SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

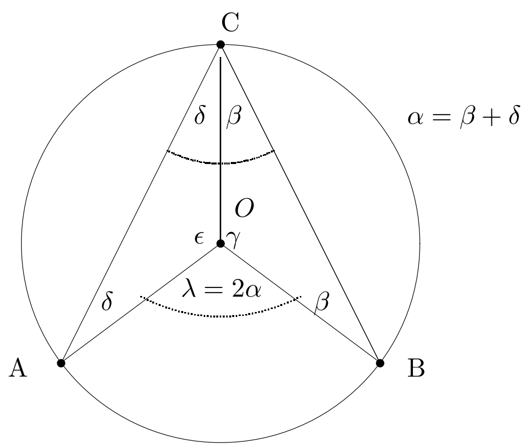
TEMAT: GEOMETRIA

Planimetria i Stereometria

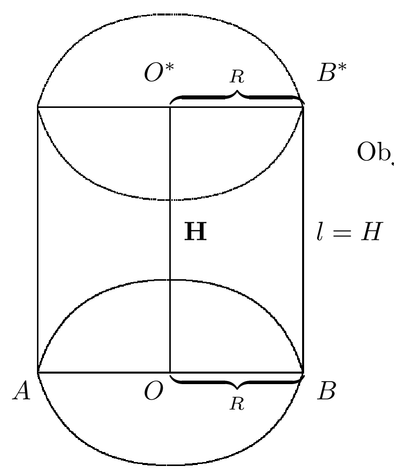
Kąt wpisany $\angle BOA = 2\angle BCA$ kcąt środkowy

Twierdzenie 0.1 *Kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany w okrąg jest dwa razy większy od kąta wpisanego. Zatem mamy równość*

$$\angle BCA = \alpha, \qquad \angle BOA = 2\alpha$$



Walec pole powierzchni calkowitej walca$P_{pole} = 2\pi R^2 + \pi * R^2 * H$



Objetosc waleca $V = \pi R^2 * H$

Tadeusz STYŠ Warszawa czerwiec 2023

Contents

Chapter 1

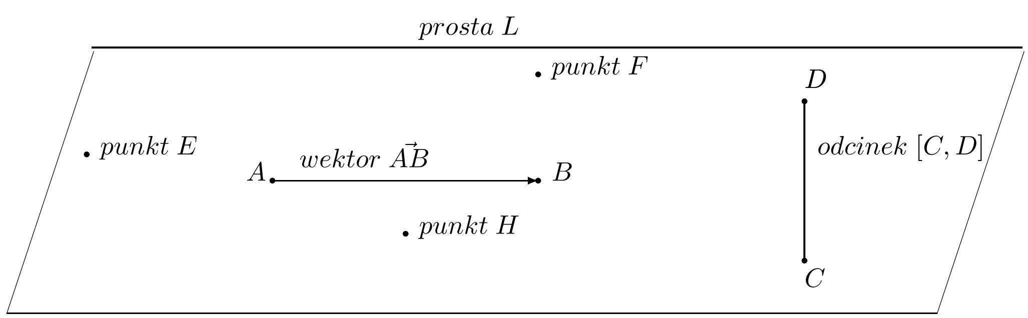
Geometria płaska. Planimetria

1.1 Wstęp

Geometria Euklidesowa, która obejmje geometrię płaską i geometrie przestrzenną wchodzi do podstawy programu nauczania na poziomie podstawowym i średnim. W szkole podstawowej do programu rozszerzonnego matematyki wchodzą tylko niektóre tematy wsparte ćwiczeniami, które są opisane w tym rozdziale.
Zakres geometrii płaskiej obejmuje konstrukcje z linijką i cyrklem figur płaskich oraz związki miarowe w trójkątach, prostokątach, równoległobokach, w okręgach i w wielokątach foremnych.

1.2 Punkty, odcinki i wektory na płaszczyźnie

Punkty, proste i płaszczyzny są pojęciami pierwotnymi, nie wymagają definicji. Punkt rozumiany jest jako figura geometryczna bezwymiarowa. Prosta to przestrzeń euklidesowa jednowymiarowa, która składa się z punktów współliniowych. Podobnie płszczyzna tworzy przestrzeń euklidesową złożoną z punktów współpłaszczyznowych. Punkty położone na prostej lub na płaszczyźnie oznaczamy dużymi literami $A, B, C, ...$; Odcinek o początku w punkcie A i końcu w punkcie B oznaczamy symbolem $[A, B]$. Długość odcinka $[A, B]$ o początku A i końcu B oznaczamy symbolem $|AB|$.
Wektorem o paczątku w punkcie A i końcu w punkcie B nazywamy odcinek skierowany $\vec{AB}$ o zwrocie od A do B. Długość wektora $|\vec{AB}|$ równa jest długości odcinka $|AB|$.



1.3 Położenie fiugur geometrycznych na płaszczyźnie.

Położenie figur geometrycznych na płaszczyźnie określamy we współrzędnych kartezjńskich. W kartezjańskim układzie współrzędnych współrzędne punktów

$$A = (a_1, a_2) \quad i \quad B = (b_1, b_2)$$

piszemy w nawiasach zwykłych. Natomiast wektor

$$\vec{AB} = [a_2 - a_1, b_2 - b_1]$$

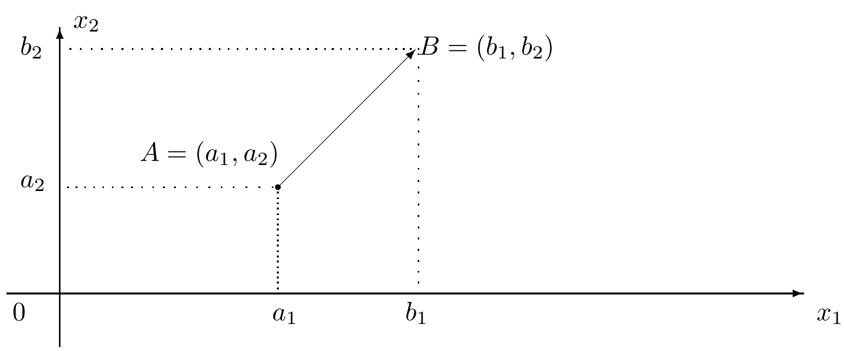
o współrzędnych różnicy współrzędnych punktów A i B piszemy w nawiasach kwadratowych.

Przykład 1.1 *Niech punkty* $A = (3, 1.5)$ *i* $B = (5, 3.5)$ *tworzą wektor* $\vec{AB}$ *o puczątku* A *i końcu* B. *Wtedy wektor*

$$\vec{AB} = [5 - 3, 3.5 - 1.5] = [2, 2]$$

ma współrzędne $x_1 = 2,\ \ x_2 = 2$.

Kartetezjański układ współrzędnych



1.3.1 Operacje arytmetyczne na punktach

Dodawanie punktów. Suma dwóch punktów

$$A = (a_1, a_2) \quad i \quad B = (b_1, b_2)$$

równa jest punktowi

$$P = (p_1, p_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

o współrzędnych $p_1 = a_1 + b_1 \quad i \quad p_2 = a_2 + b_2$.

Przykład 1.2 *Oblicz sumę punktów*

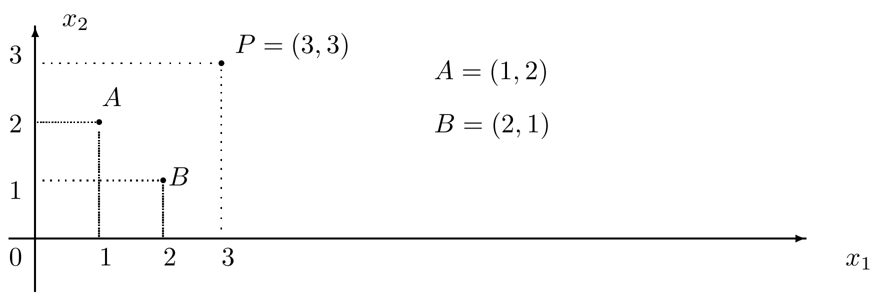
$$A = (1, 2) \quad i \quad B = (2, 1)$$

Rozwiązanie. Suma

$$A + B = (1, 2) + (2, 1) = (1 + 2, 2 + 1) = (3, 3)$$

Odpowiedź: Sumą danych punktów $A = (1, 2)$ i $B = (2, 1)$ jest trzeci punkt $P = (3, 3)$. o współrzędnych $x_1 = 3,\ x_2 = 3$.
Niżej na rysunku podana jest geometryczna interpretacja sumy pnktów

$$A + B = (1, 2) + (2, 1)$$



Odejmowanie punktów. Różnica dwóch punktów

$$A = (a_1, a_2) \quad i \quad B = (b_1, b_2)$$

równa jest punktowi $P = (p_1, p_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$
o współrzędnych $p_1 = a_1 - b_1 \quad i \quad p_2 = a_2 - b_2$.

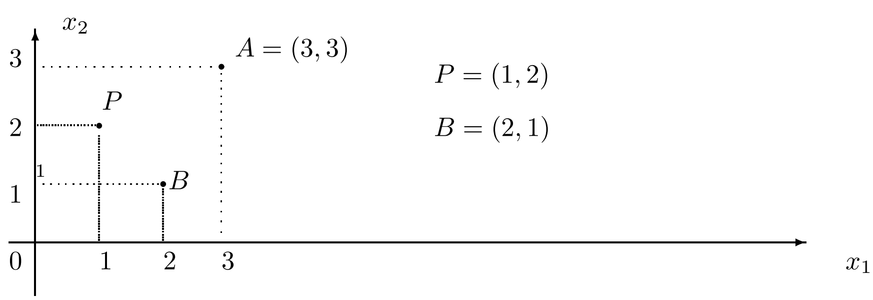
Przykład 1.3 *Oblicz różnicę punktów*

$$A = (1,2) \quad i \quad B = (2,1)$$

Rozwiązanie. Różnica

$$A - B = (3,3) - (2,1) = (3-2, 3-1) = (1,2)$$

Odpowiedź: Różnicą danych punktów $A = (3,3)$ i $B = (2,1)$ jest punkt $P = (1,2)$.



1.3.2 Wektory na płaszczyźnie

Niech dane będą punkty $A = (a_1, a_2)$ i $B = (b_1, b_2)$.
Wektor $\vec{AB}$ o paczątku w punkcie $A = (a_1, a_2)$ i końcu w punkcie $B = (b_1, b_2)$ określamy jako różnica punktów

$$\vec{AB} = B - A = [b_1 - a_1, b_2 - a_2].$$

[2] [3] Na przykład wektor związany o początku w punkcie $A = (0,1)$ i końcu w punkcie $B = (2,0)$ ma współrzędne

$$\vec{AB} = b - a = (2,0) - (0,1) = [2, -1].$$

[1] Nie ma pojęcia iloczynu lub ilorazu punktów

[2] współrzędne v_1, v_2 wektora swobodnego $\vec{v} = [v_1, v_2]$ piszemy w nawiasach kwadrawtowych.

[3] Wektor swobodny określony jest przez jego długość, kierunek i zwrot, nie zależy od położenia na płaszczyźnie.

1.3.3 Operacje arytmetyczne na wektorach

Dodawanie wektorów
Suma dwóch wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2]$$

równa jest wektorowi

$$\vec{Q} = [z_1, z_2] = [v_1 + w_1, v_2 + w_2]$$

o współrzędnych $z_1 = v_1 + w_1 \quad i \quad z_2 = v_2 + w_2$.

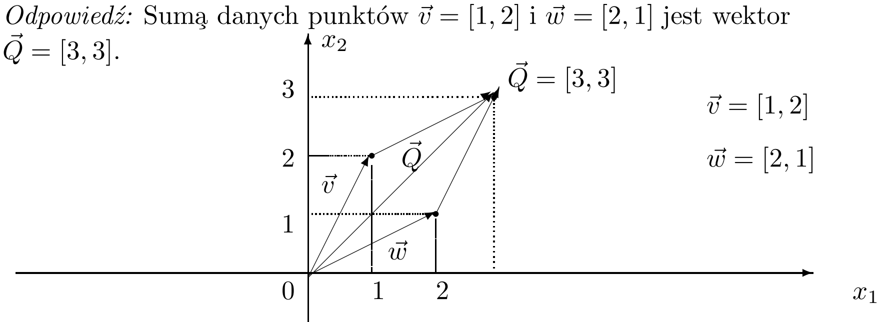
Przykład 1.4 *Oblicz sumę wektorów*

$$\vec{v} = [1, 2] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1]$$

Rozwiązanie. Suma

$$\vec{v} + \vec{w} = [1, 2] + (2, 1) = [1 + 2, 2 + 1] = [3, 3]$$

Odpowiedź: Sumą danych punktów $\vec{v} = [1, 2]$ i $\vec{w} = [2, 1]$ jest wektor $\vec{Q} = [3, 3]$.



Odejmowanie wektorów
Różnica dwóch wektorów $\vec{v} = [v_1, v_2] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2]$ równa jest wektorowi

$$\vec{Q} = [z_1, z_2] = \vec{v} - \vec{w} = [v_1 - w_1, v_2 - w_2]$$

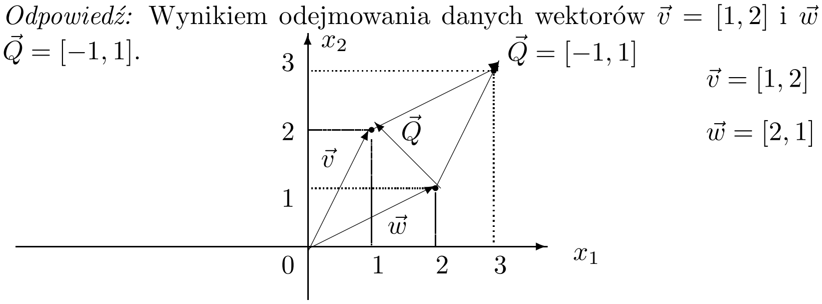
o współrzędnych $z_1 = v_1 - w_1 \quad i \quad z_2 = v_2 - w_2$.

Przykład 1.5 *Oblicz różnice wektorów* $\vec{v} = [1, 2] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1]$

Rozwiązanie. Oblkiczamy różnicę wektorów

$$\vec{v} - \vec{w} = [1, 2] - [2, 1] = [1 - 2, 2 - 1] = [-1, 1]$$

Odpowiedź: Wynikiem odejmowania danych wektorów $\vec{v} = [1, 2]$ i $\vec{w} = [2, 1]$ jest wektor $\vec{Q} = [-1, 1]$.



1.3.4 Iloczyn skalarny wektorów

[4] Iloczyn skalarny wektorów jest ważną operacją na wektorach stosowaną w matematyce stosowanej, w fizyce, chemii i w innych przedmiotach ścisłych.

Defimnicja 1.1 *Iloczynem skalarnym wektorów* $\vec{v} = [v_1, v_2]$ *i* $\vec{w} = [w_1, w_2]$ *nazywamy liczbę*

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2 \tag{1.1}$$

Wartość iloczynu skalarnego wektorów nie jest wektorem, natomiast jest liczbą

Przykład 1.6 *Oblicz iloczyn skalarny wektorów*

$$\vec{v} = [2, 5] \qquad i \qquad \vec{w} = [7, 3].$$

Rozwiązanie. Stosując wzór (1.1) obliczamy iloczyn skalarny danych wektorów, piszemy

$$(\vec{v}, \vec{w}) = ([2, 5] * [7, 3]) = 2 * 7 + 5 * 3 = 14 + 15 = 29.$$

Odpowiedź: Wartość iloczynu skalarnego danych wektorów $\vec{v} = [2, 5]$ i $\vec{w} = [7, 3]$ jest liczbą 29, piszemy

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 29.$$

Iloczyn skalarny wektorów zachowuje wszystkie własności operacji mnożenia.
Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2] \qquad i \qquad \vec{w} = [w_1, w_2]$$

- iloczn skalarny jest przemienny

  $$(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{v})$$

  Istotnie, sprawdzamy, że

  $$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2 = w_1 * v_1 + w_2 * v_2 = (\vec{w}, \vec{v})$$

- mnożenie skalarne wektorów jest rozdzielne względem dodawania

  $$(\vec{v}, (\vec{w} + \vec{Q})) = (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{Q})$$

  Istotnie sprawdzamy, że

  $$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w} + \vec{Q}) &= v_1 * (w_1 + z_1) + v_2 * (w_2 + z_2) \\ &= v_1 * w_1 + v_1 * z_1 + v_2 * w + 2 + v_2 * z_2 \\ &= \underbrace{v_1 * w_1 + v_2 * w_2}_{(\vec{v}, \vec{w}} + \underbrace{v_1 * z_1 + v_2 * z_2}_{(\vec{v}, \vec{Q})} \\ &= (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{Q}) \end{aligned}$$

- Iloczyn skalarny wektora $\vec{v}$ przez siebie równy jest kwadratowi jego długości

  $$(\vec{v}, \vec{v}) = v_1 * v_1 + v_2 * v_2 = v_1^2 + v_2^2 = |\vec{v}|^2$$

[4] Wielokość skalarna to znaczy jej wartość jest liczbą

Teraz podamy twierdzenie ważne w zastosowniach.

Twierdzenie 1.1 *Wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, jeżeli ich iloczyn skalarny równy jest zero, piszmy*

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Longleftrightarrow (\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Dowód. Istnieje kilka dowodów tego twierdzenia. Tutaj podamy dowód oparty na twierdzeniu Pitagorasa. Mianowicie, udowodnimy, że trójkąt o ramionach $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Obliczamy kwadrat długości różnicy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$

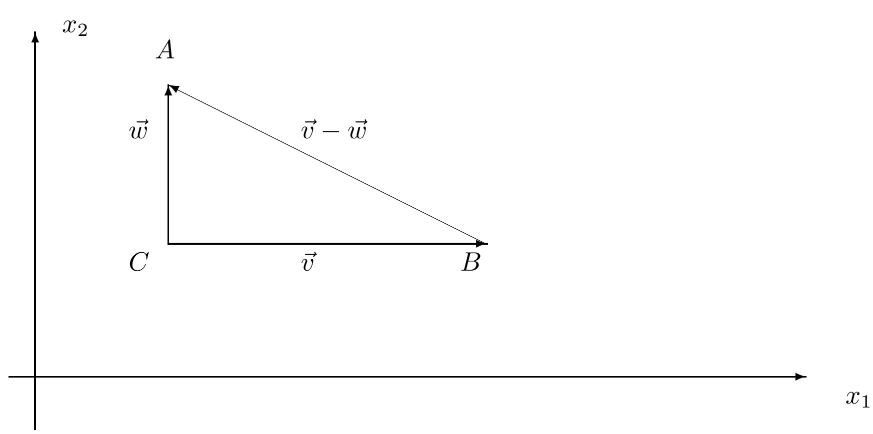
$$\begin{aligned} |\vec{v} - \vec{w}|^2 &= (\vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) \\ &= (\vec{v}, \vec{v}) - 2(\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{w}) \\ &= |\vec{v}|^2 - 2(\vec{v}, \vec{w}) + |\vec{w}|^2 \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeżeli iloczyn skalarny jest równy zero

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

to boki trójkąta ΔABC

$$|AB| = |\vec{v}|, \qquad |AC| = |\vec{w}|, \qquad |BC| = |\vec{v} - \vec{w}|$$



spełniają równość

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = |v \vec{-} w|^2 \tag{1.2}$$

wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Z drugiej strony suma kwadratów dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości boku trzeciego wtedy i tylko wtedy, jeżeli ten trójkąt jest prostokątny.
Zatem kąt $\angle ACB$ pomiędzy wektorami $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest prosty wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny tych wektorów równy jest zero.
Koniec dowodu.
Zauważmy, że iloczyn skalarny wektorów jest związany z twierdzeniem Pitagorasa, Istotnie, warunek prostopadłości wektorów [5] [6]

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

jest równoważny z tezą twierdzenia Pitagorasa o trójkącie prostokątnym.

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = |v \vec{-} w|^2.$$

Przykład 1.7 *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [6, 8], \qquad \vec{w} = [9, 12].$$

Rozwiązanie. Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzór (1.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [6, 8], \qquad i \qquad \vec{w} = [w_1, w_2] = [9, 12]$$

Zatem iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 6 * 9 + 8 * 12 = 54 + 96 = 150.$$

równy jest 100.
Wiemy, że kwadrat długości wektora $\vec{v} = [6, 8]$ jest równy iloczynowi skalarnemu tego wektora przez siebie.

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = 6 * 6 + 8 * 8 = 36 + 64 = 100$$

Skąd długość wektora

$$|\vec{v}| = \sqrt{100} = 10.$$

Podobnie obliczamy długość wektora $\vec{w} = [9, 12]$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(\vec{w}, \vec{w})} = \sqrt{9 * 9 + 12 * 12} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15.$$

Przykład 1.8 *Dla jakiej wartości parametru m wektory*

$$\vec{v} = [m, 6], \qquad \vec{w} = [3, 2].$$

są prostopadłe?

Rozwiązanie. Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzór (1.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [m, 6], \qquad i \qquad \vec{w} = [w_1, w_2] = [3, 2]$$

Wektory są prostopadłe jeżeli ich iloczyn skalarny równy jest zero. Obliczamy iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = m * 3 + 6 * 2 = 3m + 12 = 0.$$

[5] Wartość iloczynu skalarnego wektorów nie jest wektorem, natomiast jest liczbą.
[6] Zauważmy, że znikanie iloczynu skalarnego $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym prostopadłości wektorów $\vec{v}, \vec{w}$, w symbolach piszemy $\vec{v} \perp \vec{w} \iff (\vec{v}, \vec{w}) = 0$.

Skąd iloczyn skalarny równy jest zero

$$6m + 12 = 0, \quad dla \quad m = -\frac{12}{3} = -4.$$

Istotnie sprawdzamy, że dla $m = -4$ iloczyn skalarny wektora $\vec{v} = [m, 6]$ przez wektor $\vec{w} = [3, 2]$ równy jest zero

$$(\vec{v}, \vec{w}) = -4 * 3 + 6 * 2 = 0$$

Odpowiedź: Wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [m, 6], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2] = [3, 2]$$

są prostopadłe dla parametru $m = -4$.

Zadanie 1.1 *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [12, 16], \quad \vec{w} = [15, 20].$$

Zadanie 1.2 *Dla jakiej wartości parametru m wektory*

$$\vec{v} = [m, 15], \quad \vec{w} = [5, 3].$$

są prostopadłe?

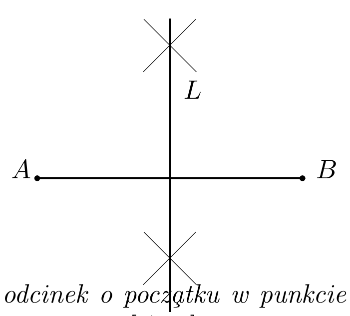
1.4 Konstrukcje podstawowe z cyrklem i linijką

Do konstrukcji podstawowych przy pomocy cyrkla i linijki zaliczamy tutaj [7]

- konstrukcja symetralnej danego odcinka,
- konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej, która przechodzi przez dany punkt poza prostą,
- konstrukcja dwusiecznej danego kąta,
- konstrukcja prostych równoległych,
- konstrukcja trójkąt o danch bokach,
- konstrukcja czworokąta o danych bokach.

1.4.1 Konstrukcja symetralnej odcinka.

Niech dany będzie odcinek $[A, B]$ o długości $a = |AB|$. Stawiamy cyrkiel w punkcie A i rozwartością cyrkla większą od połowy odcinka $[A, B]$ zakreślamy dwa łuki nad odcinkiem i pod odcinkiem. Rysujemy prostą L przez punkty przecięć łuków. Prosta L jest symetralną odcinka $[A, B]$.

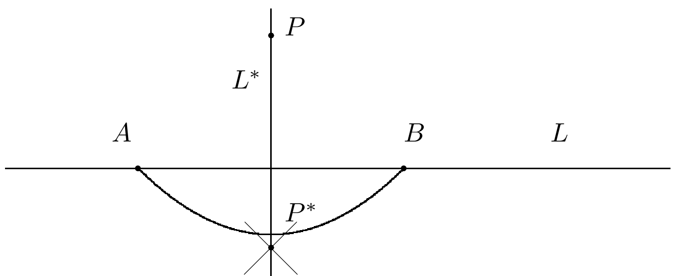


Zadanie 1.3 *Narusuj odcinek o początku w punkcie A długości 6cm i o końcu w punkcie B. poprowadź symetralną odcinka $[A, B]$ przy pomocy cyrkla i linijki.*

[7] Długość odcineka $[A, B]$ o początku A i końcu B oznaczamy symbolem $|AB|$

1.4.2 Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej

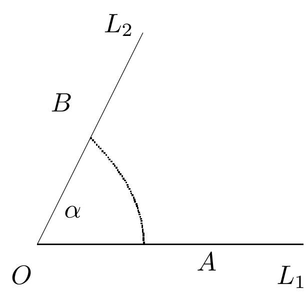
Niech dana będzie prosta L i punkt P. Stawiamy cyrkiel w danym punkcie P i zakreślamy łuk przeciający prostą L w punktach A i B. Stawiamy cyrkiel w punkcie A i zakreślamy łuk. Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie B i zakreślamy łuk. Punkt przecięcia łuków oznaczamy literą P^*. Przez punkty P^* i P rysujemy prostą L^*, jak na rysunku niżej.



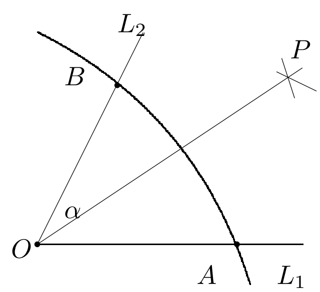
Zadanie 1.4 *Narusuj prostą L. Poprowadź prostą prostopadłą do prostej L przez dowolnie wybrany punkt P leżący poza prostą L, przy pomocy cyrkla i linijki.*

1.4.3 Konstrukcja dwusiecznej danego kąta

Niech będzie dany kąt α o wierzchołku w punkcie O i ramionach L_1 i L_2. [8]



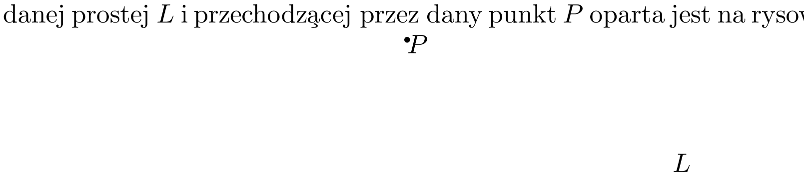
Stawiamy cyrkiel w wierzchołku O kąta α i zakreślamy łuk przecinający ramiona L_1 i L_2 w punktach A i B. Punkty A i B są równo odległe od punktu O, piszemy $|OA| = |OB|$. Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie A i zakreślamy łuk. Podobnie stawiammy cyrkiel w punkcie B i zakreślamy łuk. Punkt przecię cia łuków oznaczamy literą P. Przez punkty O i P prowadzimy dwusieczną kąta



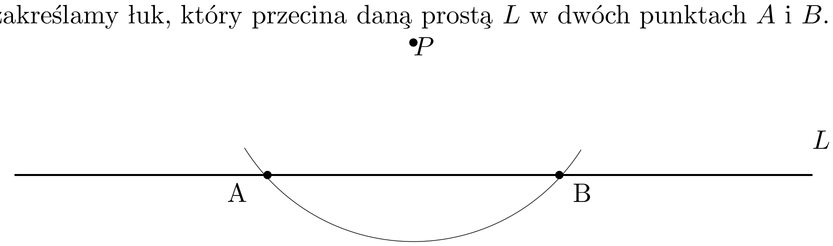
[8]Kąt α o wierzchołku O i ramionach L_1 i L_2 określonych przez punkty A i B oznaczamy symbolem $\angle AOB$

Zadanie 1.5 *Poprowadź dwusieczną kąta α danego niżej na rysunku przy pomocy cyrkla i linijki.*

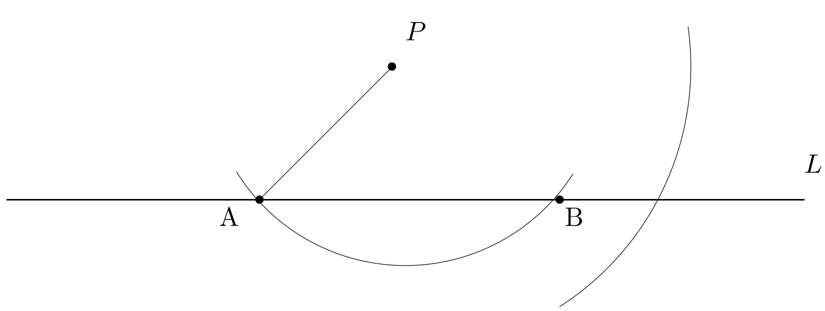
Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej L. Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej L i przechodzącej przez dany punkt P oparta jest na rysowaniu równoległoboku.



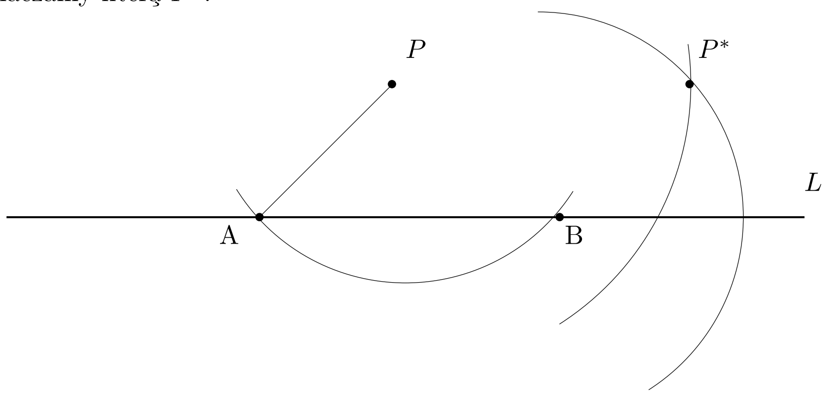
Opis konstrukcji. W pierwszym kroku konstrukcji stawiamy cyrkiel w danym punkcje P i zakreślamy łuk, który przecina daną prostą L w dwóch punktach A i B.



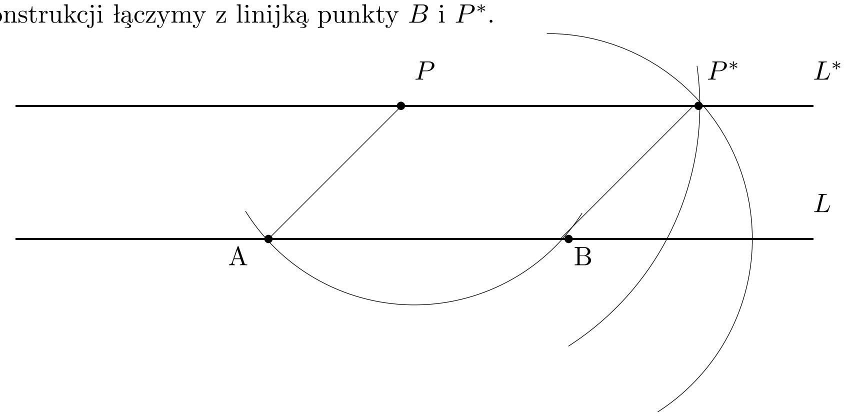
W drugim kroku konstrukcji łączymy punkt A przecięcia z danym punktem P linijką. Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie B i rozwartością cyrkla równą odległości $|AP|$ punktu A od punktu P zakreślamy łuk.



W trzecim kroku konstrukcji stawiamy cyrkiel w punkcie P i rozwartością cyrkla równą odległości $|AB|$ punktu A od punktu B zakreślamy drugi łuk. Punkt przecięcia łuków oznaczamy literą P^*.



W czwartym kroku konstrukcji, rysyjemy z linijką prostą przez punkty P i P^*. W końcu konstrukcji łączymy z linijką punkty B i P^*.

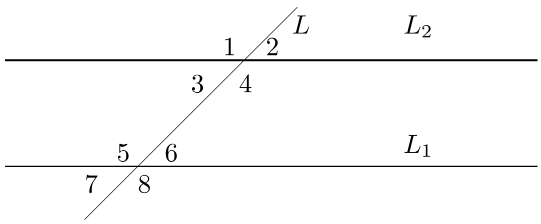


Widzimy, że w ten sposób narysowaliśmy równoległobok $ABPP^*$, którego bok $[P, P^*]$ leży na prostej L^* równoległej do prostej L przechodzącej przez dany punkt P.

Zadanie 1.6 *Narysuj prostą równoległą do prostej na rysunku i przechodzącej przez dany ponkt*

1.4.4 Dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą

Rozpatrzmy dwie proste równoległe L_1 i L_2 przecięte trzecią prostą L. Niżej na rysunku mamy zaznaczone kąty parami równe



Dwie linie proste równoległe L_1 i L_2 przecięte trzecią prostą L

- kąty wierzchołkowe parami równe

$$\angle\, 1 = \angle\, 4, \quad \angle\, 2 = \angle\, 3, \quad \angle\, 5 = \angle\, 8, \quad \angle\, 6 = \angle\, 7$$

- kąty odpowiadające parami równe

$$\angle\, 1 = \angle\, 5, \quad \angle\, 3 = \angle\, 7, \quad \angle\, 2 = \angle\, 6, \quad \angle\, 4 = \angle\, 8$$

- kąty naprzemianległe wewnętrzne parami równe

$$\angle\, 3 = \angle\, 6, \quad \angle\, 4 = \angle\, 5,$$

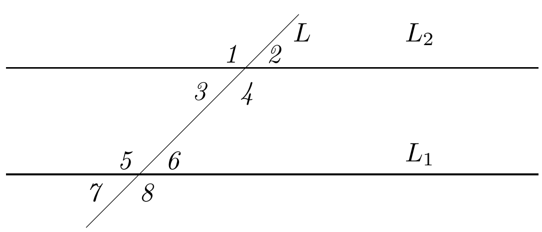
- kąty naprzemianległe zewnętrzne parami równe

$$\angle\, 1 = \angle\, 8, \quad \angle\, 2 = \angle\, 7,$$

- kąty przyległe, których suma równa jest 180^o

$\angle\, 1$ *przylega do* $\angle\, 2$, $\angle\, 3$ *przylego do* $\angle\, 4$, $\angle\, 1$ *przylega do* $\angle\, 3$,
$\angle\, 2$ *przylega do* $\angle\, 4$, $\angle\, 5$ *przylega do* $\angle\, 6$, $\angle 7$ *przylega do* $\angle\, 8$,
$\angle\, 5$ *przylega do* $\angle\, 7$, $\angle\, 6$ *przylega do* $\angle\, 8$

Zadanie 1.7 *Jeden z kątów wierzchołkowych równy jest* 30^0.



Dwie linie proste równoległe przecięte trzecią prostą

Oblicz wszystkie kąty
(a) wierzchołkowe
(b) naprzemian ległe
(c) odpowiadające
(d) przyległe wewnętrzne
(e) przyległe zewnętrzne
Zaznacz wartości wszystkich kątów na rysunku

1.5 Okrąg i koło

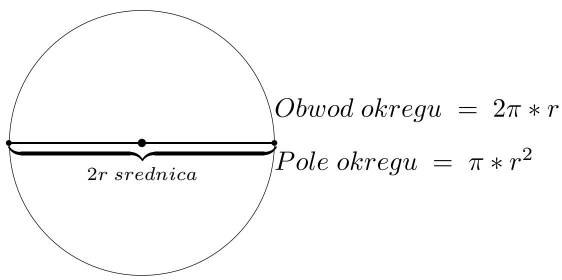
Obszar wewnątrz okręgu nazywamy kołem.

Obwód okręgu

$$O_{obwod} = 2 * \pi * r,$$

pole koła

$$P_{okregu} = \pi * r^2, \qquad \pi \approx \frac{314}{100} = 3.14.$$

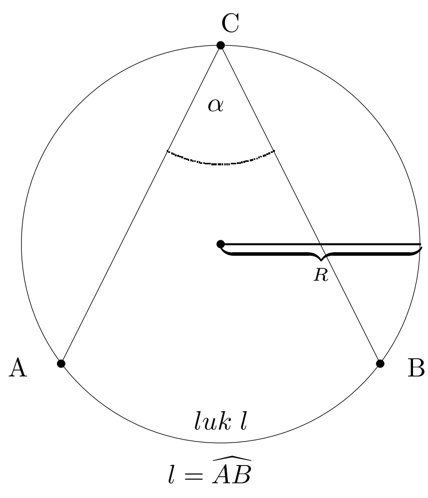


średnica okręgu równa jest 2 razy promień okręgu.

Zadanie 1.8 *Narysuj cyrklem okrąg o promieniu 3cm. Zaznacz kredką wnętrze okręgu jako koło o promieniu 3cm.*
Oblicz średnicę okręgu, obwód okręgu, pole koła.

1.5.1 Miara łukowa kąta

Rozpatrzmy okrąg o promieniu R



Miarę łukową kąta $\alpha = \angle BCA$ opartym na łuku $l = \widehat{AB}$ określamy jako stosunek długości łuku l do promienia R

$$\alpha = \frac{l}{R}$$

Kąt pełny, który w mierze kątowej ma 360^0 oparty jest na łuku

$$l = 2\pi * R$$

równym obwodowi okręgu.
Zatem miara łukowa kąta pełnego równa jest

$$\alpha = \frac{2\pi * R}{R} = 2\pi$$

Podobnie kąt półpełny, który w mierze kątowej ma 180^0 oparty jest na łuku

$$l = \pi * R$$

równym połowie obwodu okręgu. To znaczy, że miara łukowa kąta półpełnego równa jest

$$\alpha = \frac{\pi * R}{R} = \pi$$

Również kąt prosty, który w mierze kątowej ma 90^0 oparty jest na łuku

$$l = \frac{2\pi * R}{4} = \frac{\pi * R}{2}$$

równym czwartej części obwodu okręgu. To znaczy, że miara łukowa kąta prostego równa jest

$$\alpha = \frac{\pi * R}{2R} = \frac{\pi}{2}$$

W istocie, miara łukowa kąta nie zależy od długo
'sci promienia R. Dlatego możemy przyjąć promień okręgu $R = 1$.
Jednostką miary łukowej kąta jest 1 radian. Kąt pełny ma $2*\pi$ radianów, któremu w mierze kątowej odpowiada kąt 360^0. Zatem, jeden stopień

$$1^0 \ = \frac{2 * \pi}{360} = \frac{\pi}{180} radianow$$

natomiast

$$1\ radian = \frac{180^0}{\pi}\ \ stopni$$

Przykład 1.1 *Oblicz miarę łukową kąta* 30^0*.*
Rozwiązanie. *Korzytamy z proporcji, kątowi* 180^0 *odpowiada miara łukowa tego kąta* π *radianów. Zatema kątowi* 30^0 *odpowiada miara łukowa* x *radianów. Tą proporcję piszemy równaniem*

$$\frac{\pi}{180} = \frac{x}{30}$$

Skąd obliczamy miarę łukową kąta 30^0

$$x = \frac{30 * \pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

Zadanie 1.9 *Oblicz miarę łukwą kąta* α*, jeżeli jego miara kątowa równa jest*

$(i) \qquad \alpha = 30^0$

$(ii) \qquad \alpha = 60^0$

$(iii) \qquad \alpha = 120^0$

Zadanie 1.10 *Ile stopni ma kąt α, jeżeli jego miara łukowa równa jest*

$$(i) \qquad \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$(ii) \qquad \alpha = \frac{5\pi}{4}$$

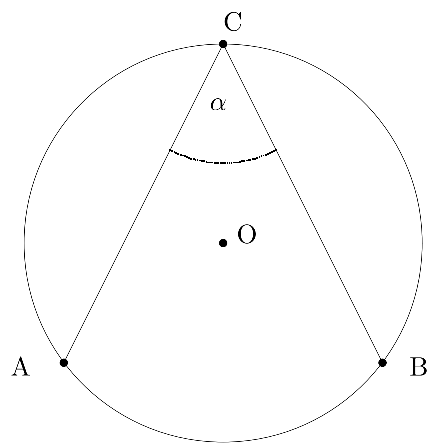
$$(iii) \qquad \alpha = \frac{4\pi}{3}$$

$$(iv) \qquad \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

$$(iii) \qquad \alpha = \frac{7\pi}{6}$$

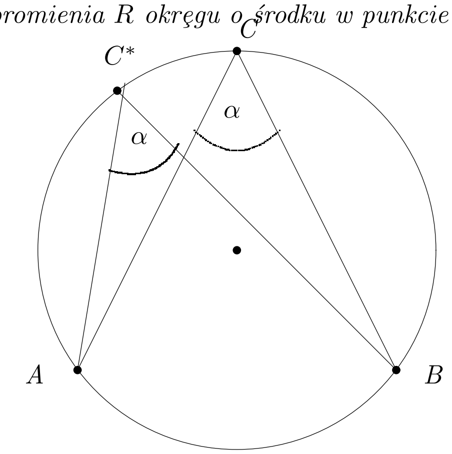
1.5.2 Kąt wpisany w okrąg i kąt środkowy

Kątem wpisanym w okrąg o promieniu R i środku w punkcie O nazywamy kąt α, którego wierzchołek C leży na okręgu a ramiona AC i BC przecinają okrąg w punktach A i B



Z określenia miary łukowej i miary kątowej wiemy, że wartość kąta wpisanego $\angle BCA = \alpha$ nie zależy od wielkości promienia R. Zatem zakładamy, że promień $R = 1$.

Lemma 1.1 *Wartość kąta $\angle BCA = \alpha$ wpisanego w okrąg jest stała niezależna od położenia wierzchołka C i promienia R okręgu o środku w punkcie O.*



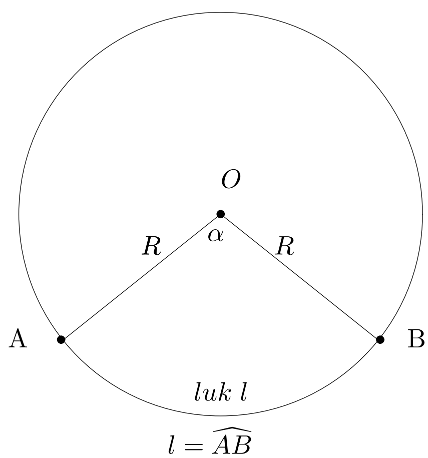
Położenie kąta $\angle BCA = \alpha$ wpisanego w okrąg w pozycji $C^* = \angle BC^*A = \alpha$, nie zmienia wartości α kąta wpiesanego w okrąg.
Istotnie kąt wpisany α o wierzchołku w punkcie C i o ramionach AC i BC przecina okrąg w punktach A i B. Kąt α oparty jest na łuku $l = \widehat{AB}$ radianów, w mierze kątowej równy jest

$$\alpha = \frac{l * \pi}{180^0}.$$

Jeżeli wierzchołek C porusza się po okręgu w kierunku punktu A to kąt wpisany $\alpha = \dfrac{l * \pi}{180^0}$, nie zmienia warotości, ponieważ długość łuku $l = \widehat{AB}$ pozostaje ta sama.
Jednak, jeżeli wierzchołek C pokryje się z punktem A to ramie AC zredukuje się do punktu A. Wtedy kąt wierzchołkowy α jest nieokreślony. Jeżeli wierzchołek C przekroczy punt A i dalej porusza się w kierunku punktu B to wtedy kąt wpisany α będzie oparty na łuku o długości $2\pi - l$, a jego miara kątowa

$$\alpha = \frac{(2\pi - l) * 180^0}{\pi}.$$

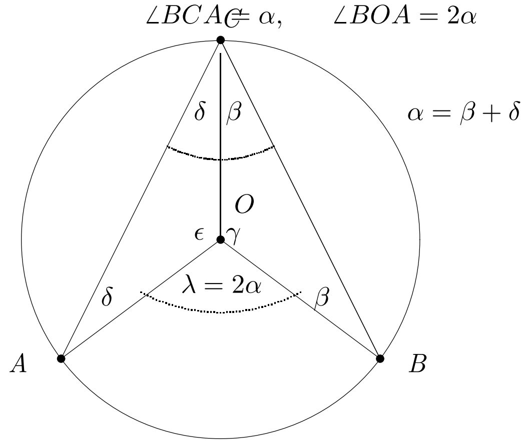
Kąt środkowy. Kątem środkowym nazywamy kąt pomiędzy promieniami okręgu $R = |AO|$ i $R = |BO|$ o wierzchołku w środku okręgu O.



1.5.3 Związek pomiędzy kątem środkowym i kątem wpisanym

Twierdzenie 1.2 *Kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany w okrąg jest dwa razy większy od kąta wpisanego. Zatem mamy równość*

$$\angle BCA = \alpha, \qquad \angle BOA = 2\alpha$$



Podamy dwa dowody twierdzenia o kącie wpisanym i kącie środkowym.
Dowód 1. Z lematu 1 wiemy, że wartość kąta wpisanego α nie zależy od położenia jego wierzchołka C na okręgu.
Zatem możemy przyjąć położenie wierzchołka C na średnicy okręgu przechodzącej przez wierzchołek C i środek okręgu O.
Promienie okręgu $AO,\ BO$ i CO tworzą trójkąty ΔAOC i ΔBCO równorammienne i przystające.
Zatem ich kąty $\beta,\ \gamma$ i kąt środkowy $\angle BOA = \lambda$ spełniają równania

$$\alpha = 2\beta,$$

$$\gamma + 2\beta = \pi$$

$$2\gamma + \lambda = 2\pi.$$

Skąd obliczamy kąt środkowy

$$\lambda = 2\pi - 2\gamma = 2\pi - 2\underbrace{(\pi - 2\beta)}_{\gamma} = 4\beta = 2\alpha.$$

Dowód 2. Najpierw dowód podamy w przypadku, gdy środek okręgu O leży pomiędzy ramionami AC i BC kąta wpisanego $\angle BCA = \alpha$, następnie w przypadku, gdy środek okręgu O leży poza ramionami kąta wpisanego.
W przypadku pierwszym zauważamy, że trójkąty równoramienne ΔAOC, ΔBCO o ramionach równych promieniowi okręgu R mają kąty przy podstawach kąty równe. Trójkąt ΔAOC ma przy podstawie AC kąty równe δ i trójkąt ΔBCO ma przy podstawie BC kąty równe β. Kąt wpisany $\angle BCA = \alpha$ oznaczamy literą grecką α, a kąt środkowy $\angle AOB$ oznaczamy literą grecką λ, jak na rysunku.
Następnie zauważamy, że kąty $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \lambda$ spełniają układ równań liniowych

$$\begin{aligned}
&\alpha = \beta + \delta, && \angle BCA\ wpisany\ \alpha \\
&2\beta + \gamma = \pi, && suma\ katow\ w\ trojkacie\ \Delta\ BCO\ rowna\ \pi \\
&2\delta + \epsilon = \pi, && suma\ katow\ w\ trokacie\ \Delta\ AOC\ rowna\ \pi \\
&\gamma + \epsilon + \lambda = 2\pi, && kat\ pelny\ rowny\ 2\pi
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Układ równań liniowych (1.3) rozwiążemy metodą podstawiania.
Mianowicie, z równanania drugiego i trzeciego w układzie (1.3) obliczamy

$$\gamma = \pi - 2\beta,$$
$$\epsilon = \pi - 2\delta$$

Skąd suma kątów

$$\gamma + \epsilon = 2\pi - 2(\beta + \delta)$$

Z równania czwartego w układzie równa(1.3) obliczamy kąt środkowy

$$\lambda = 2\pi - (\gamma + \epsilon) = 2\pi - \underbrace{(2\pi - 2(\beta + \delta))}_{\gamma+\epsilon} = 2\underbrace{(\beta + \delta)}_{\alpha} = 2\alpha$$

Zatem, obliczyliśmy, że kąt środkowy λ jest dwa razy większy od kąta wpisanego α, piszemy

$$\lambda = 2\alpha$$

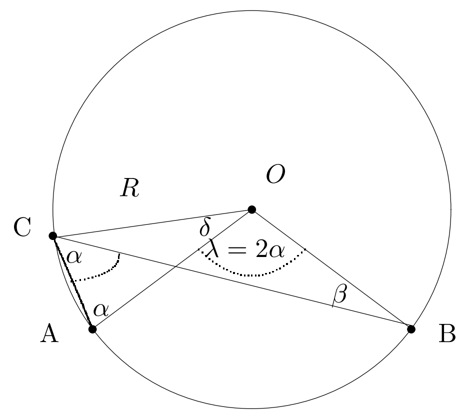
Koniec dowodu przypadku pierwszego.

Dowód. Dowód w przypadku drugim, gdy środek okręgu O leży poza ramionami AC i BC kąta wpisanego $\angle BCA = \alpha$.

$\angle OCA = \alpha + \beta$

$\angle CAO = \alpha + \beta$

$\angle AOC = \delta$



$|OB| = |OC| = |OA| = R$

Zauważamy, że trójkąty równoramienne ΔAOC i ΔBOC o ramionach równych promieniowi okręgu R mają przy podstawach $[AC]$ i $[CB]$ kąty równe, odpowiednio

$$\angle OCA = \angle CAO = \alpha + \beta \quad i \quad \angle CBO = \angle OCB = \beta.$$

Suma kątów w trójkątach ΔAOC i BOC równa jest 180^0 lub π, piszemy

$$\begin{array}{ll} \underbrace{\angle OCA + \angle CAO}_{2(\alpha+\beta)} + \underbrace{\angle AOC}_{\delta} = \pi & 2(\alpha+\beta) + \delta = \pi \\ \underbrace{\angle OBC + \angle OCB}_{2\beta} + \underbrace{\angle BOC}_{\delta+\lambda} = \pi & 2\beta + \delta + \lambda = \pi \end{array} \tag{1.4}$$

Układ równań liniowych (1.4) rozwiążemy metodą podstawiania.
Mianowicie, z pierweszgo równania obliczamy

$$\delta = \pi - 2(\alpha + \beta)$$

i podstawiamy do równania drugiego

$$2\beta + (\pi - 2(\alpha + \beta)) + \lambda = \pi, \qquad \lambda - 2\alpha = 0.$$

Skąd kąt środkowy $\angle BOA = 2\alpha$ jest dwa razy większy od kąta wpisanego $\angle OCA = \alpha$, piszemy

$$\lambda = 2\alpha$$

lub

$$\angle BOA = 2\angle OCA.$$

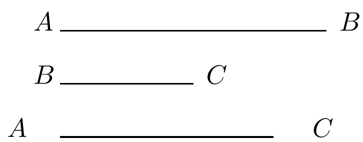
Koniec dowodu przypadku 2.

Wniosek: Kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest prosty, ma 90^0, w mierze łukowej ma $\dfrac{\pi}{2}$ radianów.

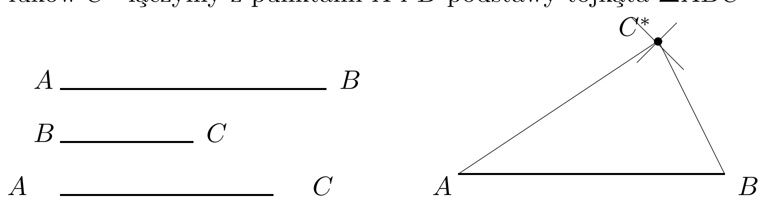
1.6 Trójkąty

1.6.1 Konstrukcja trójkąta o danych bokach

Niech będą dane trzy odcinki $[A, B]$, $[B, C]$, i $[A, C]$



Wybierzmy odcinek $[AB]$ jako podstawę trójkąta ΔABC. Rozwartością cyrkla równą dłu gości odcinka $[A, C]$ zakreślamy łuk stawiając cyrkiel w punkcie A. Następnie rozwartością cyrkla równą długości odcinka $[B, C]$ zakreślamy łuk stawiając cyrkiel w punkcie B. Punkt przecięcia łuków C^* łączymy z punktami A i B podstawy tójkąta ΔABC^* [9]



Zauważmy, że trójkąt można zbudować z odcinków, które spełniają następującą nierówność trójkąta
Suma długości dwóch boków trójkąta jest większa od długości boku trzeciego, piszemy

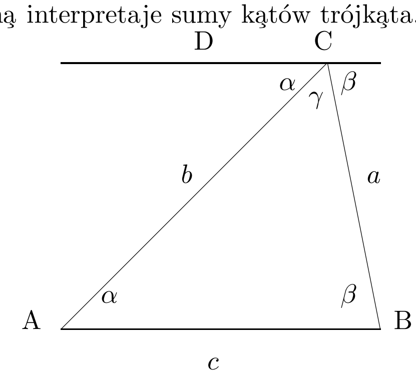
$$|AB| + |BC| \geq |AC|,$$

$$|AB| + |AC| \geq |BC|,$$

$$|AC| + |BC| \geq |AB|$$

1.6.2 Suma kątów trójkąta

Suma kątów każdego trójkąta równa jest 180^0, w mierze łukowej π radianów. Niżej rozpatrzmy geometryczną interpretaje sumy kątów trójkąta.



Z rysunku, zauważamy, że suma kątów każdego trójkąta równa jest 180^0. Rzeczywiście, prosta DC jest równoległa do podstawy AB trójkąta ABC . Kąty naprzemianległe wewnętrzne α przy podstawie i α przy odcinku DC są równe, podobnie β przy podstawie AB i β przy

[9] Odcinek o początku w punkcie A i końcu w punkcie B oznaczamy symbolem $[A, B]$

odcinku DC są równe. Widzmy, że

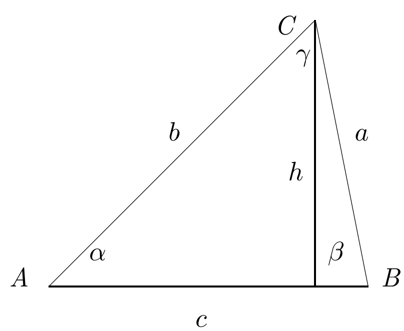
$$\alpha+\beta+\gamma=180^0$$

To znaczy, że suma kątów każdego trójkąta równa jest 180^0.

1.6.3 Konstrukcja trójkąta o tych samych kątach i o bokach proporcjonalnych.

Na płaszczyżnie wybieram trzy różne punkty A, B i C i łączymy te punkty używając linijki. W ten sposób narysowaliśmy trójkąt. Boki AB i AC przedłużamy. Na przedłużonych bokach odkładamy odcinki równe długości boków AB i AC, odpowiednio. Łączymy zaznaczone końce odcinków. Widzimy, że w ten sposób narysowaliśmy drugi trójkąt który ma kąty te same co wcześniej narysowny trójkąt, natomiast boki ma dwa razy dłuższe. Rzeczywiście, oba trójkąty mają te same kąty, ponieważ bok BC jest równoległy do odpowiedniego boku większego trójkąta, jako kąty odpowiadające.

Przykład 1.2 *Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy dłuższych używając linijki i cyrkla. Zmierz kąty tego trójkąta. Oblicz sumę kątów tego trójkąta.*



$Trojkata\ \Delta ABC$

Pole trójkąta

$$P_{\Delta}=\frac{a*h}{2}$$

Obwód trójkąta

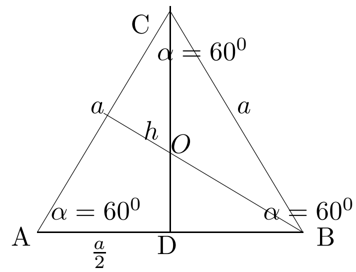
$$Ob_{\Delta}=a+b+c.$$

Rozróżniamy następujące trójkąty: trójkąty równoboczne, trójkąty równoramienne, trójkąty prostokątne i trójkąty dowolne.

1.6.4 Trójkąt równoboczny.

Trójkąt równoboczny ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe $\alpha=60^0$, w mierze łukowej $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ jak na rysunku

Konstrukcja trójkąta równobocznego. Rysujemy odcinek o ustalonej długości boków trójkąta. Stawiamy nóżkę cyrkla na początku odcinka i zakreślamy okrąg o promieniu równym długości odcinka. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla na drugim końcu odcinka i tym samym promieniem zakreślamy okrąg. Łączymy punkt przecięcia okręgów z końcami odcinka. Widzimy, że w ten spoób powstał trójkąt o równych bokach i równych kątach.



$Trojkat\ rownoboczny\ \Delta ABC$

Wysokość h trójkąta Δ ABC jest dwusieczną kąta α i dzieli podstawę a na połowę w punkcie D. Podobnie wysokości trójkąta równobocznego spuszczone na pozostałe boki dzielą ich na połowy i przecinają się w jednym punkcie O. Punkt przecięcia wysokości O dzieli te wysokości w stosunku $1 : 3$. To znaczy zachodzi następująca proporcja

$$\frac{|DO|}{|DC|} = \frac{1}{3}, \quad |DC| = h$$

Stąd mamy

$$|DO| = \frac{1}{3}h, \quad \text{i} \quad |OC| = \frac{2}{3}h$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość h trójkąts Δ ABC

$$h^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

Wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

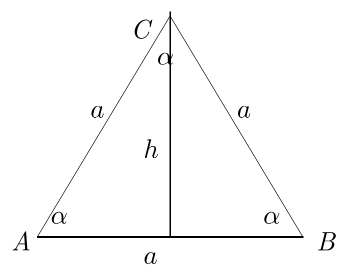
Obliczamy pole trójkąta równobocznego

$$P = h * \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole trójkąta równobocznego o boku a

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Zadanie 1.11 *Zmierz boki i kąty trójkąta* ΔABC *niżej na rysunku*



(i) Oblicz pole i obwód trójkąt równoramiennego ΔABC, *o boku* $a = 3cm$.
(ii) Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy dłuższych używając linijki i cyrkla.
(iii) Zmierz kąty i oblicz sumę kątów tego trójkąta.

1.6.5 Trójkąt równoramienny

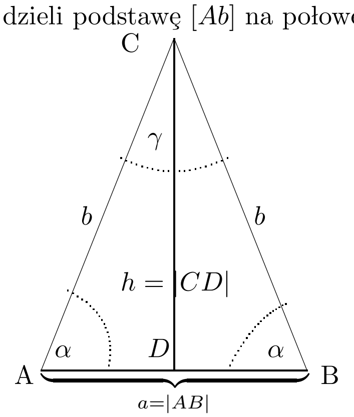
Trójkąt równoramienny o podstawie równej odcinkowi $[A, B]$ i równych ramionach $[A, C] = [B, C]$ ma przy podstawie $[A, B]$ kąty równe $\angle CAB = \angle ABC = \alpha$. Wysokość $h = |CD|$ dzieli podstawę $[A, B]$ na połowę.
Kąt przy wierzchołku C w mierze kątowej

$$\beta = 180^0 - 2 * \alpha$$

lub w mierze łukowej

$$\beta = \pi - 2 * \alpha$$

Wysokość $h = |CD|$ dzieli podstawę $[Ab]$ na połowę



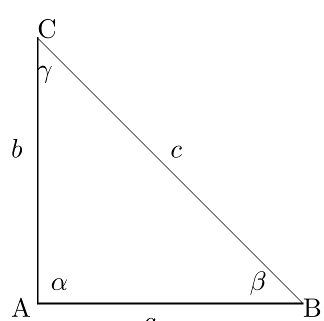
Pole trójkąta równoramiennego ΔABC obliczamy stosując wzór ogólny

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \underbrace{|AB| * |CD|}_{a*h} = \frac{1}{2} a * h.$$

Zadanie 1.12 *Zmierz boki i kąty trójkąta równoramiennego ΔABC. Oblicz obwód, pole i sumę kątów trójkąta równoramiennego, jeżeli długość jego podstawy $|AB| = 3cm$, a równe ramiona $|AC| = |BC| = 4cm$.*

1.6.6 Trójkąt prostokątny

W trójkącie prostokątnym wyróżniamy przyprostokątne AB i AC, o długości a i b, przeciwprostokątną BC, o długości c, kąt prosty $\alpha = 90^0$ i dwa kąty przyległe β, γ



Trójkąt prostokątny ΔABC

Pole trójkąta $= \frac{a * b}{2}$, obwód trójkąta $= a + b + c$

Zadanie 1.13 *Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy krótszych używając linijki i cyrkla. Oblicz sumę kątów tego trójkąta*

1.7 Cechy przystawania trójkątów

Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe. Jasne, że na to żeby dwa trójkąty były przystające wystarczy, żeby spełniona była jedna z trzech cech przystawania trójkątów.

Pierwsza checha przystawania trójkątów. *Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają wszystkie boki równe.*
Druga cecha przystawania trójkątów. *Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają jeden bok równy i kąty przyległe do tego boku równe:*
Trzecia cecha przystawania trójkątów. *Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają dwa boki równe i kąt pomiędzy tymi bokami równy.*

1.8 Podobieństwo trójkątów

Dwa trójkąty ΔABC i $A^{'}B^{'}C^{'}$ są podobne, piszemy

$$\Delta ABC \simeq \Delta A^{'}B^{'}C^{'}$$

jeżeli mają odpowiednie boki proporcjonalne w skali proporcji k, to znaczy

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = k,$$

$$|AB| = k * |A^{'}B^{'}|,$$

$$|AC| = k * |A^{'}C^{'}|,$$

$$|BC| = k * |B^{'}C^{'}|.$$

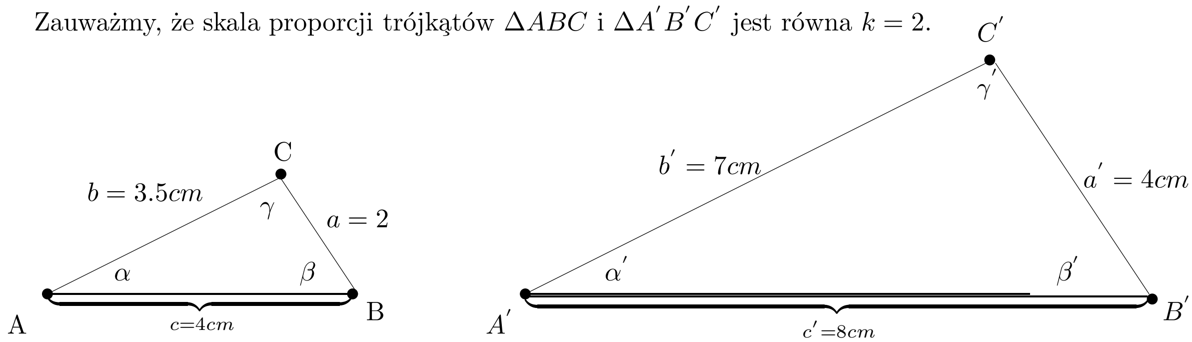
Rozpatrzmy trójkąt ΔABC o bokach

$$|AB| = c = 4cm, \quad |BC| = c = 2cm, \quad |AC| = b = 3.5cm$$

i trójkąt $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ o bokach

$$|A^{'}B^{'}| = c^{'} = 8cm, \quad |B^{'}C^{'}| = c^{'} = 4cm, \quad |A^{'}C^{'}| = b = 7cm$$

Zauważmy, że skala proporcji trójkątów ΔABC i $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ jest równa $k = 2$.



Niżej podamy trzy cechy podobieństwa trójkątów.

Pierwsza checha podobieństwa trójkątów. *Dwa trójkąty* ΔABC *i* $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ *są podobne, jeżeli mają wszystkie boki proporcjonalne w skali proporcji* k, *to znaczy*

$$|AB| = k * |A^{'}B^{'}|,$$

$$|AC| = k * |A^{'}C^{'}|,$$

$$|BC| = k * |B^{'}C^{'}|.$$

Zadanie 1.14 *Narysuj trójkąt* ΔABC *o bokach*

$$|AB| = c = 5cm, \qquad |AC| = b = 4cm, \qquad |BC| = a = 3cm$$

używając linijki i cyrkla.

Narysuj drugi trójkąt $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ *o bokach dwa razy większych od boków trójkąta* ΔABC.

Druga cecha podobieństwa trójkątów.*Dwa trójkąty* ΔABC *i* $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ *są podobne, jeżeli mają dwa boki proporcjonalne w skali proporcji* k *i kąty pomiędzy tymi bokami równ, to znaczy* $\alpha = \alpha^{'}$

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = k,$$

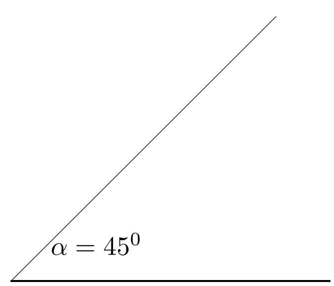
$$|AB| = k * |A^{'}B^{'}|,$$

$$|AC| = k * |A^{'}C^{'}|,$$

Zadanie 1.15 *Narysuj trójkąt* ΔABC *o bokach*

$$|AB| = c = 3cm, \qquad |AC| = b = 5cm,$$

danym kącie $\alpha = 45^0$



używając linijki i cyrkla.

Narysuj drugi trójkąt $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ *o bokach dwa razy większych od boków trójkąta* ΔABC.

Trzecia cecha przystawania trójkątów. *Dwa trójkąty* ΔABC *i* $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ *są podobne, jeżeli mają boki* AB *i* $A^{'}B^{'}$ *proporcjonalne w skali* k *i kąty do nich przyległe równe, to znaczy* $\alpha = \alpha^{'}$ *i* $\beta = \beta^{'}$ *oraz boki* AB *i* $A^{'}B^{'}$ *w skali* k

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = k,$$

$$|AB| = k * |A^{'}B^{'}|.$$

Zadanie 1.16 *Narysuj trójkąt ΔABC o boku*

$$|AB| = c = 6cm,$$

i danych kątach przyległych $\angle\alpha = 30^0$, $\angle\beta = 60^0$ do boku AB.

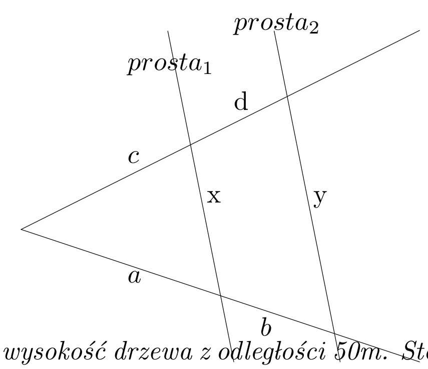
Narysuj drugi trójkąt $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ o bokach dwa razy większych od boków trójkąta ΔABC.

1.8.1 Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta
Jeżeli $prosta_1$ jest równoległa do prostej $prosta_2$, piszemy $prosta_1 \parallel prosta_2$ to wtedy spełnione są proporcje

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$
$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{x}{y}$$

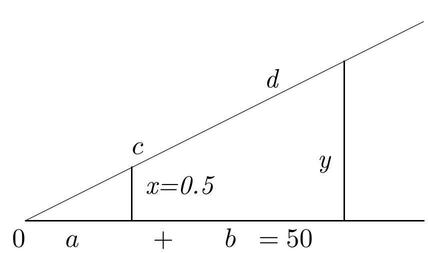
Interpretacja geometryczna powyższej proporcji podana jest niżej na rysunku



Przykład 1.3 *Oblicz wysokość drzewa z odległości 50m. Stosując twierdzenie Talesa obliczamy wysokość drzewa y z proporcji*

$$\frac{a}{a+b} = \frac{x}{y}, \quad y = \frac{(a+b)*x}{a}$$

Dane: $a + b = 50m$, Dokonujemy pomiarów $a = 2m$, $x = 0.5m$ do proporcji, zobacz na rysunku.



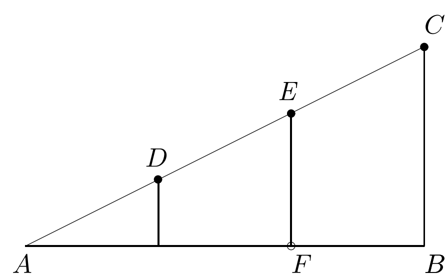
Podstawiając dane obliczamy wysokość drzewa $y = \dfrac{(a+b)*x}{a} = \dfrac{50*0.5}{2} = 12.5$

Twierdzenie Talesa stosujemy w zadaniach dzielenia odcinka w danej proporcji.

Przykład 1.4 *Podzielić odcinek AB w stosunku* $2:3$
Rozwiązanie. *Na ramieniu AC zaznaczamy dowolną rozwartością cyrkla trzy punkty D, E i punkt C. Następnie, łączymy punkt C z punktem B używając linijki. Rysujemy równoległe do odcinka BC przechodzące przez punkty D i E. W ten sposób dostajemy podział odcinka AB punktem F w stsunku* $2:3$*, Zatem, z twierdzenia Talesa mamy proporcje*

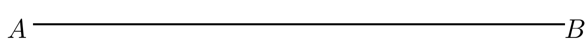
$$\frac{|AF|}{|AB|}=\frac{2}{3}$$

Interpretacja geometryczna tej proporcji podana jest niżej na rysunku



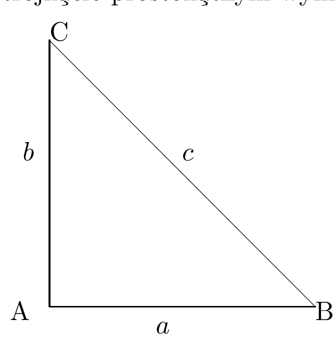
Zadanie 1.17 *Oblicz wysokość drzewa z odległości 150m, wiedząc, że wysokość listwy geodezyjnej równa jest 2m i jej odległość od punktu pomiaru 10m.*

Zadanie 1.18 *Podzielić odcinek AB w stosunku* $1:3$



1.8.2 Twierdzenie Pitagorasa

Figury płaskie, twierdzenie Pitagorasa, wielokąty foremne, okrąg: kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg, miara łukowa k ątów, konsrukcje figur płaskich, figury przestrzenne granastosłupy proste, walce, stożki, ostrosłupy, sfery i kule, obliczanie objętości i pola powierzchni.
Związki miarowe w trójkącie prostokątnym wynikają z twierdzenia Pitagorasa.



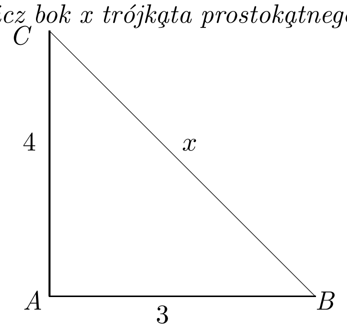
Trójkąt prostokątny ΔABC

Twierdzenie 1.3 *W trójkącie prostokątnym suma kwadratów przyprostokątnych równa jest kwadratowi przeciwprostokątnej*

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1.5}$$

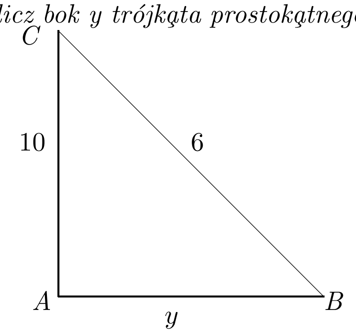
Tutaj przez a i b oznaczone są przyprostokątne, literą c oznaczona jest przeciwprostokątna

Przykład 1.5 *Oblicz bok x trójkąta prostokątnego*



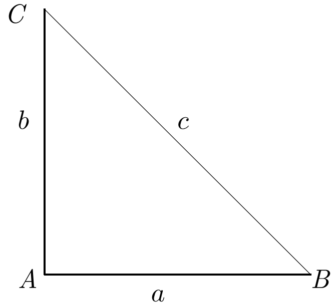
Trójkąt prostokątny ΔABC

Przykład 1.6 *Oblicz bok y trójkąta prostokątnego*



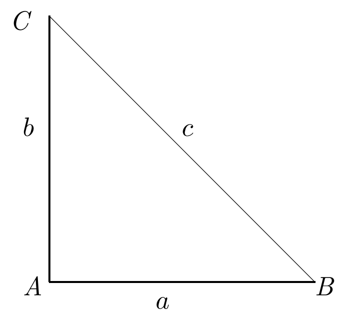
Trójkąt prostokątny ΔABC

Przykład 1.7 *Oblicz przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, wiedząc, że przyprostokątne* $a = 9,\ b = 12$



Trójkąt prostokątny ΔABC

Przykład 1.8 *Oblicz wszystkie boki trójkąta prostokątnego, wiedząc, że przyprostokątna $a = 12cm$, przyprostokątna b jest o $4cm$ dłuższa od przyprostokątnej a, natomiast przeciwprostokątna c jest dłuższa o $8cm$ od przyprostokątnej a.*



Trójkąt prostokątny ΔABC

1.8.3 Wzór Herona. Związek pomiędzy obwodem i polem trójkąta.

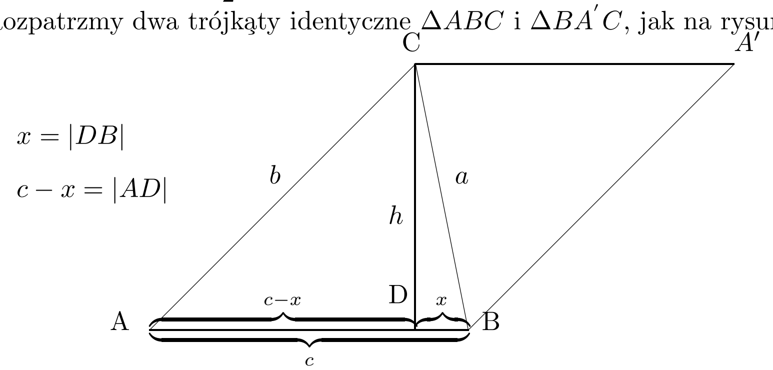
Obwód trójkąta ΔABC równy jest sumie długości jego boków

$$Ob = |AB| + |AC| + |CA| \quad lub \quad Ob = a + b + c$$

Pole trójkąta ΔABC obliczmy stosując wzór Herona. [10]
Wzór Herona.

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie połowa obwodu $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.
Dowód. Rozpatrzmy dwa trójkąty identyczne ΔABC i $\Delta BA^{'}C$, jak na rysunku



Zauważmy, że pole równoległoboku $ABA^{'}C$ równe jest

$$P_{ABA'C} = c * h$$

Wysokość $h = |DC|$ obliczamy z twierdzenienia Pitagorasa. Mianowiecie, z twierdzenia Pitagorasa wynikają następujące związki
Z trójkąta prostokątnego ΔADC mamy równość

$$h^2 = b^2 - (c-x)^2$$

[10] Wzór Herona stosujemy do trójkąta ΔABC o różnej długości boków

Podobnie z trójkąta prostokątnego $\Delta DA^{'}C$

$$h^2 = a^2 - x^2$$

Skąd obliczamy długość odcinka $x = |AD|$

$$b^2 - (c-x)^2 = a^2 - x^2$$

$$b^2 - c^2 + 2c * x - x^2 = a^2 - x^2$$

$$2c * x = a^2 - b^2 + c^2$$

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$$

Teraz obliczamy kwadrat wysokości równoległoboku $ABA^{'}C$ stosując wzory uproszczonego mnożenia

$$\begin{aligned}
h^2 = a^2 - x^2 &= a^2 - (\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c})^2 \\
&= \frac{4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4c^2} \\
&= \frac{(2ac)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4c^2} \\
&= \frac{(2ac - a^2 + b^2 - c^2)(2ac + a^2 - b^2 + c^2)}{4c^2} \\
&= \frac{(b^2 - (a-c)^2)((a+c)^2 - b^2)}{4c^2} \\
&= \frac{(b - a + c)(b + a - c)((a + c - b)(a + c + b)}{4c^2} \\
&= \frac{(a + b + c - 2a)(a + b + c - 2c)((a + b + c - 2b)(a + c + b)}{4c^2} \\
&= \frac{2(p-a)2(p-c)2(p-b)2p}{4c^2}, \qquad p = \frac{a+b+c}{2} \\
&= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}, \qquad p = \frac{a+b+c}{2}
\end{aligned}$$

Pole trójkąta ΔABC o danej długości boków równe jest połowie pola równoległoboku $ABA^{'}C$. Zatem mamy wzór Herona na pole trójkąta ΔABC

$$\begin{aligned}
P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}c * h &= \frac{c}{2}\sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}} \\
&= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
\end{aligned}$$

Przykład 1.9 *Oblicz obwód i pole trójkąta ΔABC o długości boków*

$$a = |AB| = 3cm, \quad b = |CA| = 4cm, \quad c = |AB| = 5cm$$

Rozwiązanie. Obwód trójkąta ΔABC równy jest sumie długości jego boków

$$Ob = a + b + c = 3cm + 4cm + 5cm = 12cm,$$

polowa obwodu

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3cm + 4cm + 5cm}{2} = 6cm,$$

Pole trójkąta ΔABC obliczamy stosując wzrór Herona

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{6cm(6cm-3cm)(6cm-4cm)(6cm-5cm)} \\ &= = \sqrt{6*3*2*1cm^4} = \sqrt{36cm^4} = 6cm^2. \end{aligned}$$

Zadanie 1.19 *Oblicz obwód i pole trójkąta ΔABC o długości boków*

$$a = |AB| = 6cm, \quad b = |CA| = 8cm, \qquad c = |AB| = 10cm$$

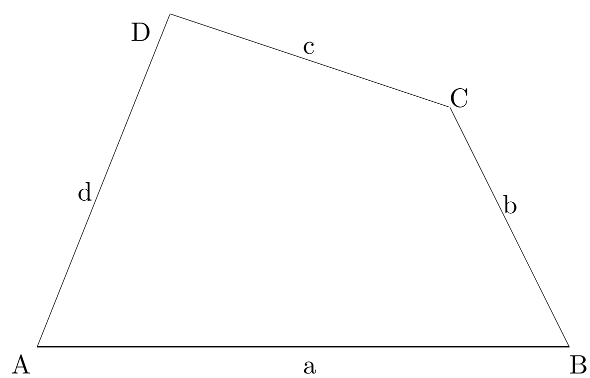
1.9 Czworokąty

Rozpatrzmy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach A, B, C, D o czterech bokach długości a, b, c, d, i o kącie $\angle ABC$ o wierzchołku B, kątcie $\angle BCD$ o wierzchołku C, kątcie $\angle CDA$ o wierzchołku D.
Suma długości dowolnie wybranych trzech boków czworokąta jest nie mniejsza od długości boku czwartego, piszemy

$$|AB| + |BC| + |CD| \geq |AD|.$$

Suma kątów czworokąta równa jest 360^0, w mierze łukowej 2π, piszemy

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 360^0$$



Zadanie 1.20 *Zmierz boki i kąty tego czworokąta. Oblicz obwód i sumę kątów czworokąta czworokąt $ABCD$.*

Rozpatrzymy następujące czworokąty

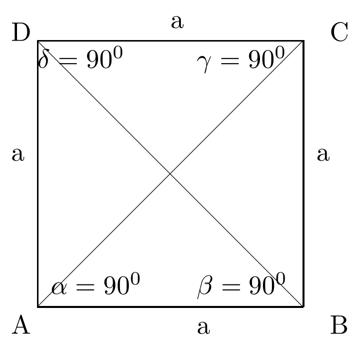
- kwadrat
- prostokąt
- trapez
- równoległobok
- romb
- deltoid

- czworokąt dowolny
- okrąg wpisany i okrąg opisany na czworokącie

[11]

1.9.1 Czworokąt foremny. Kwadrat.

Kwadrat $ABCD$ jest figurą foremną o czterych bokach równych a i o czterech kątach prostych równych 90^0 lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$.



Kwadrat ma dwie przekątne AC i BD, które przecinają się pod kątem prostym równym 90^0 lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$. Z twordzenia Pitagorasa obliczamy długość przekątnej

$$|AC|^2 = |BC|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, \qquad |AC| = |BC| = a\sqrt{2}.$$

Promień okręgu wpisanego w kwadrat równy jestpołowie boku

$$r = \frac{a}{2}$$

Promień okręgu opisanego na kwadracie równy jest połowie przekątnej

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Pole kwadratu

$$P_{ABCD} = a * a^2, \qquad obwod\ kwadratu\ \ Ob = 4 * a.$$

Zadanie 1.21 *Oblicz obwód Ob i pole P kwadratu, długość przekątnych, promień r okręgu wpisanego w kwadrat i promień R okręgu opisanego na kwadracie, jeżeli bok kwadratu ma długość* $a = 4.$.

1.9.2 Prostokąt.

Prostokąt $ABCD$ ma cztery boki parami równe

$$a = c,\ b = d,$$

[11] Konstrukcja kwadratu przy pomocy cyrkla i linijki opisana jest w projekcie *Figury podstawowe. Konstrukcja.*

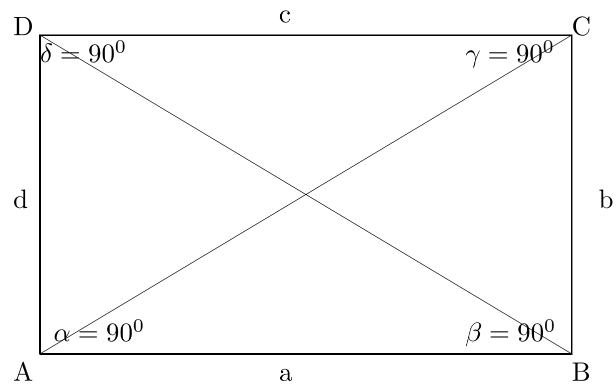
i cztery kąty proste równe 90^0
Z twierdzenia Pitagorasa obliczmy przekątne prostokąta

$$|AC| = |BD| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pole prostokąta

$$P_{ABCD} = a * b.$$

Obwód prostokąta Ob $= 2 * a + 2 * b$



Okrąg opisany na prostokącie ma promień R równy połowie przekątnych

$$R = \frac{1}{2}|AC| == \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Natomiast nie istnieje okrąg wpisany w prostokąt, z wyjątkiem kwadratu, który jest szczególnym prostokątem o bokach równych.

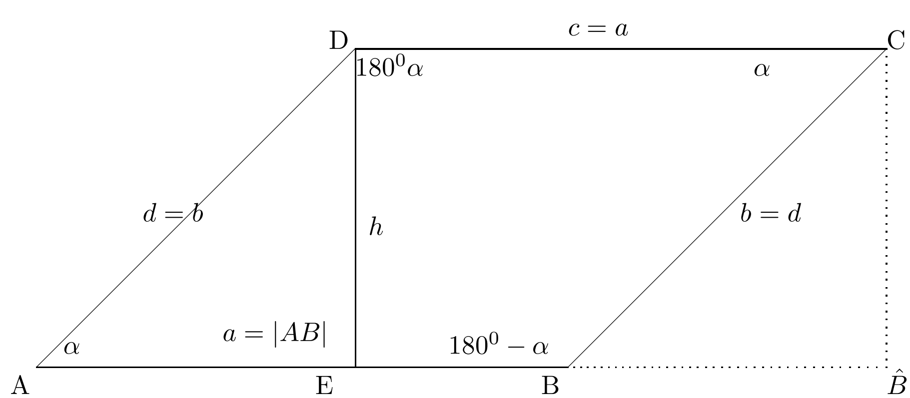
1.9.3 Równoległobok.

Równoległobok $ABCD$ ma cztery boki parami równe

$$a = c, \qquad b = d$$

i cztery kąty parami równe

$$\alpha = \angle DAB = \angle BCD, \qquad 180^0 - \alpha = \angle ABC = \angle CDA.$$



Wysokość równoległoboku oznavczamy literą h.
Pole równoległoboku

$$P_{ABCD} = a * h.$$

Istotnie, zauważmy, że pole równoległoboku $ABCD$ równe jest polu prostokąta $E\hat{B}CD$. To znaczy, że

$$P_{A\hat{B}CD} = P_{ABCD} = a * h.$$

i obwód równoległoboku

$$Ob = 2 * a + 2 * b.$$

1.9.4 Romb.

Romb $ABCD$ ma cztery boki równe

$$a = |AB| = BC| = |CD|$$

i cztery kąty parami równe

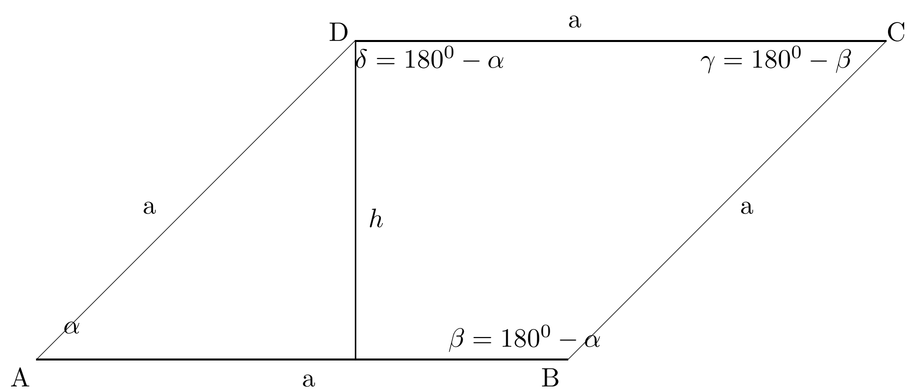
$$\alpha = \gamma, \qquad \beta = \delta.$$

Wysokość rombu oznaczamy literą h.
Zauważmy, że obwód rombu

$$Ob = 4 * a.$$

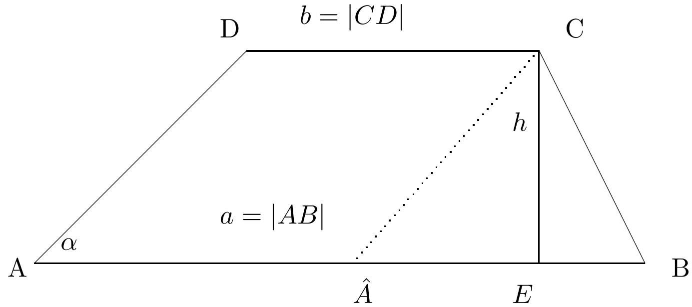
Pole rombu

$$P = a * h.$$



1.9.5 Trapez

Trapez $ABCD$



jest czworokątem o długości podstawy dolnej $a = |AB|$ równoległym do podstawy górnej o długości $b = |CD|$.

Pole trapezu

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)*h.$$

Istotnie, zauważmy, że pole trapezu P_{ABCD} równe jest sumie pola równoległoboku

$$\hat{P}_{AECD} = (b*h$$

i pola trójkąta

$$P_{\hat{A}BC} = \frac{1}{2}(a-b)*h.$$

Zatem pole trapezu

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \hat{P}_{AECD} + P_{\hat{A}BC} \\ &= b*h + \frac{1}{2}(a-b)*h \\ &= \frac{1}{2}(a+b)*h \end{aligned}$$

Obwód trapezu

$$Ob = |AB| + |BC| + |CD| + |AC|.$$

[12]

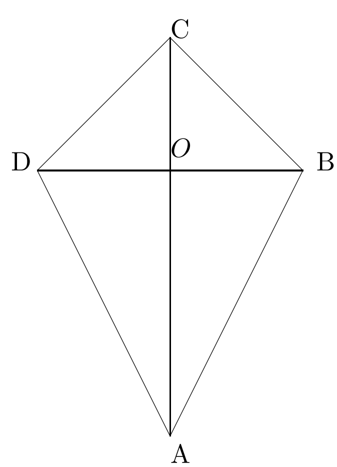
1.9.6 Deltoid.

Deltoid jest czworokątem o równych bokach parami

$$|AB| = |AD|, \qquad |CD| = |AD|$$

i o kątach $\angle ADC = \Delta ABC$

Deltoid ma dwie prostopadłe przekątne L_1 i L_2, jedna z nich jest symetralą drugiej, jak niżej na rysunku



$L_2 = |DB|$ przekątna pozioma

$L_1 = |AC|$ przekątna pionowa

Pole deltoidu równe jest połowie iloczyny przekątnych

$$P_{Deltoid} = \frac{1}{2}L_1 * L_2$$

[12] Twierdzenie o okręgu opisanym na czworokącie i wpisanym w czworokąt jest opisane w paragrafie o czworokątach Twierdzenie to dotyczy wszystkich czworokątów w tym trapezów

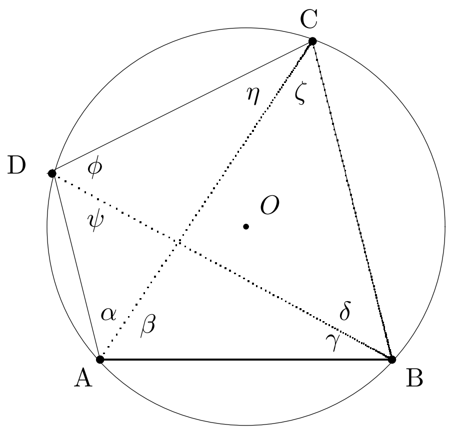
Istotnie, zauważamy, że pole deltoidu P_{ABCD} równe jest sumie pól trójkątów ΔABD i ΔBCD

$$\begin{aligned} P_{Deltoid} = P_{ABD} + P_{DBC} &= \tfrac{1}{2}L_2 * |AO| + \tfrac{1}{2}L_2 * |OC| \\ &= \tfrac{1}{2}\underbrace{(|AO| + |OC|)}_{L_1} \\ &= \tfrac{1}{2} * L_1 * L_2. \end{aligned}$$

[13]

1.9.7 Okrąg opisany na czworokącie.

Nie na każdym czworokącie można opisać okrąg i nie w każdy czworokąt można wpisać okrąg. Warunki istnienia okręgu opisanego na czworokącie i okręgu wpisanego w czworokąt podamy niżej. Mianowicie rozpatrzmy czworokąt $ABCD$ wpisany okręgu o promieniu R i środku w punkcie O.



$\zeta = \psi$ kąty $\angle BCA = \angle BDA$ oparte na łuku $\widehat{AB}$

$\eta = \gamma$ kąty $\angle BDA = \angle ACD$ oparte na łuku $\widehat{AD}$

$\delta = \alpha$ kąty $\angle ABD = \angle ACD$ oparte na łuku $\widehat{DC}$

$\beta = \phi$ kąty $\angle CAB = \angle CDB$ oparte na łuku $\widehat{BC}$

Jak wiemy, kąty środkowe oparte na tym samym łuku są równe.
Zatem zauważamy na rysunku, że

$$\begin{array}{llll} \zeta = \psi & oparte & na & luku \quad \widehat{AB} \\ \eta = \gamma & oparte & na & luku \quad \widehat{AD} \\ \delta = \alpha & oparte & na & luku \quad \widehat{DC} \\ \beta = \phi & oparte & na & luku \quad \widehat{BC} \end{array} \tag{1.6}$$

Warunek konieczny i wystarczający na to, żeby można było opisać okrąg na danym czworokącie o wierzchołkach A, B, C, D podamy w formie następującego twierdzenia

Twierdzenie 1.4 *Na czworokącie $ABCD$ o wierzchołach A, B, C, D można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma kątów naprzeciwległych jest równa*

$$\angle ABC + \angle CDA = \angle BCA + \angle DAB \tag{1.7}$$

[13] Twierdzenie o okręgu opisanym na czworokącie i wpisanym w czworokąt jest opisane w paragrafie o czworokątach Twierdzenie to dotyczy wszystkich czworokątów w tym deltoidu

[14] **Dowód.** Dowód twierdzenia wytnika z równości (1.6) kątów $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \zeta$, które tworzą przekątne z bokami czworokąta. Teraz sprawdzamy równość (1.7)

$$\begin{aligned} \angle ABC + \angle CDA &= \underbrace{(\delta+\gamma)}_{\angle ABC} + \underbrace{(\phi+\psi)}_{\angle CDA} \\ &= (\alpha+\eta)+(\beta+\zeta) \\ &= \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\angle DAC} + \underbrace{(\eta+\zeta)}_{BCD} \\ &= \angle BCA + \angle DAB \end{aligned}$$

Wzór na pole czworokąta opisanego na okręgu

$$P_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

gdzie długości boków

$$a = |AB|, \quad b = |BC|, \quad c = |CD|, \quad d = |DA|,$$

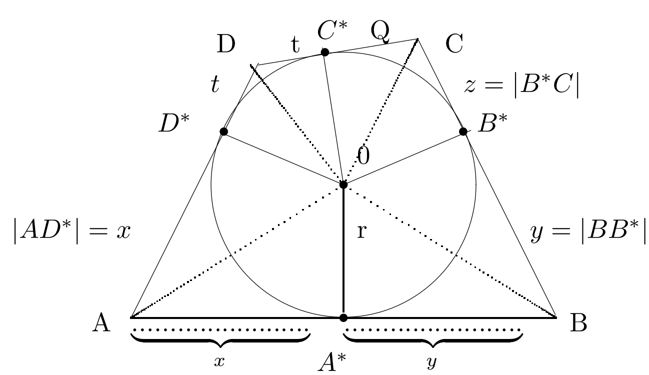
a litera p oznacza połowę obwodu czworokąta

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c+d) = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CD + |AD|).$$

1.9.8 Okrąg wpisany w czworokąt

Opis okręgu wpisanego w czworokąt o wierzchołkach A, B, C, D zacznijmy od następujących obserwacji:
(**a**) Boki czworokąta są styczne do okręgu wpisanego w punktach styczności A^*, B^*, C^*, D^*
(**b**) Styczne do okręgu poprowadzone z wierzchołków czworokąta wyznaczają odcinki parami równej długości, piszemy

$$\begin{aligned} x &= |A, A^*| = |AD^*|, & y &= |A^*B| = |BC^*| \\ z &= |B^*C| = |CC^*|, & t &= |C^*D| = |DD^*| \end{aligned} \tag{1.8}$$



Warunek konieczny i wystarczający na to, żeby można było wpisać okrąg w danym czworokąt o wierzchołkach A, B, C, D podamy w formie następującego twierdzenia

[14] Tutaj $\angle ABC$ oznacza kąt o wierzchołku B i ramionach $[A, B]$ i $[A, D]$.

Twierdzenie 1.5 *W czworokąt $ABCD$ o wierzchołach A, B, C, D można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, jeżeli sumy długości boków naprzeciwległych są równa*

$$|AB| + |CD| = AD| + |BC| \tag{1.9}$$

Dowód. Dowód twierdzenia wynika z własności (a) i (b) stycznej do okręgu i z równości (1.8), parami równych boków naprzeciwległych. Mianowicie, sprawdzamy, że lewa strona równości (1.9)

$$\begin{aligned} |AB| + |CD| &= \underbrace{(x+y)}_{bok\ |AB|} + \underbrace{(z+t)}_{bok\ |CD|} \\ &= \underbrace{(x+t)}_{bok\ |AD|} + \underbrace{(y+z)}_{bok\ BC|} \\ &= |AD| + |BC|, \end{aligned}$$

równa jest prawej stronie równości (1.9).[15]

Pole czworokąta i promień okręgu wpisanego w czworokąt. Zauważmy, że promień r okręgu wpisanego w czworokąt jest równy z wysokościami trójkątów

$$\Delta AOB, \quad \Delta BCO, \quad \Delta DCO, \quad \Delta DAO$$

spuszczonymi na boki

$$[A, B], \quad [B, C], \quad [C, D], \quad [D, A]$$

czworokąta $ABCD$.
Zatem pola tych trójkątów są równe odpowiednio

$$P_{\Delta ABO} = \tfrac{1}{2} r * |AB|$$

$$P_{\Delta BCO} = \tfrac{1}{2} r * |BC|$$

$$P_{\Delta CDO} = \tfrac{1}{2} r * |CD|$$

$$P_{\Delta DAO} = \tfrac{1}{2} r * |DA|$$

Pole czworokąta $ABCD$ równe jest sumie pól czterech trójkątów, piszemy

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{\Delta ABO} + P_{\Delta BCO} + P_{\Delta CDO} + P_{\Delta DAO} \\ &= \frac{1}{2} r * |AB| + \frac{1}{2} r * |BC| + \frac{1}{2} r * |CD| + \frac{1}{2} r * |DA| \\ &= \frac{1}{2} r(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|) \\ &= r * p \end{aligned}$$

gdzie litera p oznacza połowę obwodu czworokąta $ABCD$.

$$p = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|).$$

1.10 Zastosowanienie iloczynu wektorowego do obliczania pola czworokąta dowolnego.

Pole dowolnego czworokąta $ABCD$ o danych wierzchołkach A, B, C, D we współrzędnych kartezjańskich możemy obliczyć stosując iloczyn wektorowy w przestrzeni kartezjańskiej R^3 cf. (1.10)

[15] Tutaj korzystamy z lacznosci dodawania

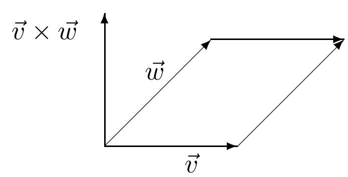
1.10.1 Iloczyn wektorowy w przestrzeni trójwymiarowej R^3

Naturalnie iloczyn wektorowy wykonalny jest w przestrzeni kartezjańskiej trójwymiarowej i opisany jest w rozdziale geometrii przestrzennej. W tym rozdziale, geometrii płaskiej, stosujemy iloczyn wektorowy do obliczania pola czorokąta dowolnego.
Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad i \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

w przestrzeni trójwymiarowej

$$R^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : \ -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty \}$$



Wynikiem mnożenia wektorowego wektora $\vec{v}$ przez wektor $\vec{w}$ jest trzeci wector $\vec{v} \times \vec{w}$, którego wpółrzędne obliczamy z rozwinięcia Laplace'a macierzy utworzenej ze współrzędnych wektorów

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ & & \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ & & \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \right\}$$

Mianowicie iloczyn

$$\vec{v} \times \vec{w} = [Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\}, -Det(\left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right\}), Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right\}]$$

gdzie wyznaczniki -determinants

$$Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\} = v_2 * w_3 - v_3 * w_2,$$

$$-Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right\} = -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1),$$

$$Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right\} = v_1 * w_2 - v_2 * w_1$$

Skąd otzymamy wzór na współrzędne iloczynu wektorowego

$$\vec{v} \times \vec{w} = [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]. \tag{1.10}$$

Wektor $\vec{v} \times \vec{w}$ jest prostopadły do wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$, piszemy

$$\vec{v} \times \vec{v} \perp \vec{w}, \qquad \vec{w} \times \vec{v} \perp \vec{w}$$

Wiemy, że wektory są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, jeżeli ich iloczy skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

równy jest zero.
Zatem, sprawdzamy iloczyn skalarny

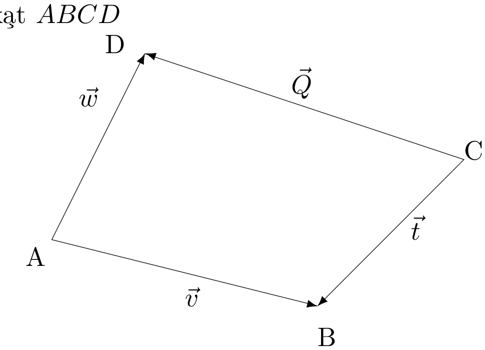
$$
\begin{aligned}
(\vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}) &= ([v_1, v_2, v_3], [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]) \\
&= v_1(v_2 * w_3 - v_3 * w_2) - v_2(v_1 * w_3 - v_3 * w_1) + v_3(v_1 * w_2 - v_2 * w_1) \\
&= (v_1 v_2 w_3 + v_2 v_3 w_1 + v_3 v_1 w_2) - (v_1 v_3 w_2 + v_2 v_1 w_3 + v_3 v_2 w_1) = 0
\end{aligned}
$$

Długość wektora $\vec{v} \times \vec{w}$ równa jest polu równoległoboku o bokach $\vec{v}$ i $\vec{w}$.
[16] Zatem długość wektora

$$
|\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{|v_2 * w_3 - v_3 * w_2|^2 + |-(v_1 * w_3 - v_3 * w_1)|^2 + |v_1 * w_2 - v_2 * w_1|^2}
$$

1.10.2 Pole czworokąta. Przykłady

Rozpatrzymy czworokąt $ABCD$



o wierzchołkach

$$
A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3)
$$

$$
C = (c_1, c_2, c_3), \quad D = (d_1, d_2, d_3)
$$

rozpięty na wektorach

$$
\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = \vec{AD},
$$

$$
\vec{Q} = [z_1, z_2, z_3] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [t_1, t_2, t_3] = \vec{CD},
$$

gdzie współrzędne wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{Q}$, $\vec{t}$ określamy przez różnice współrzędnych wierzchołków A, B, C, D czworokąta $ABCD$

$$
\begin{aligned}
v_1 &= b_1 - a_1, & v_2 &= b_2 - a_2, & v_3 &= b_3 - a_3, \\
w_1 &= d_1 - a_1, & w_2 &= d_2 - a_2, & w_3 &= d_3 - a_3, \\
z_1 &= b_1 - c_1, & z_2 &= b_2 - c_2, & z_3 &= b_3 - c_3, \\
t_1 &= d_1 - c_1, & t_2 &= d_2 - c_2, & t_3 &= d_3 - c_3.
\end{aligned}
$$

Stosując iloczyn wektorowy (cf. (1.10)) możemy obliczyć pole dowolnego czworokąta o danych współrzędnych jego wierzchołków. Mianowicie, pole czworokąta wypukłego $ABCD$ równe jest połowie sumy iloczynu wektorowego wektorów [17]

[16] Długość iloczynu wektorowego $|\vec{v} \times \vec{w} = |\vec{v}| * |\vec{w}| * cos\alpha$, gdzie α oznacza kąt pomiędzy wektorami $\vec{v}, \vec{w}$. Pole czworokąta $P_{ABCD} = |\vec{v} \times \vec{w} = |\vec{v}| * |\vec{w}| * cos\alpha$ równe jest długości iloczynu wektorowego.

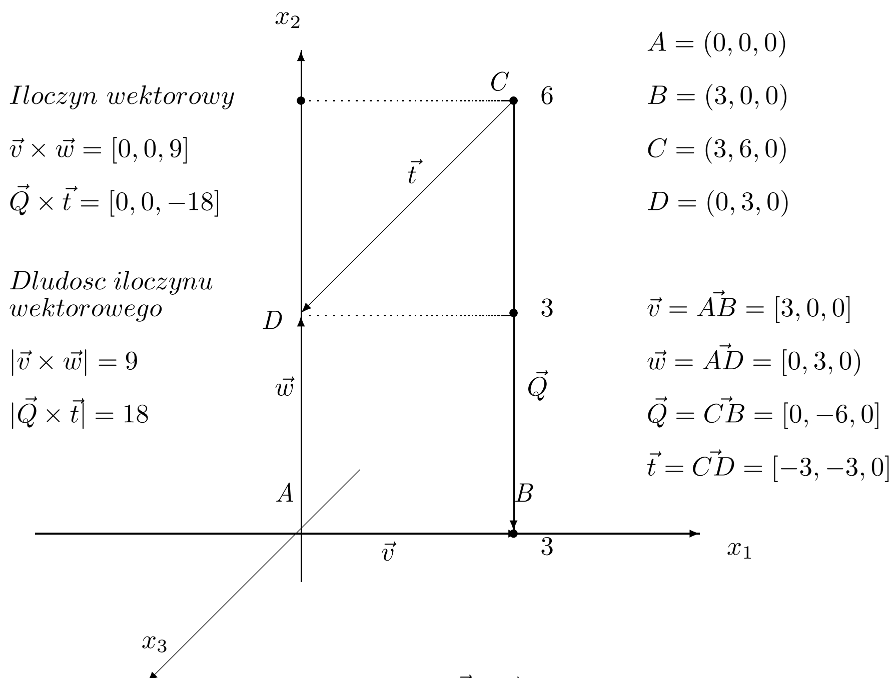
[17] Pole czworokąta wklęsłego równe jest różnicy iloczynów wektorowych $P_{ABCD} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{w} - \frac{1}{2}\vec{Q} \times \vec{t}$

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{Q} \times \vec{t} \tag{1.11}$$

Przykład 1.10 *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [3,0,0] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [0,3,0] = \vec{AD},$$

$$\vec{Q} = [0,-6,0] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [-3,-3,0] = \vec{CD}$$



Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{Q} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (1.10))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0*0-3*0, -(3*0-0*0), 3*3-0*0] \\ &= [0,0,9] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{Q} \times \vec{t} &= [-6*0-3*0, -(0*0-3*0), 0*3-6*3] \\ &= [0,0,-18] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$ i $\vec{Q}$, $\vec{t}$.
Mianowicie

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{Q} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+9^2} + \frac{1}{2}|\sqrt{0^2+0^2+(-18)^2} \\ &= \frac{1}{2}*9 + \frac{1}{2}*18 \\ &= 4.5 + 9 = 13.5 \end{aligned}$$

[18]

Rozpatrzmy inny przykład obliczania pola czworokąta stosując iloczyn wektorowy.

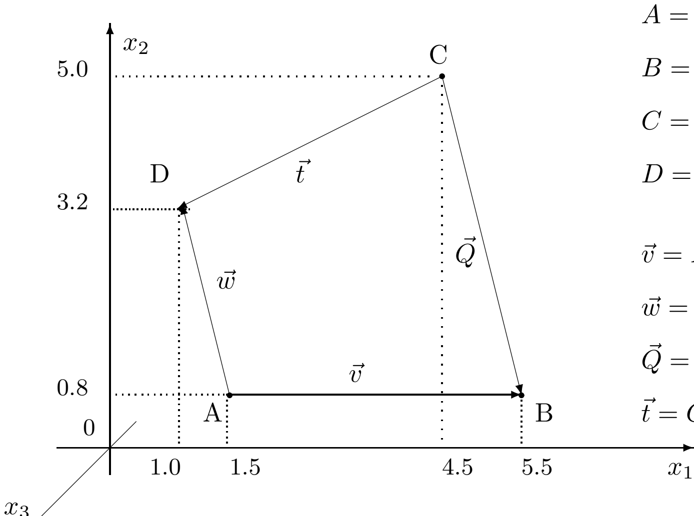
Przykład 1.11 *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [4.0, 0, 0] = \vec{AB},$$

$$\vec{w} = [-0.5, 2.4, 0] = \vec{AD},$$

$$\vec{Q} = [-1.0, 4.2, 0] = \vec{CB},$$

$$\vec{t} = [-3.5, -1.8, 0] = \vec{CD}$$



$A = (1.5, 0.8, 0)$

$B = (5.5, 0.8, 0)$

$C = (4.5, 5.0, 0)$

$D = (1.0, 3.1, 0)$

$\vec{v} = \vec{AB} = [4.0, 0, 0]$

$\vec{w} = \vec{AD} = [-0.5, 2.4, 0)$

$\vec{Q} = \vec{CB} = [-1.0, 4.2, 0]$

$\vec{t} = \vec{CD} = [-3.5, -1.8, 0]$

Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{Q} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (1.10))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 0 * 2.4, -(4 * 0 + 0.5 * 0), 4 * 2.4 + 0.5 * 0] \\ &= [0, 0, 9.6] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{Q} \times \vec{t} &= [4.2 * 0 + 1.8 * 0, -((-1) * 0 - (-3.5) * 0), 1 * 1.8 + 4.2 * 3.5] \\ &= [0, 0, 16.5] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$ i $\vec{Q}$, $\vec{t}$.
Mianowicie

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{Q} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 9.6^2} + \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 16.5^2} \\ &= \frac{1}{2} * 9.6 + \frac{1}{2} * 16.5 \\ &= 4.8 + 8.25 = 13.05 \end{aligned}$$

[18] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 w przestrzeni kartezjńskiej R^3 obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

19

Zadanie 1.22 *Oblicz długości wektorów*

$$(i)\ \vec{v} = [3, 0, 4], \qquad \vec{w} = [8, -6, 0]$$

(ii) *Oblicz iloczyn wektorowy* $\vec{v} \times \vec{w}$ *wektorów*

$$\vec{v} = [3, 0, 4], \qquad \vec{w} = [8, -6, 0]$$

(iii) *Sprawdź, że wektory*

$$\vec{v} \perp \vec{w} \times \vec{w}$$

są prostopadłe.

Zadanie 1.23 *Sprawdź, że wektor*

$$\vec{w} = [w_1, w_2, 0]$$

jest prostopadły do wektora

$$\vec{v} \times \vec{w},$$

gdzie wektor

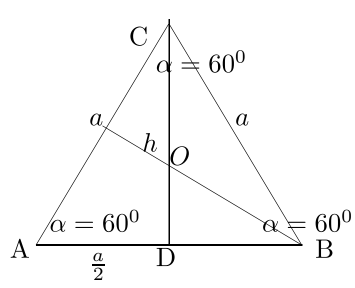
$$\vec{v} = [v_1, v_2, 0]$$

1.11 Figury płaskie foremne

Figurami foremnymi na płaszczyźnie nazywamy figury płaskie, które mają wszystkie boki i wszystkie kąty równe.

1.11.1 Trójkąt foremnym

Trójkąt równoboczny jest trójkątem foremnym
Trójkąt równoboczny ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe $\alpha = 60^0$, w mierze łukowej $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ jak na rysunku



Trójkąt równoboczny ΔABC

Wysokość h trójkąta $\Delta\ ABC$ jest dwusieczną kąta α i dzieli podstawę a na połowę w punkcie D. Podobnie wysokości trójkąta równobocznego spuszcone na pozostałe boki dzielą podstawę na połowy i przecinają się w punkcie O, to jest w środku okręgu wpisanego w

[19] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 w przestrzeni kartezjńskiej R^3 obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

trójkąt równoboczny. Punkt przecięcia wysokości O dzieli te wysokości w stosunku 1 : 3. To znaczy zachodzi następująca proporcja

$$\frac{|DO|}{|DC|} = \frac{1}{3}, \quad |DC| = h$$

Stąd mamy

$$|DO| = \frac{1}{3}h, \quad \text{i} \quad |OC| = \frac{2}{3}h$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość h trójkąts $\Delta\, ABC$

$$h^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

Wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Obliczamy pole trójkąta równobocznego

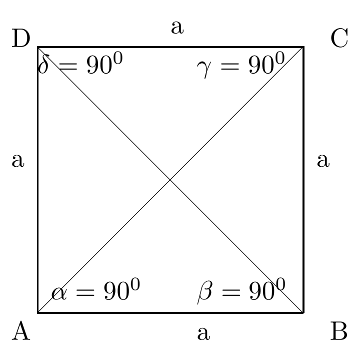
$$P = h * \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole trójkąta równobocznego o boku a

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

1.11.2 Czworokąt foremny

Kwadrat $ABCD$ jest figurą foremną o czterych bokach równych a i o czterech kątach prostych równych 90^0 lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$.



Kwadrat ma dwie przekątne AC i BD, które przecinają się pod kątem prostym równym 90^0 lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość przekątnej

$$|AC|^2 = |BC|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, \qquad |AC| = |BC| = a\sqrt{2}.$$

Promień okręgu wpisanego w kwadrat równy jestpołowie boku

$$r = \frac{a}{2}$$

Promień okręgu opisanego na kwadracie równy jest połowie przekątnej

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Pole kwadratu

$$S = a * a^2, \qquad obwod\ kwadratu\ \ Ob = 4 * a.$$

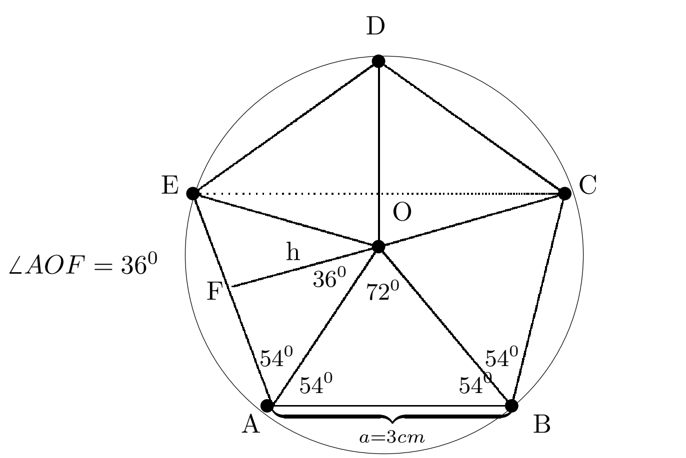
Zadanie 1.24 *Oblicz obwód, długość przekątnych i pole kwadratu o boku* $a = 4$

1.11.3 Pięciokąt foremny

Pięciokąt foremny o bokach równych a i kątach równych

$$\angle EAB = \alpha = 108^0$$

lub w mierze łukowej $\alpha = \dfrac{3\pi}{5}$ ma 5 równych przekątnych.



$$\angle EAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = \alpha = 108^0$$

Pole pięciokąta foremnego. Pole pięciokąta foremnego składa się z $5-ciu$ pól trójkątów równoramiennych i przystających o wysokości h i podstawie a.
Pola jednego z pięciu trójkątów ΔAOE

$$P_{\Delta AOE} = \frac{1}{2} a * h$$

gdzie wysokość

$$\begin{aligned} h = \tfrac{1}{2}a * ctg\, 36^0 &= \frac{a}{2} * \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \\ &= \frac{a}{2} * \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{25-20}} \\ &= \frac{a}{2} * \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{a}{2} * \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} \end{aligned}$$

Zatem pole pięciokąta foremnego o boku a obliczamy ze wzoru

$$P = 5 * P_{\Delta AOE} = 5 * \frac{1}{2} * a * h = \underbrace{\frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10 * \sqrt{5}}}_{Pole\ pieciokata\ foremnego}$$

Promień okręgu opisanego na pięciokącie foremnym. Promień $R = |AO|$ okręgu opisanego na pięciokącie foremnym, obliczymy z trójkcata prostokątnego ΔAOF stosując twierdzenie Pitagoroasa.
Mianowicie, kwadrat promienie R^2 równy jest sumie kwadratów przyprostokątnych $|FO|^2+|FA|^2|$, pisamy

$$\begin{aligned} R^2 &= \underbrace{|FO|^2}_{h^2} + |FA|^2| \\ &= h^2 + (\frac{a}{2})^2 \\ &= \underbrace{(\frac{a}{10} * \sqrt{25+10\sqrt{5}})^2}_{h^2} + (\frac{a}{2})^2 \\ &= \frac{a^2}{100}(25+10\sqrt{5}) + \frac{25a^2}{100} \\ &= \frac{a^2}{100}(50+10\sqrt{5}) \end{aligned}$$

Skąd obliczmy promień okręgu opisanego na pięciokącie foremnym

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{a^2}{100}(50+10\sqrt{5})} \\ &= \underbrace{\frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}}_{R} \end{aligned}$$

Promień okręgu wpisanego w pięeciokąt foremny. Promień $r = |FO|$ okręgu wpisanego w pięciokąt foremny, obliczymy z trójkcata prostokątnego ΔAOF stosując twierdzenie Pitagoroasa. Mianowicie, kwadrat promienie R^2 równy jest sumie kwadratów przyprostokątnych $|FO|^2+|FA|^2|$, pisamy Zauważmy, że promień $r = |FO| = h$ okręgu wpisanego w pięciokąt foremny równy jest

$$r = \frac{a}{10} * \sqrt{25+10\sqrt{5}}$$

Przekątne pięciokąta foremnego. Pięciokąt foremny ma 5 przekątnych równych o długości

$$\begin{aligned} d = |EC| &= 2a * cos\frac{\pi}{5} \\ &= 2a * \frac{1+\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{a}{2}(1+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

1.11.4 Sześciokąt foremny

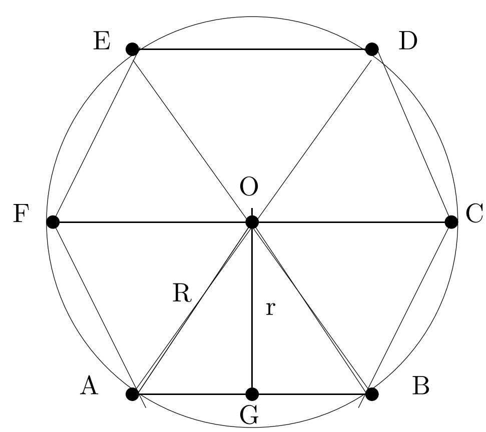
Sześciokąt foremny o sześciu bokach a równych

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FE| = a = R$$

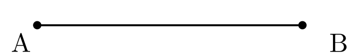
promieniowi R okręgu opisanego na sześciokącie i sześciu równych kątach

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEF = \angle EFC = \angle FAB = \alpha = 120^0.$$

w mierze łukowej $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.



Konstrukcja sześciokąta formnego przy pomocy cyrkla i linijki. Konstrukcja sześciokąta formnego przy pomocy cyrkla i linijki jest bardzo prosta, najbardziej prosta ze wszystkich konstrukcji figur foremnych.
Mianowicie, niech bedzie dany bok szściokąta jako odcinek $[A, B]$



Stawiamy cyrkiel w dowolniie wybranym punkcie O, środku okręgu i rozwartością cyrkla równą odcinkowi $[A, B]$ zakreślamy okrąg o promieniu $R = |AB| = a$ równym bokowi sześciokąta $ABCDEF$.
Następnie, stawiamy cyrkiel w dowolnym punkcie okręgu A i rozwartością cyrkla $R = a$ zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie B,dalej stawiamy cyrkiel w punkcie B i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie C, dalej stawiamy cyrkiel w punkcie C i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie D, dalej stawiamy cyrkiel w punkcie D i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie E, ,dalej stawiamy cyrkiel w punkcie E i za-

kreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie F.

Łączymy punkty A, B, C, D, E, F na okręgu przy pomocy linijki. W ten sposób narysowaliśmy sześciokąt foremny $ABCDEF$.
Zauważmy, że sześciokąt foremny składa się z $6-ciu$ trójkątów przystających i równobocznych obokach równych R i o wszystkich kątach równych $60^0 \sim \frac{\pi}{3}$.
Wszystkie z $6-ciu$ trójkątów

$$\Delta ABO,\ \Delta BCO,\ \Delta CDO,\ \Delta DEO,\ \Delta EFO,$$

mają wysokości równe $h = r = |OG|$ promieniowi okręgu wpisanego w sześciokąt.
Wysokość h obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ΔAGO.
Mianowicie

$$h^2 = R^2 - (\frac{R}{2})^2 = \frac{3R^2}{4}, \qquad h = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Pole sześciokąta foremnego składa się z 6-ciu pól trójkątów równobocznych o bokach równych $a = R = |AO|$.
Pole jednego trójkąta równobocznego równe jest

$$P_\Delta = \frac{1}{2}a * h = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Zatem, pole sześciokąta równe jest

$$P = 6 * P_\Delta = 6 * \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \underbrace{\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}}_{pole\ P\ szesciokata}.$$

Obwód sześciokąta foremnego równy jest

$$Ob = 6 * a \quad lub \quad Ob = 6 * R, \ bo \quad a = R.$$

1.11.5 Ośmiokąt foremny

Ośmiokąt foremny o ośmiu bokach równych

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FE| = |FG| = a$$

i o ośmiu równych kątach rówmych

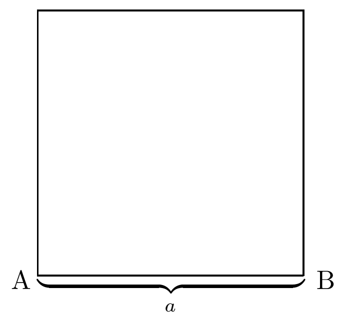
$$\begin{aligned} \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE &= \angle DEF = \angle EFG = \angle FGH \\ &= \angle GHA = \angle HAB = \alpha = 135^0 \end{aligned}$$

w mierze łukowej $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

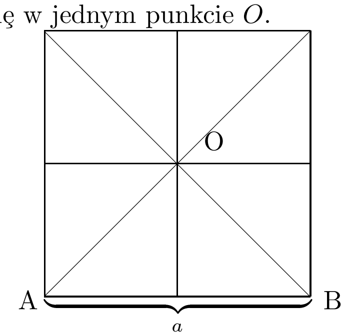
1.11.6 Konstrukcja ośmiokąta foremnego.

Konstrukcja ośmiokąta formnego o danym boku wykonamy przy pomocy cyrkla i linijki.
1. Konstruujemy kwadrat o danym boku $a = |AB|$ przy pomocy cyrkla i linijki. [20]

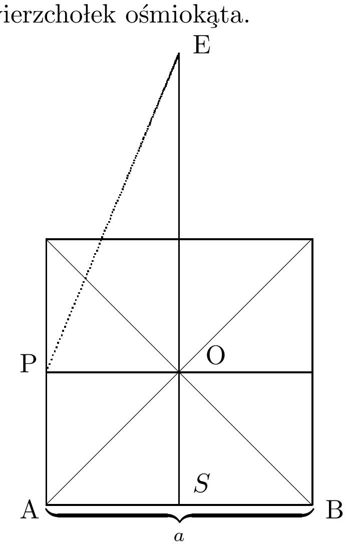
[20] Konstukcje elementarne opisane w oprzednich paragrafach



2. Rysujemy przekątne i symetralne boków kwadratu. Przekątne i symetralne boków kwadratu przecinają się w jednym punkcie O.



3. Na przdłużeniu symetralnej podstawy kwadratu odkładamy rozwartością cyrkla równą połowie przekątnej, to jest odcinek $|AO|$, stawiając cyrkel w punkcie O przecięcia przekątnych. Literą E oznaczamy wierzchołek ośmiokąta.



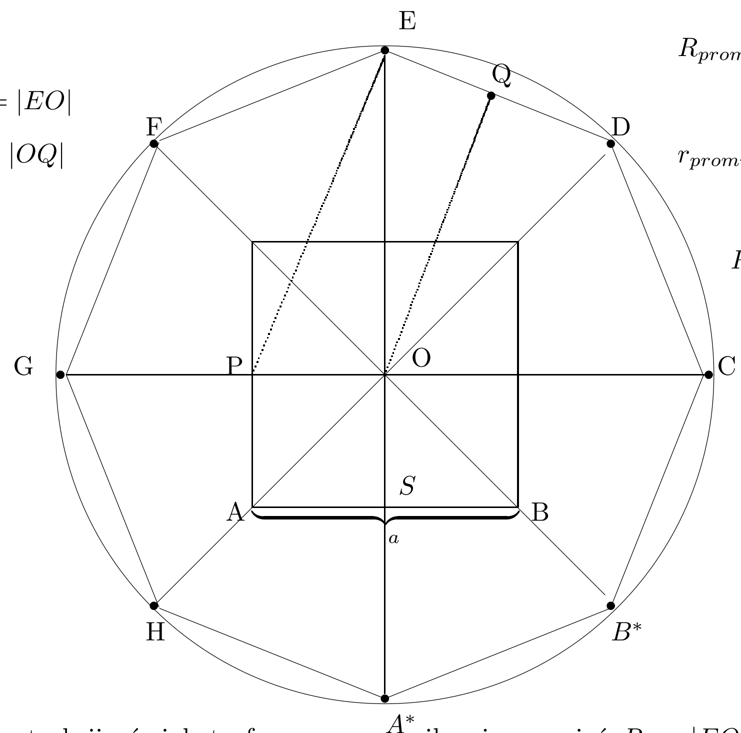
4. Rozwartością cyrkla równą promieniowi $R = |PE|$ rysujemy okrąg stawiając cyrkiel w punkcie O. Następnie przedłużamy przekątne kwadratu i środkowe boków do punktów przecięcia $A^*, B^*, C, D, E, F, G, H$ z okręgiem, to jest do wierzchołków ośmiokąta formnego A^*B^*CDEFH o danym boku $a = |AB|$.
Łączymy wierzhołki $A^*, B^*, C, D, E, F, G, H$ ośmiokąta przy pomocy linijki. W ten spoób skonstruowaliśmy ośmiokąt foremny

$$A^*B^*CDEFGH$$

o promeniu okręgu opisanego $R = |PE|$.

$R = |EO|$

$r = |OQ|$



$$R_{promien_R} = \underbrace{a\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}}_{prom.okr.\ opisan.}$$

$$r_{promien_r} = \underbrace{\frac{a}{2}(1+\sqrt{2})}_{prom.\ okr.wpisan.}$$

$$P_{pole} = \underbrace{2a^2(1+\sqrt{2})}_{pole\ osmiok.}$$

Z konstrukcji ośmiokąta foremnego wynika, że promień $R = |EO|$ okręgu opisanego na ośmiokącie równy jest przeciwprostokątnej $R = |EO|$ trójkąta prostokątnego ΔQEO.

$$\angle OEP = 22.5^0 \sim \frac{\pi}{8}, \qquad \angle EPO = 67.5^0 \sim \frac{3\pi}{8}.$$

Pole ośmiokąta foremnego. Zauważmy, że øśmiokąt foremny składa się z $8-miu$ trójkątów przystających i równoramiennych o równych rammionach promieniowi R okręgu opisanego na ośmiokącie i o wszystkich kątach równych $135^0 \sim \dfrac{3\pi}{4}$.
Wszystkie z $8-miu$ trójkątów

$$\Delta A^*B^*O,\ \Delta B^*CO,\ \Delta CDO,\ \Delta DEO,$$

$$\Delta EFO,\ \Delta FGO,\ \Delta GHO,\ \Delta HA^*O$$

mają wysokości równe $h = r = |OQ|$ promieniowi $r = h$ okręgu wpisanego w ośmiokąt.
Stosując twierdzenia Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ΔOQE obliczamy kwadrat wysokości

$$\begin{aligned} h^2 = |OE|^2 - |QE|^2 &= \underbrace{(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sqrt{2})^2 + (\frac{a}{2})^2}_{R^2} - (\frac{a}{2})^2 \\ &= \frac{a^2}{4}(1+\sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

Skąd obliczamy wysokości i promień okręgo wpisanego w ośmiokąt

$$h = r = \frac{a}{2}(1+\sqrt{2})$$

Promień R okręgu opisanego na ośmiokącie. Promień okręgu opisanego na ośmiokącie wynika z konstrukcji ośmiokąta foremnego. Jego wartość obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąt prostokątnego ΔOQE. Mianowicie kwadrat przeciwprostokątnej $R =$

$|EO|$ rówmny jest

$$\begin{aligned} R^2 = |EO|^2 &= |QO|^2 + |ES|^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2 \\ &= (\frac{a}{2}(1+\sqrt{2}))^2 + (\frac{a}{2})^2 \\ &= \frac{a^2}{4}(3+2\sqrt{2}) + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{2}\sqrt{2} \\ &= a^2(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Skąd obliczamy promień okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym

$$R = a\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

Pole ośmiokąta foremnego. Pole ośmiokąta foremnego składa się z $8-miu$ pól trójkątów równoramiennych o podstawie długości a i bokach długości R.
Pole jednego trójkąta równoramiennego równe jest

$$P_\Delta = \frac{1}{2}a * h = \frac{a^2}{4}(1+\sqrt{2})$$

Zatem, pole ośmiokąta równe jest

$$P = 8 * P_\Delta = 8 * \frac{a^2}{4}(1+\sqrt{2}) = \underbrace{2a^2(1+\sqrt{2})}_{pole\ P\ osmiokata}.$$

Obwód ośmiokąta foremnego równy jest $Ob = 8 * a$.

Promień r okręgu wpisanego w ośmiokąt i promień R okręgu opisanego na śmiokącie foremnym o danym boku, obliczymy również stosując związki trygonometryczne w trójkącie prostokątnym ΔOQE. Mianowicie, promień okręgu wpisanego w ośmiokąt

$$r = \frac{1}{2}a * ctg\frac{\pi}{8}$$

Wartość funkcji $ctg\frac{\pi}{8}$ obliczamy stosując tożsamość trygonometryczną

$$ctg\alpha - \frac{1}{ctg\alpha} = ctg2\alpha$$

dla $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$

$$\begin{aligned} ctg\tfrac{\pi}{8} - tg\tfrac{\pi}{8} &= \frac{cos\frac{\pi}{8}}{sin\frac{\pi}{8}} - \frac{sin\frac{\pi}{8}}{cos\frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{cos^2\frac{\pi}{8} - sin\frac{\pi}{8}}{sin\frac{\pi}{8} * cos\frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{2 * cos\frac{\pi}{4}}{sin\frac{\pi}{4}} = 2ctg\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Skąd mamy równość

$$ctg\frac{\pi}{8} - \frac{1}{tg\frac{\pi}{8}} = ctg\frac{\pi}{8} \qquad lub \qquad ctg^2\frac{\pi}{8} - 2ctg\frac{\pi}{8} - 1 = 0$$

Dla $z = ctg\frac{\pi}{8}$ znajdujemy wartość z rozwiązując równanie kwadratowe

$$z^2 - 2z - 1 = 0, \quad wyroznik \;\; \Delta = 8, \quad wartosc \;\; z = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Zatem $ctg\frac{\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$ i promień okręgu wpisanego w ośmiokąt foremny

$$r = \frac{1}{2}a * ctg\frac{\pi}{8} = \underbrace{\frac{a}{2}(1+\sqrt{2})}_{r}$$

Zadanie 1.25 *Oblicz obwód i pole ośmiokąta foremnego $ABCDCEFG$ o długości boku* $|AB| = 2$

Zadanie 1.26 *Mając promień $r = 8$ ośmiokąta foremnego, oblicz promień R okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym.*

Zadanie 1.27 *Mając dany bok $a = 3cm$ oblicz promień r okręgu wpisanego i promień R okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym.*

Zadanie 1.28 *Skonstruuj ośmiokąt fororemny o boku $a = 3cm$ przy pomocy cyrkla i linijki. Zmierz promień r okręgu wpisanego w ośmiokąt i promień R kręgu opisanego na ośmiokącie foremnym.*

Zadanie 1.29 (i) *Oblicz obwód i pole tr.ojkąta ΔABC o długości boków*

$$|AB| = 10, \quad |BC| = 8, \quad |AC| = 6$$

(ii) *Sprawdź czy trójkąt ΔABC jest prostokątny.*

Zadanie 1.30 *Oblicz obwód i pole trójkąta ΔABC o długości boków*

$$|AB| = 3, \quad |BC| = 5, \quad |AC| = 7$$

stosując wzór Herona

Zadanie 1.31 *Oblicz obwód i pole równoległoboku $ABCD$ o długości boków*

$$|AB| = |CD| = 4, \quad |BC| = |AD| = 5,$$

stosując wzór Herona

Zadanie 1.32 *Oblicz obwód i pole sześciokąta foremnego $ABCDCE$ o długości boku* $|AB| = 5$

Chapter 2

Geometria w przestrzeni. Stereometria

2.1 Wstęp.

W tym rozdziale zajmiemy się następującymi tematami:

1. Kartezjański układ współrzędnych.

   Punkty i wektory w przestrzeni.

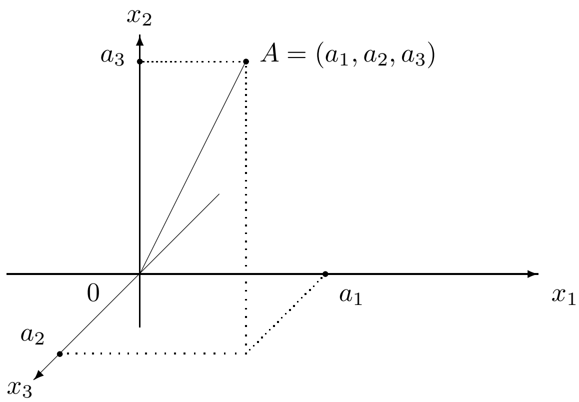
2. Parametryczne równanie prostej
3. Graniastosłupy i prostopadłościany,
   objętość i pole powierzchni
4. Ostrosłupy, objętość i pole powierzchni
5. Bryły obrotowe: walec, kula, stożek,
   objętość i pole powierzchni.

Wśród brył w przestrzeni, wyróżniamy bryły foremne i bryły platońskie. Bryły formne mają wszystkie ściany przystające. Bryły platońskie, do których należą czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan, uważane były w czasach starożytnych w Akademi Platona (427-347, B.C.) za figury idealne.

2.2 Punkty i wektory w przestrzeni kartezjańskiej

Położenie punktów i wektorów w przestrzeni określamy we współrzędnych kartezjańskich.

Podobnie jak na płaszczyźnie poło zenie figur geometrycznych w przestrzeni określamy we współrzędnych kartezjańskich.



Na osiach liczbowych o kierunku i zwrocie osi $x_1,\ x_2,\ x_3$ odkładamy współrzędne punktów w przestrzeni kartezjańskiej

$$R^3 = \{(x_1, x_2, x_2) :\ -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty.\}$$

Punkt $A = (a_1, a_2, a_3)$ w układzie współrzędnych kartezjańskich x_1, x_2, x_3 ma współrzędne

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3.$$

Na punktach

$$A = (a_1, a_2, a_3) \quad i \quad B = (b_1, b_2, b_3)$$

wykonujemy następujące operacje:

- Dodawanie punktów

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3). \end{aligned}$$

  Zatem suma punktów

$$A + B = C$$

  jest równa punktowi $C = (c_1, c_2, c_3)$ o współrzędnych

$$c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2, \quad c_3 = a_3 + b_3.$$

- Odejmowanie punktów

$$\begin{aligned} A - B &= (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3). \end{aligned}$$

  Zatem różnica punktów

$$A - B = C$$

  jest równa punktowi $C = (c_1, c_2, c_3)$ o współrzędnych

$$c_1 = a_1 - b_1, \quad c_2 = a_2 - b_2, \quad c_3 = a_3 - b_3.$$

- Mnożenie punktu przez liczbę t

$$t * A = t * (a_1, a_2, a_3) = (t * a_1, t * a_2, t * a_3).$$

Zatem iloczyn punktu przez liczbę t jest równy punktowi

$$C = (c_1, c_2, c_3)$$

o współrzędnych

$$c_1 = t * a_1,\ c_2 = t * a_2,\ c_3 = t * a_3.$$

Przykład 2.1 *Niech dane będą punkty* $A = (2, -3, 4)$ *i* $B = (2, -1, 3)$.
Oblicz

$$(i) \quad A + B, \quad (ii) \quad a - b, \quad (iii) \quad 2 * A + 3 * B.$$

Rozwiązanie. Obliczamy

$$\begin{aligned} (i)\ A + B &= (2, -3, 4) + (2, -1, 3) \\ &= (2 + 2, -3 - 1, 4 + 3) \\ &= (4, -4, 7). \\ Odpowiedz:\ A + B &= C, \quad C = (4, -4, 7). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii)\ A - B &= (2, -3, 4) - (2, -1, 3) \\ &= (2 - 2, -3 - (-1), 4 - 3) \\ &= (0, -2, 1) \\ Odpowiedz:\ A - B &= C, \quad C = (0, -2, 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii)\quad 2 * A + 3 * B &= 2 * (2, -3, 4) + 3 * (2, -1, 3) \\ &= (2 * 2 + 3 * 2, 2 * (-3) + 3 * (-1), 2 * 4 + 3 * 3) \\ &= (10, -9, 17). \end{aligned}$$

Odpowiedź: $2 * A + 3 * B = C, \quad C = (10, -9, 17)$.

Zadanie 2.1 *Niech dane będą punkty*

$$A = (3, 2, -1), \qquad B = (1, -1, 2).$$

Oblicz

$$(i) \quad A + B, \quad (ii) \quad A - B, \quad (iii) \quad 3 * A + 5 * B.$$

2.2.1 Wektory w przestrzeni

Niech dane będą punkty

$$A = (a_1, a_2, a_3), \qquad B = (b_1, b_2, b_3).$$

Wektor $\vec{AB}$ o paczątku w punkcie

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

i końcu w punkcie

$$B = (b_1, b_2, b_3)$$

określamy jako różnica punktów

$$\vec{AB} = B - A = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3].$$

[1] [2] Na przykład wektor związany o początku w punkcie $A = (0, 1, 3)$ i końcu w punkcie $B = (2, 0, 5)$ ma współrzędne

$$\vec{AB} = B - A = (2, 0, 5) - (0, 1, 3) = [2, -1, 2].$$

Dodawanie wektorów
Suma dwóch wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

równa jest wektorowi

$$\vec{Q} = [z_1, z_2, z_3] = [v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3]$$

o współrzędnych

$$z_1 = v_1 + w_1, \quad z_2 = v_2 + w_2, \quad z_3 = v_3 + w_3.$$

Przykład 2.2 *Oblicz sumę wektorów*

$$\vec{v} = [1, 2, 1] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1, 2]$$

Rozwiązanie. Suma

$$\vec{v} + \vec{w} = [1, 2, 1] + (2, 1, 2) = [1 + 2, 2 + 1, 1 + 2] = [3, 3, 3]$$

Odpowiedź: Sumą danych punktów $\vec{v} = [1, 2, 1]$ i $\vec{w} = [2, 1, 2]$ jest wektor $\vec{Q} = [3, 3, 3]$.

Odejmowanie wektorów
Różnica dwóch wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

równa jest wektorowi

$$\vec{Q} = [z_1, z_2, z_3] = \vec{v} - \vec{w} = [v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3]$$

o współrzędnych

$$z_1 = v_1 - w_1 \quad i \quad z_2 = v_2 - w_2, \quad z_3 = v_3 - w_3.$$

Przykład 2.3 *Oblicz różnię wektorów*

$$\vec{v} = [1, 2, 6] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1, 5]$$

Rozwiązanie. Obliczamy różnicę wektorów

$$\vec{v} - \vec{w} = [1, 2, 6] - [2, 1, 5] = [1 - 2, 2 - 1, 6 - 5] = [-1, 1, 1]$$

Odpowiedź: Wynikiem odejmowania danych wektorów $\vec{v} = [1, 2, 6]$ i $\vec{w} = [2, 1, 5]$ jest wektor $\vec{Q} = [-1, 1, 1]$.

---

[1] współrzędne v_1, v_2, v_3 wektora swobodnego $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ piszemy w nawiasach kwadrwtowych.

[2] Wektor swobodny określony jest przez jego długość, kierunek i zwrot, nie zależy od położenia na płaszczyźnie lub w przestrzeni.

2.2.2 Iloczyn skalarny wektorów

[3] Iloczyn skalarny wektorów jest ważną operacją na wektorach stosowaną w matematyce stosowanej, w fizyce, chemii i w innych przedmiotach ścisłych.

Defimnicja 2.1 *Iloczynem skalarnym wektorów $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ i $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ nazywamy liczbę*

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + v_3 * w_3$$

Zatem, iloczyn skalarny wektorów nie jest wektorem, natomiast jest liczbą

Przykład 2.4 *Oblicz iloczyn skalarny wektorów*

$$\vec{v} = [2, 5, 3] \qquad i \qquad \vec{w} = [7, 3, -2]. \tag{2.1}$$

Rozwiązanie. Stosując wzór (2.1) obliczamy iloczyn skalarny danych wektorów, piszemy

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w}) &= ([2, 5, 3] * [7, 3, -2]) \\ &= 2 * 7 + 5 * 3 + 3 * (-2) = 14 + 15 - 6 = 23. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Iloczyn skalarny danych wektorów $\vec{v} = [2, 5, 3]$ i $\vec{w} = [7, 3, -2]$ jest liczbą 23, piszemy

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 23.$$

Iloczyn skalarny wektorów zachowuje wszystkie własności operacji arytmetycznej mnożenia. Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \qquad i \qquad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

- iloczn skalarny jest przemienny

  $$(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{v})$$

  Istotnie, sprawdzamy,że

  $$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w}) &= v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + v_3 * w_3 \\ &= w_1 * v_1 + w_2 * v_2 + w_3 * v_3 \\ &= (\vec{w}, \vec{v}) \end{aligned}$$

- mnożenie skalarne wektorów jest rozdzielne względem dodawania

  $$(\vec{v}, (\vec{w} + \vec{Q})) = (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{Q})$$

  Istotnie sprawdzamy, że

  $$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w} + \vec{Q}) &= v_1 * (w_1 + z_1) + v_2 * (w_2 + z_2) + v_3(w_3 + z_3) \\ &= v_1 * w_1 + v_1 * z_1 + v_2 * w + 2 + v_2 * z_2 + v_3 * w_3 + v_3 * z_3 \\ &= \underbrace{v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + v_3 * z_3}_{(\vec{v},\vec{w})} + \underbrace{v_1 * z_1 + v_2 * z_2 + v_3 * z_3}_{(\vec{v},\vec{Q})} \\ &= (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{Q}) \end{aligned}$$

[3] Wielokość skalarna to znaczy wielkość określona liczbą

- Iloczyn skalarny wektora $\vec{v}$ przez siebie równy jest kwadratowi jego długości

$$\begin{aligned}(\vec{v},\vec{v}) &= v_1 * v_1 + v_2 * v_2 + v_3 * v_3 \\ &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = |\vec{v}|^2.\end{aligned}$$

Teraz podamy ważne twierdzenie w postaci warunku dostatecznego i koniecznego

Twierdzenie 2.1 .
Warunek dostateczny: Jeżeli iloczyn skalarny jest równy zero

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0$$

wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest równy zero to wektory $\vec{v}$, $\vec{w}$ są prostopadłe, piszemy

$$\vec{v}\perp\vec{w}$$

Warunek konieczny: Jeżeli wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe

$$\vec{v}\perp\vec{w}$$

to ich iloczyn sklarny jest równy zero

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0.$$

Razem warunek konieczny i dostateczny piszmy w symbolach

$$\vec{v}\perp\vec{w} \Longleftrightarrow (\vec{v},\vec{w}) = 0.$$

Istnieje kilka dowodów tego twierdzenia. Tutaj podamy dowód oparty na twierdzeniu Pitagorasa. Mianowicie, udowodnimy, że trójkąt o ramionach $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0$$

Dowód warunku dostatecznego. Zakładamy, że iloczyn skalarny wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest równy zero

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0$$

Udowodnimy, że wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe.
Obliczamy kwadrat długości różnicy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$

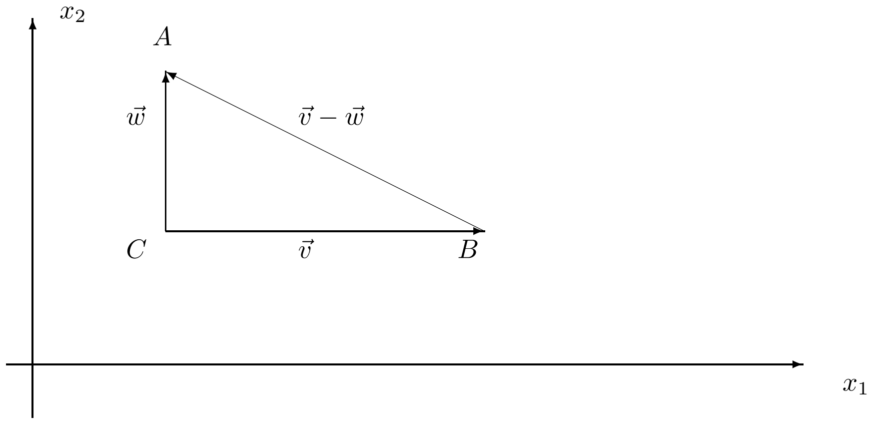
$$\begin{aligned}|\vec{v}-\vec{w}|^2 &= (\vec{v}-\vec{w},\vec{v}-\vec{w}) \\ &= (\vec{v},\vec{v}) - 2(\vec{v},\vec{w}) + (\vec{w},\vec{w}) \\ &= |\vec{v}|^2 - 2(\vec{v},\vec{w}) + |\vec{w}|^2\end{aligned}$$

Zauważmy, że jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0$$

to boki trójkąta ΔABC

$$|AB| = |\vec{v}|, \qquad |AC| = |\vec{w}|, \qquad |BC| = |\vec{v}-\vec{w}|$$



spełniają równość

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = |v \vec{-} w|^2 \tag{2.2}$$

Z drugiej strony z twierdzenia Pitagorasa wynika, że suma kwadratów dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości boku trzeciego (cf. (1.5),**??**) wtedy i tylko wtedy, jeżeli ten trójkąt jest prostokątny.
Zatem kąt $\angle ACB$ pomiędzy wektorami $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest prosty, jeżeli iloczyn skalarny tych wektorów równy jest zero. Koniec dowodu warunku dostatecznego.
Dowód warunku koniecznego. Zauważmy, że wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe.

$$\vec{v} \perp \vec{w}.$$

Udowodnimy, że iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

W tym celu obliczmy poraz drugi kwadrat dłudości różnicy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

$$\begin{aligned} |\vec{v}-\vec{w}|^2 &= (\vec{v}-\vec{w}, \vec{v}-\vec{w}) \\ &= (\vec{v},\vec{v}) - 2(\vec{v},\vec{w}) + (\vec{w},\vec{w}) \\ &= |\vec{v}|^2 - 2(\vec{v},\vec{w}) + |\vec{w}|^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Z założenia wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe. Zatem boki AB i AC trójkąta ΔABC są prostopadłe. Wobec tego trójkąt ΔABC jest trójkątem prostym.
Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że kwadrat długości przeciwprostokątnej $[B,C]$ równy jest sumie kwadratów długości przyprostokątnych $[A,B]$ i $[A,C]$, piszemy

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 \quad lub \quad |\vec{v}-\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2, \tag{2.4}$$

gdzie

$$|AB| = |\vec{v}|, \quad |AC| = |\vec{w}|, \quad |BC| = |\vec{v}-\vec{w}|.$$

Z równości (2.3) i (2.4) wynika równość stron

$$|\vec{v}-\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 - 2(\vec{v},\vec{w}) + |\vec{w}|^2$$

$$|\vec{v}-\vec{w}|^2 = \vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2,$$

$$|\vec{v}|^2 - 2(\vec{v},\vec{w}) + |\vec{w}|^2 = \vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2,$$

$$-2(\vec{v},\vec{w}) = 0$$

Zatem iloczyn skalarny wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest równy zero

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0,$$

jeżeli wektory $\vec{v} \perp \vec{w}$ są prostopadłe. Koniec dowodu warunku koniecznego. [4]

[4] Iloczyn skalarny $(\vec{v},\vec{w}) = 0$, wtedy i tylko wtedy, jeżeli $\vec{v} \perp \vec{w}$, w symbolach piszemy

$$\vec{v} \perp \vec{w} \iff (\vec{v},\vec{w}) = 0.$$

Przykład 2.5 *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [6, 8, 0], \quad \vec{w} = [9, 12, 0].$$

Rozwiązanie. Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzór (2.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = [6, 8, 0], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = [9, 12, 0]$$

Zatem iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 6 * 9 + 8 * 12 + 0 * 0 = 54 + 96 = 150.$$

równy jest 100.
Wiemy, że kwadrat długości wektora $\vec{v} = [6, 8, 0]$ jest równy iloczynowi skalarnemu tego wektora przez siebie.

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = 6 * 6 + 8 * 8 + 0 * 0 = 36 + 64 = 100$$

Skąd długość wektora

$$|\vec{v}| = \sqrt{100} = 10.$$

Podobnie obliczamy długość wektora $\vec{w} = [9, 12, 0]$

$$\begin{aligned} |\vec{w}| &= \sqrt{(\vec{w}, \vec{w})} \\ &= \sqrt{9 * 9 + 12 * 12 + 0 * 0} \\ &= \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15. \end{aligned}$$

Przykład 2.6 *Dla jakiej wartości parametru m wektory*

$$\vec{v} = [m, 6, 3], \quad \vec{w} = [3, 2, 4].$$

są prostopadłe?

Rozwiązanie. Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzór (2.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [m, 6, 3], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2] = [3, 2, 4]$$

Wektory są prostopadłe jeżeli ich iloczyn skalarny równy jest zero. Obliczamy iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = m * 3 + 6 * 2 + 3 * 4 = 3m + 24 = 0.$$

Skąd iloczyn skalarny równy jest zero

$$6m + 24 = 0, \quad dla \quad m = -\frac{24}{3} = -8.$$

Istotnie sprawdzamy, że dla $m = -8$ iloczyn skalarny wektora $\vec{v} = [m, 6, 3]$ przez wektor $\vec{w} = [3, 2, 4]$ równy jest zero

$$(\vec{v}, \vec{w}) = -8 * 3 + 6 * 2 + 3 * 4 = 24 - 24 = 0$$

Odpowiedź: Wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = [m, 6, 3], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = [3, 2, 4]$$

są prostopadłe dla parametru $m = -8$.

Zadanie 2.2 *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [12, 16, 0], \quad \vec{w} = [15, 20, 0].$$

Zadanie 2.3 *Dla jakiej wartości parametru m wektory*

$$\vec{v} = [m, 15, 2], \quad \vec{w} = [5, 3, 4].$$

są prostopadłe?

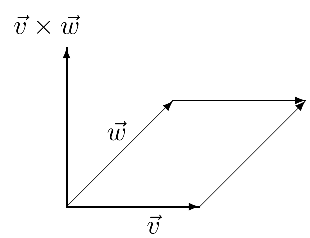
2.2.3 Iloczyn wektorowy w przestrzen trójwymiarowej R^3

Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad i \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

w przestrzeni trójwymiarowej

$$R^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : \ -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty \ \}$$



Wynikiem mnożenia wektorowego wektora $\vec{v}$ przez wektor $\vec{w}$ jest trzeci wector $\vec{v} \times \vec{w}$, którego wpółrzędne obliczamy z rozwinięcia Laplace'a macierzy utworzenej ze współrzędnych wektorów

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \right\}$$

Mianowicie iloczyn

$$\vec{v} \times \vec{w} = [Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\}, -Det(\left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right\}), Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right\}]$$

gdzie wyznaczniki -determinants

$$Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\} = v_2 * w_3 - v_3 * w_2,$$

$$-Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right\} = -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1),$$

$$Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right\} = v_1 * w_2 - v_2 * w_1$$

Skąd otzymamy wzór na współrzędne iloczynu wektorowy

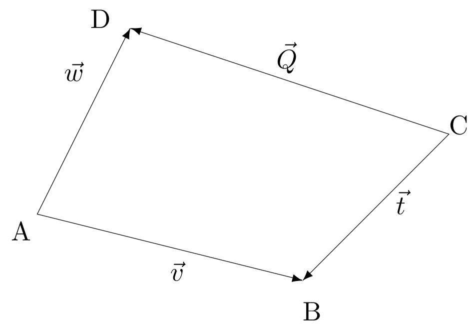
$$\vec{v} \times \vec{w} = [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]. \tag{2.5}$$

Wektor $\vec{v} \times \vec{w}$ jest prostopadły do wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$, a jego o długość równa jest polu równoległoboku o bokach $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Zatem długość wektora

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{|v_2 * w_3 - v_3 * w_2|^2 + |-(v_1 * w_3 - v_3 * w_1)|^2 + |v_1 * w_2 - v_2 * w_1|^2}$$

2.2.4 Pole czworokąta. Przykłady

Rozpatrzymy czworokąt $ABCD$



o wierzchołkach

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3)$$

$$C = (c_1, c_2, c_3), \quad D = (d_1, d_2, d_3)$$

rozpięty na wektorach

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = \vec{AD},$$

$$\vec{Q} = [z_1, z_2, z_3] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [t_1, t_2, t_3] = \vec{CD},$$

gdzie współrzędne wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{Q}$, $\vec{t}$ określamy przez różnice współrzędnych wierzchołków A, B, C, D czworokąta $ABCD$

$$\begin{aligned} v_1 &= b_1 - a_1, & v_2 &= b_2 - a_2, & v_3 &= b_3 - a_3, \\ w_1 &= d_1 - a_1, & w_2 &= d_2 - a_2, & w_3 &= d_3 - a_3, \\ z_1 &= b_1 - c_1, & z_2 &= b_2 - c_2, & z_3 &= b_3 - c_3, \\ t_1 &= d_1 - c_1, & t_2 &= d_2 - c_2, & t_3 &= d_3 - c_3. \end{aligned}$$

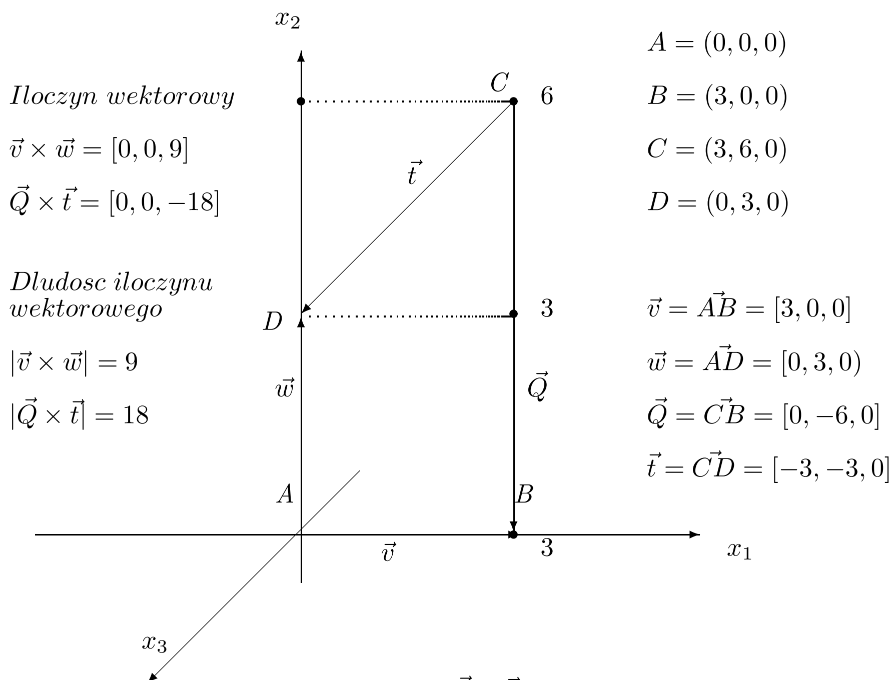
Stosując iloczyn wektorowy (cf. (2.5)) możemy obliczyć pole dowolnego czworokąta o danych współrzędnych jego wierzchołków. Mianowicie, pole czworokąta $ABCD$ równe jest połowie iloczynu wektorowego wektorów

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{Q} \times \vec{t}$$

Przykład 2.7 *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [3, 0, 0] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [0, 3, 0] = \vec{AD},$$

$$\vec{Q} = [0, -6, 0] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [-3, -3, 0] = \vec{CD}$$



Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{Q} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (2.5))

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{w} &= [0*0-3*0, -(3*0-0*0), 3*3-0*0] \\ &= [0,0,9]\end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned}\vec{Q} \times \vec{t} &= [-6*0-3*0, -(0*0-3*0), 0*3-6*3] \\ &= [0,0,-18]\end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$ i $\vec{Q}$, $\vec{t}$.
Mianowicie

$$\begin{aligned}P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{Q} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+9^2} + \frac{1}{2}|\sqrt{0^2+0^2+(-18)^2} \\ &= \frac{1}{2}*9 + \frac{1}{2}*18 \\ &= 4.5 + 9 = 13.5\end{aligned}$$

[5]

Rozpatrzmy inny przykład obliczania pola czworokąta stosując iloczyn wektorowy.

[5] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 w przestrzeni kartezjńskiej R^3 obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

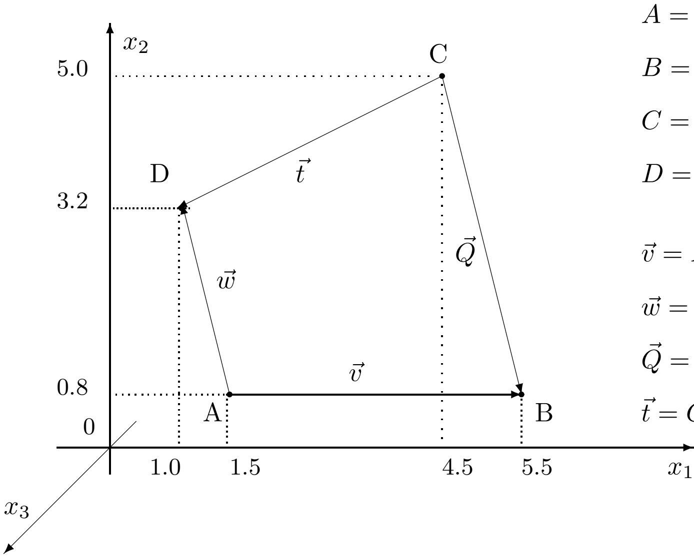
Przykład 2.8 *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [4.0, 0, 0] = \vec{AB},$$

$$\vec{w} = [-0.5, 2.4, 0] = \vec{AD},$$

$$\vec{Q} = [-1.0, 4.2, 0] = \vec{CB},$$

$$\vec{t} = [-3.5, -1.8, 0] = \vec{CD}$$



$$A = (1.5, 0.8, 0)$$

$$B = (5.5, 0.8, 0)$$

$$C = (4.5, 5.0, 0)$$

$$D = (1.0, 3.1, 0)$$

$$\vec{v} = \vec{AB} = [4.0, 0, 0]$$

$$\vec{w} = \vec{AD} = [-0.5, 2.4, 0)$$

$$\vec{Q} = \vec{CB} = [-1.0, 4.2, 0]$$

$$\vec{t} = \vec{CD} = [-3.5, -1.8, 0]$$

Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{Q} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (2.5))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 0 * 2.4, -(4 * 0 + 0.5 * 0), 4 * 2.4 + 0.5 * 0] \\ &= [0, 0, 9.6] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{Q} \times \vec{t} &= [4.2 * 0 + 1.8 * 0, -((-1) * 0 - (-3.5) * 0), 1 * 1.8 + 4.2 * 3.5] \\ &= [0, 0, 16.5] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v},\ \vec{w}$ i $\vec{Q},\ \vec{t}$.
Mianowicie

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{Q} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 9.6^2} + \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 16.5^2} \\ &= \frac{1}{2} * 9.6 + \frac{1}{2} * 16.5 \\ &= 4.8 + 8.25 = 13.05 \end{aligned}$$

[6]

[6] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 w przestrzeni kartezjńskiej R^3 obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

2.2.5 Parametryczne równanie prostej w przestrzeni

Proste operacje na punktach i wektorach w przestrzeni prowadzą do parametrycznego określenia równania prostej.
Mianowicie, rozpatrzmy dwa punkty

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad A = (b_1, b_2, b_3),$$

i wektor

$$\vec{AB} = B - A.$$

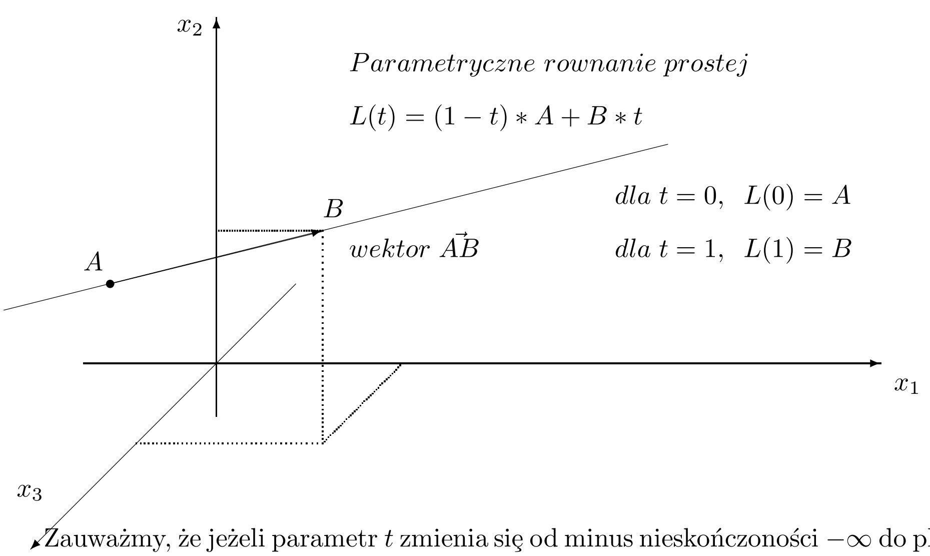
Wtedy łatwo piszemy równanie parametryczne prostej L

$$L(t) = A + t * \vec{AB}$$

lub

$$L(t) = (1 - t) * A + B * t.$$

Tutaj parametrem jest liczba t przebiegająca cały zbiór liczb rzeczywisty od minus nieskonoczności do plus nieskonoczności, piszemy $-\infty < t < \infty$.



Zauważmy, że jeżeli parametr t zmienia się od minus nieskończoności $-\infty$ do plus nieskończoności ∞, to punkt $L(t)$ poruszasza się wzdłuż prostej L.
Parametryczne równanie prostej, wyrażamy również w terminach danych punktów A i B. Ponieważ wektor $\vec{AB} = B - A$, to równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty A i B ma następującą postać:

$$\begin{aligned} & L(t) = A + (B - A) * t, \\ \text{lub} \quad & L(t) = A + \vec{AB} * t, \\ \text{lub} \quad & L(t) = (1 - t) * A + B * t, \quad -\infty < t < \infty. \end{aligned}$$

Przykład 2.9 *Napisz parametryczne równanie prostej*

(i) o początku w punkcie $A = (1, 2, -1)$ *i kierunku wektora* $\vec{v} = [2, -1, 4]$

(ii) przechodzącej przez punkty $A = (1, -1, 2)$ i $B = (2, 1, 2)$

Rozwiązanie.

(i) Podstawiamy dane:

1. punkt $A = (1, -1, 2)$ i wektor $\vec{v} = (2, -1, 4)$ do ogólnego równania

$$\begin{aligned} L(t) &= A + t * \vec{v} \\ &= (1, -1, 2) + t * (2, -1, 4) \\ &= (1 + 2t, -1 - t, 2 + 4t). \end{aligned}$$

Odpowiedź: $L(t) = (1 + 2t, -1 - t, 2 + 4t), \quad -\infty < t < \infty.$

(ii) Podstawiamy dane: punkt $a = (1, -1, 2)$ i punkt $B = (2, 1, 2)$ do ogólnego równania

$$\begin{aligned} L(t) &= (1 - t)A + t * B = (1 - t)(1, -1, 2) + t * (2, -1, 4) \\ &= ((1 - t) + 2t, (1 - t) - t, 2(1 - t) + 4t) \\ &= (1 + t, 1 - 2t, 2 + 2t) \end{aligned}$$

Odpowiedź: $L(t) = (1 + t, 1 - 2t, 2 + 2t), \quad -\infty < t < \infty.$

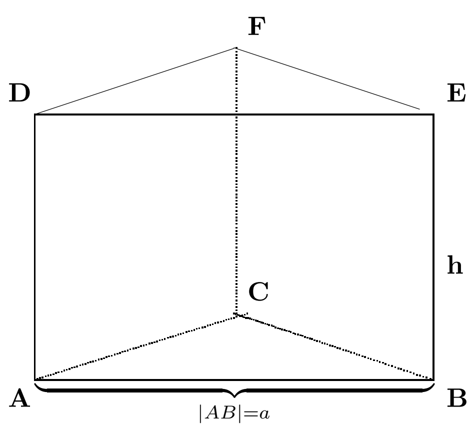
Zadanie 2.4 *Napisz parametryczne równanie prostej*

(i) o początku w punkcie $A = (0, 1, -1)$ i kierunku wektora $\overrightarrow{v} = [2, 1, 3]$

(ii) przechodzącej przez punkty $A = (3, 1, 2)$ i $B = (0, 2, 2)$

2.2.6 Graniastosłup o podstawie trójkąta równobocznego

Prostopadłościan o wierzchołkach A, B, C, D, E, F i podstawie trójkąta $\triangle ABC$ równobocznego o boku podstawy długości a.



Graniastosłup o podstawie trójkąta foremnego $\triangle ABC$, o długości boków

$$|AB| = |AC| = BC| = a$$

i o wysokości h ma pole powierzchni całkowitej składające się z dwóch podstaw i trzech ścian bocznych.

$$P_c = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a * h = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a * h$$

Objętość tego graniastosłupa obliczamy z prostego wzoru

$$V = (\frac{a^2\sqrt{3}}{2}) * h$$

Przykład 2.10 *Dla graniastosłupa o podstawie trójkąta foremnego o boku podstawy $a = 4$, i wysokości graniastosłupa $h = 6$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość.

Rozwiązanie. Podstawiając dane $a = 4$ i $h = 6$ do wzorów na pole całkowitej powierzchni i objętość, obliczamy

(i) pole całkowitej powierzchni graniastosłupa

$$P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a * h = \frac{4^2\sqrt{3}}{2} + 3 * 4 * 6 = 8\sqrt{3} + 72$$

(ii) objętość graniastosłupa

$$V = (\frac{a^2\sqrt{3}}{2}) * h = (\frac{4^2\sqrt{3}}{2}) * 6 = 48\sqrt{3}.$$

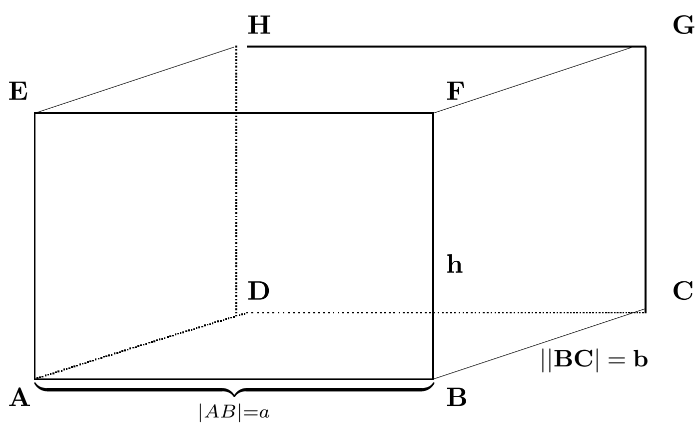
Zadanie 2.5 *Dla graniastosłupa o podstawie trójkąta foremnego o boku podstawy $a = 2$, i wysokości graniastosłupa $h = 5$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość.

2.2.7 Prostopadłościan o podstawie prostokąta

Prostopadłościan o podstawie prostokąta $ABCD$ o długości boków prostokąta $|AB| = a$, $|BC| = b$ i wysokości prostopadłościanu $|BF| = h$



Pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu składa się z dwóch podstaw i czterech ścian bocznych.

$$P_c = 2a * b + 2a * h + 2b * h.$$

Objętość prostopadłościanu obliczamy z prostego wzoru

$$V = a * b * h$$

Przykład 2.11 *Dla prostopadłościanu o podstawie prostokąta o wymiarach* $a = 4,\ b = 5$ *i wysokości* $h = 6$*, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu,

(ii) objętość prostopadłościanu.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów, obliczamy

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu

$$P_c = 2a * b + 2a * h + 2b * h = 2 * 4 * 5 + 2 * 4 * 6 + 2 * 5 * 6 = 148.$$

(ii) objętość prostopadłościanu $V = a * b * h = 4 * 5 * 6 = 120$.

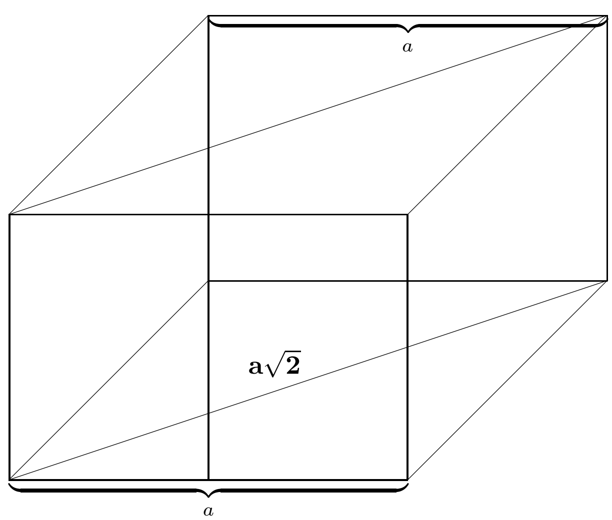
Zadanie 2.6 *Dla prostopadłościanu o podstawie prostokąta o wymiarach* $a = 2,\ b = 3$ *i wysokości* $h = 5$*, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu,

(ii) objętość prostopadłościanu.

2.2.8 Sześcian foremny

Sześcian foremny jest prostopadłościanem, który ma wszystkie sześć ścian kwadratami o boku a.



Sześcian Foremny o boku a

Powierzchnia $P_c = 6a^2$

Objętość $V = a^3$

Przekątna podstawy $= a\sqrt{2}$

Przekątna sešcianu $= a\sqrt{3}$

W sposób oczywisty znajdujemy, że

Pole powierzchni calkowitej	$P_c = 6a^2$.
Objetosc	$V_c = a^3$.
Przekatna podstawy	$d_p = a\sqrt{2}$.
Przekatna szescianu	$d = a\sqrt{3}$.

Przykład 2.12 *Dla sześcianu o boku $a = 4$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu,

(ii) objętość sześcianu.

(iii) przekątną podstawy sześcianu.

(iv) przekątna sześcianu.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów, obliczamy

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu $P_c = 6a^2 = 6 * 4^2 = 96$,

(ii) objętość sześcianu $V_c = a^3 = 4^3 = 64$.

(iii) przekątną podstawy sześcianu $d_p = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

(iv) przekątna sześcianu $d = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Zadanie 2.7 *Dla sześcianu o boku $a = 5$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu,

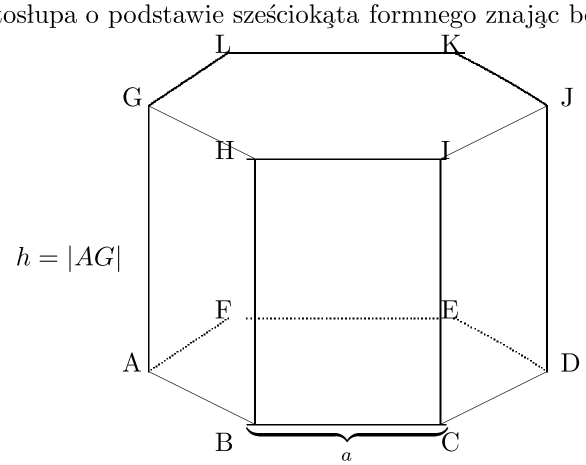
(ii) objętość sześcianu.

(iii) przekątną podstawy sześcianu.

(iv) przekątna sześcianu.

2.2.9 Graniastosłup o podstawie sześciokąta foremnego

Powierzchnia całkowita i objętość graniastosłupa o podstawie sześciokąta foremnego składa się z dwóch podstaw i sześciu ścian. Łatwo obliczamy pole całkowitej powierzchni i objętość graniastosłupa o podstawie sześciokąta formnego znając bok podstawy a i wysokość h.



Pole podstawy tego graniastosłupa składa się z pól 6-ciu trójkątów równocznych

$$P_{podstawy} = 6 * \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Pole całkowite powierzchni graniastosłupa o podstawie sześciokąta foremnego

$$P_c = 2P_{podstawy} + 6 * a * h \quad = \quad 2\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 6a * h,$$
$$P_c = 3a^2\sqrt{3} + 6a * h$$

Objętość graniastosłupa o pdstawie sześciokąta foremnego

$$V = P_{podstawy} * h = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} * h$$

Przykład 2.13 *Dla graniastosłupa o podstawie sześciokąta foremnego o boku $a = 2$ wysokości $h = 4$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów na całkowitą powierzchie i objętość, obliczamy

(i) pole całkowitej powierzchni

$$P_c = 3a^2\sqrt{3} + 6a * h \quad = \quad 3 * 2^2\sqrt{3} + 6 * 2 * 4 = 12\sqrt{3} + 48.$$

(ii) objętość tego graniastosłupa

$$V = P_l * h = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} * h = \frac{3 * 2^2\sqrt{3}}{2} * 4 = 6\sqrt{3}$$

Zadanie 2.8 *Dla graniastosłupa o podstawie sześciokąta foremnego o boku $a = 4$ wysokości $h = 5$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość.

2.3 Ostrosłupy

Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego podstawą jest dowolny wielokąt a ściany boczne są trójkąmi o wspólnym wierzchołku. Wśród ostrosłupów wyróżniamy ostrosłupy foremne, których podstawą jest wielokąd foremny i spodek wysokości leży w środku okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.

2.3.1 Czworościan foremny

Czworościan foremny ma wszystkie cztery ściany, które są trójkątami równobocznymi. Zatem, kąty ścian mają 60^o lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{3}$ radianów. Pole powierzchni każdej ze ścian $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, gdzie a oznacza długość każdej z krawędzi czworościanu.
Pole powierzchni całkowitej czwrościanu foremnego równa się czterem razy pole powierzchni jednej ze ścian.

$$P_c = a^2\sqrt{3}.$$

Krawędź l czworościanu obliczamy z twierdzenia Pitagorasa. Mianowicie, wiemy, że wysokość ściany bocznej $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Jej spodek leżey w połowie krawędzi podstawy $\frac{a}{2}$. Zatem obliczamy

$$l^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2 = (\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{a^2}{4}$$

Objętość czworościanu formnego równa jest jednej trzeciej pola podstawy razy wysokość H

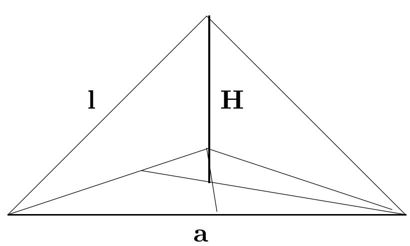
$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} * H$$

Wysokość H obliczamy w zależności od danej krawędzi a. Mianowicie, spodek wysokości h ściany bocznej leży na przecięciu wysokości podstawy w punkcie odległym od wierzchołka trójkąta o $\frac{2}{3}h = \frac{2}{3} * \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Krawędź czworościanu $l = a$. Z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy wysokość czworościanu

$$H^2 = a^2 - (\frac{2}{3}h)^2 = a^2 - (\frac{2}{3} * \frac{a\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{2}{3}a^2, \quad H = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Zatem objętość czworościanu

$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} * H = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} * a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$



Czworościan Foremny $P_c = a^2\sqrt{3}$, $V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$

2.3.2 Ostrosłup prawidłowy o podstawie kwadratu

Oznaczenia:

- a bok kwadratu w podstawie ostrosłupa
- H wysokość ostrosłupa
- h wysokość ściany bocznej ostrosłupa
- l krawędź boczna ostrosłupa
- P_a pole podstawy ostrosłupa

- P_0 pole ściany bocznej ostrosłupa
- P_c pole powierzchni całkowitej ostrosłupa
- V objętość ostrosłupa

Jasne, że pole podstawy ostrosłupa foremnego równa się polu kwadratu $P_a = a^2$ o boku a. Pole pobocznicy ostrosłupa foremnego P_l równe jest polu czterech trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości **h**. Natomiast, pole ściany bocznej ostrosłupa P_0 równe jest polu trójkąta równoramiennego o podstwie a i wysokości h.

$$P_0 = \frac{1}{2}a * h.$$

Wysokść ściany bocznej wyrażamy w zależności od boku a i krawędzi l. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość

$$h^2 = l^2 - (\frac{a}{2})^2, \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Wtedy pole ściany bocznej

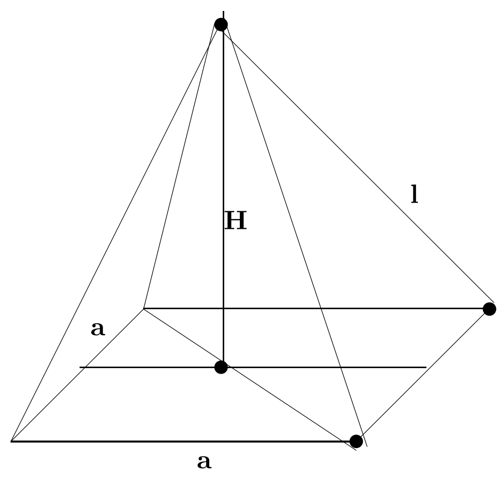
$$P_0 = \frac{1}{4}a * \sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Pole całkowitej powierzchni ostrosłupa równe jest polu czterech trójkątów w podstawie o boku a plus pola cztery trójkątów równoramiennych o podstawie a i ramionach l.
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa foremnego

$$P_c = a^2 + 4P_0, \qquad P_c = a^2 + a\sqrt{4l^2 - a^2}$$

i objętość ostrosłupa foremnego

$$V = \frac{1}{3}a^2 * H$$



Ostrosłup Foremny o Podstawie Kwadratu $\mathbf{P_c = a^2 + a\sqrt{4l^2 - a^2}}$, $\mathbf{V = \frac{1}{3}a^2 * H}$

2.3.3 Ostrosłup foremny o podstawie sześciokąta

Oznaczenia:

- a bok sześciokąta w podstawie ostrosłupa
- H wysokość ostrosłupa
- h wysokość ściany bocznej ostrosłupa
- l krawędź boczna ostrosłupa
- P_a pole podstawy ostrosłupa
- P_0 pole ściany bocznej ostrosłupa
- P_c pole powierzchni całkowitej ostrosłupa
- V objętość ostrosłupa

Jasne, że pole podstawy ostrosłupa foremnego równa się polu P_a sześciokąta foremnego o boku a

$$P_a = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Pole pobocznicy ostrosłupa foremnego P_l równe jest polu sześciu trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości **h**. Pole ściany bocznej ostrosłupa P_0 równe jest polu trójkąta równoramiennego o podstwie a i wysokości h.

$$P_0 = \frac{1}{2}a * h.$$

Wysokść ściany bocznej wyrażamy w zależności od boku a i krawędzi l. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość

$$h^2 = l^2 - (\frac{a}{2})^2, \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Wtedy pole ściany bocznej

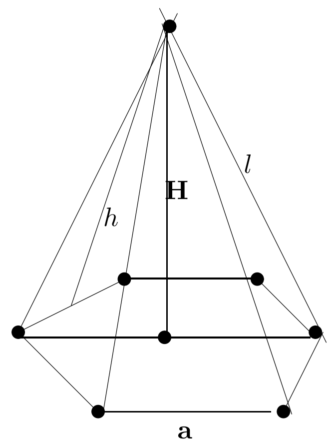
$$P_0 = \frac{1}{4}a * \sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Pole całkowitej powierzchni ostrosłupa równe jest polu sześciokąta foremnego w podstawie o boku a plus pola sze{sciu trójkątów równoramiennych o podstawie a i ramionach l.
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa foremnego

$$P_c = P_a + 6P_0, \qquad P_c = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{4}a\sqrt{4l^2 - a^2} \qquad P_c = \frac{3}{2}[a^2\sqrt{3} + a\sqrt{4l^2 - a^2}].$$

i objętość ostrosłupa foremnego

$$V = \frac{1}{3}\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} * H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} * H$$



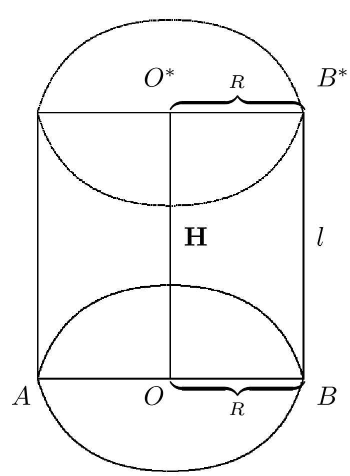
Ostrosłup $P_c = \frac{3}{2}[a^2\sqrt{3} + a\sqrt{4l^2 - a^2}],\ V = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3} * H$

2.4 Bryły obrotowe

Wśród brył obrotowych wyróżniamy walec, stożek i kulę.

2.4.1 Walec

Walec powstaje z obrotu prostokąta wokół jednego z jego boków. Prosty kształt walca prowadzi do oczywistych wzorów na jego całkowitą powierzchnie i objętość.
Na niżej podanym rysunku mamy zaznaczony promień r i wysokość h walca o średnicy podstawy $AB = 2R$ oraz promirniu górnej podstawy $O^*B^* = R$. Literami O^* i B^* oznaczone są środki okręgów w dolnej i górnej podstawie.



Powierzchnia całkowita walca wyrażona jest przez promień R i wysokość H.

$$P_c = 2\pi RH.$$

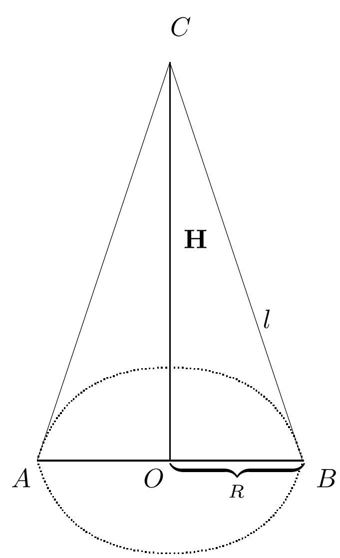
i objętość walca

$$V = \pi R^2 \, H.$$

2.4.2 Stożek

Stożek powstaje z obrotu trójkąta prostokątnego wokół jednej z jego przyprostokątnych.
Oznaczenia:

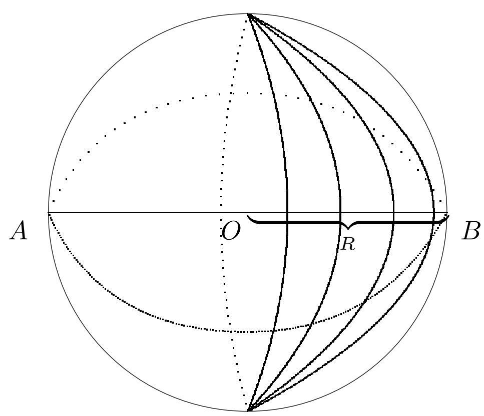
- R promień podstawy stożka
- l tworząca stożka
- H wysokść stożka
- średnica $AB = 2R$ podstawy stożka
- środek O podastawy stożka o wierzchołku C
- P_l powierzchnia boczna stożka
- P_c powierzchnia całkowita stożka
- V objętość stożka



- powierzchnia podstawy stożka $P_0 = \pi R^2$,
- powierzchnia boczna stożka $P_l = 2\pi R \, l$
- powierzchnia całkowita stożka $P_c = \pi R(R + H)$
- objętość stożka $\dfrac{1}{3}\pi R^2 H$.

2.4.3 Kula

Kula o środku O promieniu R ma powierzchnie $P = 4\pi R^2$ i objętość $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



Przykład 2.1 *Oblicz powierzchnie i objętość kuli o promieniu $R = 5$.*

Rozwiązanie. Podstawiając $R = 5$ do wzoru na powierzchnię kuli

$$S = 4\pi R^2$$

i do wzoru na objętość kuli

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

obliczamy powirzchnię kuli

$$S = 4\pi * 5^2 = 100\pi$$

i objętość kuli

$$V = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{500}{3}\pi$$