $\frac{9}{4}$  równy jest liczbie mieszanej  $2\frac{1}{2}$ , piszemy

$$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{2}$$

**Przykład 1.2** *Zamień liczbę mieszaną*

$$1\frac{3}{4}$$

na ułamek niewłaściwy

Dany ułamek niewłaściwy piszemy jako sumę całości liczby mieszanej 1 dodać ułamek  $\frac{3}{4}$ , jak  
niżej

$$1\frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4+3}{4} = \frac{7}{4}$$

Skąd liczba mieszana  $1\frac{3}{4}$  równa jest ułamkowi niewłaściwemu  $\frac{7}{4}$ , piszemy

$$1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

### 1.1.2 Zadania

**Przykład 1.3** Zamień liczbę mieszaną

$$5\frac{7}{10}$$

na ułamek niewłaściwy

**Przykład 1.4** Zamień ułamek niewłaściwy

$$\frac{45}{12}$$

na liczbę mieszaną

**Przykład 1.5** Zamień ułamek niewłaściwy

$$\frac{35}{4}$$

na liczbę mieszaną

## 1.2 Dodawanie ułamków

*Dodawanie ułamków o tych samych mianownikach.* Ułamki o tych samych mianownikach dodajemy liczniki zostawiamy ten sam mianownik.

### 1.2.1 Przykłady

**Przykład 1.6** Dodaj ułamki

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} &= \frac{1+1+1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} &= \frac{1+1+1+1}{4} = \frac{4}{4} = 1\end{aligned}$$

**Przykład 1.7** Dodaj ułamki

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{3}{2} &= \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} &= \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} &= \frac{1+2+3+5}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}\end{aligned}$$

*Dodawanie ułamków o różnych mianownikach.* Żeby dodać ułamki o różnych mianownikach należy znaleźć wspólny mianownik. Może to być najmniejsza wspólna wielokrotność mianowników.

**Przykład 1.8** Dodaj ułamki

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

wspólna wielokrotność 2 i 3 równa 6

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{24}{60} = \frac{20+15+24}{60} = \frac{59}{60}$$

wspólna wielokrotność 3, 4 i 5 równa 60

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{5}{20} + \frac{12}{20} = \frac{5+12}{20} = \frac{17}{20}$$

wspólna wielokrotność 4 i 5 równa 20

## 1.2.2 Zadania

**Zadanie 1.1** Zamień ułamek niewłaściwy

$$\frac{24}{5}$$

na liczbę mieszaną

**Zadanie 1.2** Zamień liczbę mieszaną

$$5\frac{4}{9}$$

na ułamek niewłaściwy

## 1.3 Odejmowanie ułamków

*Odejmowanie ułamków o tych samych mianownikach.* Ułamki o tych samych mianownikach odejmujemy w następujący sposób: odejmujemy liczniki i zostawiamy ten sam mianownik

### 1.3.1 Przykłady

**Przykład 1.9** Odejmij ułamki

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} - \frac{1}{2} &= \frac{1-1}{2} = 0 \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3} &= \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} \\ \frac{4}{5} - \frac{2}{5} - \frac{1}{5} &= \frac{4-2-1}{5} = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

**Przykład 1.10** Dodaj ułamki

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{3}{2} &= \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} &= \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} &= \frac{1+2+3+5}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}\end{aligned}$$

**Przykład 1.11** *Odejmij ułamki*

$$\begin{aligned}\frac{7}{9} - \frac{1}{9} &= \frac{7-1}{9} = \frac{6}{9} \\ \frac{13}{20} - \frac{5}{20} + \frac{3}{20} &= \frac{13-5+3}{20} = \frac{12}{20} \\ \frac{37}{50} - \frac{23}{50} &= \frac{37-23}{50} = \frac{14}{50}\end{aligned}$$

*Odejmowanie ułamków o różnych mianownikach.* Odejmując ułamki o różnych mianownikach należy znaleźć wspólny mianownik. Może to być najmniejsza wspólna wielokrotność mianowników.

**Przykład 1.12** *Odejmij ułamki*

$$\frac{5}{9} - \frac{1}{3} = \frac{5-3*1}{9} = \frac{2}{9}$$

*wspólna wielokrotność; 9 i 3 równa 9*

$$\frac{33}{25} - \frac{21}{50} = \frac{2*33-21}{50} = \frac{45}{50} = \frac{9}{10}$$

*wspólna wielokrotność 25 i 50 równa 50*

$$\frac{14}{15} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{14-3*2+5*2}{15} = \frac{14-6+10}{15} = \frac{18}{15}$$

*wspólna wielokrotność 15 5 i 3 równa 15*

$$\frac{253}{500} - \frac{126}{1000} = \frac{2*253-126}{1000} = \frac{506-126}{1000} = \frac{380}{1000}$$

*wspólna wielokrotność 500 i 1000 równa 1000*

### 1.3.2 Zadania

**Zadanie 1.3** *Odejmij ułamki*

(a)  $\frac{5}{9} - \frac{2}{9}$

(b)  $\frac{12}{5} - \frac{7}{5}$

**Zadanie 1.4** *Odejmij ułamki*

(a)  $\frac{15}{4} - \frac{3}{8}$

(b)  $\frac{43}{6} - \frac{23}{7}$

## 1.4 Mnożenie ułamków

Operacja mnożenia ułamków jest bardzo prosta.

Ułamek  $\frac{p}{q}$ ,  $q \neq 0$  mnożymy przez ułamek  $\frac{s}{t}$ ,  $s \neq 0$  według schematu:

licznik razy licznik, mianownik razy mianownik

$$\frac{p}{q} * \frac{s}{t} = \frac{p*s}{q*t}, \quad q \neq 0, \quad t \neq 0$$

### 1.4.1 Przykłady

**Przykład 1.13** *Oblicz wartość wyrażień arytmetycznych*

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{2}{3} * \frac{4}{5} = \frac{2 * 4}{3 * 5} = \frac{8}{15} \\ (b) \quad & \frac{2}{3} * \frac{(-4)}{5} = \frac{2 * (-4)}{3 * 5} = -\frac{8}{15} \\ (c) \quad & \frac{10}{13} * \frac{21}{25} = \frac{10 * 21}{13 * 25} = \frac{210}{273} \end{aligned}$$

### 1.4.2 Zadania

**Zadanie 1.5** *Pomnóż ułamki*

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{5}{3} * \frac{4}{5} \\ (b) \quad & \frac{7}{9} * \frac{3}{5} \end{aligned}$$

## 1.5 Dzielenie ułamków

Operacja dzielenia ułamków jest bardzo prosta.

Ułamek  $\frac{p}{q}$ ,  $q \neq 0$  dzielimy przez ułamek  $\frac{s}{t}$ ,  $s \neq 0$  według schematu:

licznik razy mianownik, mianownik razy licznik

$$\frac{p}{q} : \frac{s}{t} = \frac{p * t}{q * s}, \quad q, s \neq 0, \quad p, t \neq 0$$

### 1.5.1 Przykłady

**Przykład 1.14** *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznych*

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} * \frac{5}{4} = \frac{2 * 5}{3 * 4} = \frac{10}{12} \\ (b) \quad & \frac{-5}{9} : \frac{1}{3} = \frac{(-5) * 3}{9 * 1} = \frac{-15}{9} \\ (c) \quad & \frac{10}{13} : \frac{21}{25} = \frac{10 * 25}{13 * 21} = \frac{250}{273} \end{aligned}$$

### 1.5.2 Zadania

**Zadanie 1.6** *Podziel ułamki*

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{5}{4} : \frac{4}{5} \\ (b) \quad & -\frac{15}{3} : \frac{18}{5} \\ (c) \quad & \frac{135}{4} : \left(-\frac{5}{48}\right) \\ (d) \quad & -\frac{48}{7} : \left(-\frac{16}{3}\right) \end{aligned}$$