SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

MATEMATYKA
DLA SZKOŁY PODSTAWOWEJ
I LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCEGO

Tadeusz STYŠ

Zadanie 0.1 *Mały pastuszek zauważył lecące bociany i krzyknął chyba ich leci 100. Starszy pastuch odpowiedział dużo mniej, gdyby leciało ich dwa razy tyle, i pół tyle, i ćwierć tyle i ty żebyś z nimi poleciał to wtedy byłoby ich razem z tobą 100. Ile bocianów leciało po niebie?*

Obraz Józefa Chełmońskiego (1849-1914). Bociany

Rozwiązanie.

$$\underbrace{2*tyle}_{8*cwierc}+\underbrace{polowa*tyle}_{+\ 2*cwierc}+\underbrace{cwierc*tyle+1}_{+\ 1*cwierc+1}=\underbrace{100}_{=100}$$

$$11*cwierc=99, \quad cwierc=\frac{99}{11}=9,$$

$$cwierc=\frac{1}{4}*tyle$$

$$tyle=4*cwierc=\ 4*9=36.$$

$$Odpowiedz:\ Ilosc\,bocianow=36$$

Warszawa sierpień 2020

0.1 Wprowadzenie

Skrypt *"Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego"* został opracowany na podstawie kilkodziesięcio-letnej pracy i doświadczenia autora w różnych systemach edukacji głównie w szkołach wyższych, ale również w szkołach podstawowych i średnich w Polsce i Afryce. Zatem, tekst ten nie jest podręcznikiem dla szkoły podstawowej. Natomiast, jako materiał kompleksowy, obejmuje treść matematyki z zakresu podstawowego i rozszerzonego programu uczonego na drugim i trzecim etapie edukacji. To opracowanie całości matematyki podstawowej i licealnej może być szczególnie pomocne jako materiał do nauki indywidualnej.

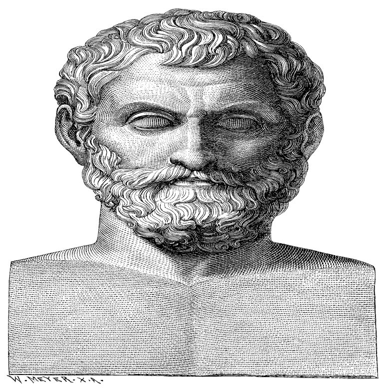
Materiał przedstawiony w skrypcie *"Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum..."* przekracza podstawę programową matematyki uczonej w szkołach podstawowych i w dużej części zawiera tematy programu matematyki uczonej w liceach i technikach. Naturalnie, ten rozszerzony zakres tematyki pozwala na wybór tematów zaawansowanych o stopniu trudności na poziomie uczniów szkoły podstawowej z większymi predyspozycjami i zainteresowaniami w przedmiotach ścisłych.

W skrypcie czytelnik znajdzie wiele interesujących algorytmów i twierdzeń z dowodami i przykładami spoza podstawowego programu matematyki na poziomie matematyki elementarnej.

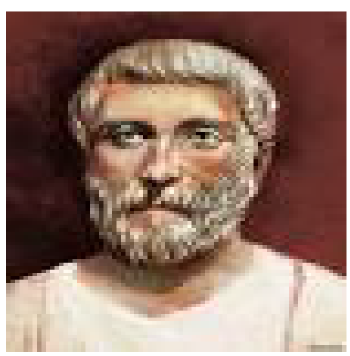
Tadeusz STYŚ Warszawa dn. 27-go września 2020r.

0.2 Matematyka Grecka

Od tysięcy lat B.C. w okresie Imperium Greckiego, Starożytni Grecy asymilowali osiągnięcia wielu kultur Bliskiego Wschodu i Indii z zakresu Astronomii, Architektury, Medycyny, Matematyki i Fizyki. Grecy stali się najlepszymi nauczycielami pozostawiając po sobie dobrze udokumentowaną literaturę z Matematyki i nauk ścisłych. Ważną częścią ich działalności była organizacja Szkół Filozofii, Matematyki i nauk ścisłych na obszarze Grecji, Egiptu i Mezopotamii.
Tales z Miletu (625-545 B.C.)



założył pierwszą Szkołę Jońską Astronmii, Matematyki i Folozofii.
Pitagoras (569-500B.C.) z Samos

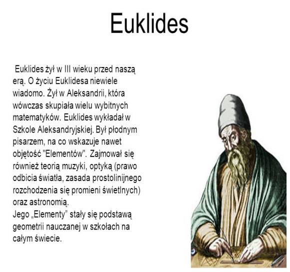


założył koedukacyjną szkołę mistyczną Filozofii i Matematyki w mieście Kroton nad morzem jońskim. Pitagoras miłośnk muzyki, stworzył podstawy wyznaczania wysokości dźwięków, autor Twierdzenia Pitagorasa o związkach miarowych w tròjkącie prostokątnym i tròjkach liczb pitagorejskicch a, b, c

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Euklides (330-275 B.C.) Dziekan wydziału Arytmetyki i Geometrii na Uniwersytecie w Aleksandrii (330-275 p.n.e.) przeszedł do historii jako jeden z największych matematyków starożytnych.
Autor ksiąg Elementy Arytmetyki i Geometrii. Geometria Euklidesa jest ciągle

uczona w szkołach podstawowych i średnich.



Archimedes (287-212 B.C.) syn astronoma z Syracus ogłosił znane powszechnie Prawo Archimedesa, sformułował podstawy rachunku nieskończenie małych. W wiekach średnich Newton (1642-1727) i Leibnitz (1646-1716) rozwineli ideę rachuneku niezkończenie małych. Wyniki ich badań o rachunku nieskończenie małych miały istotny wpływ na dalszy rozwòj matematyki i nauk ścisłych. Mianowicie, Newton i Leibnitz stworzyli podstawy rachunku ròżniczkowego i całkowego.[1]

(Archimedes (287-212 B.C.)

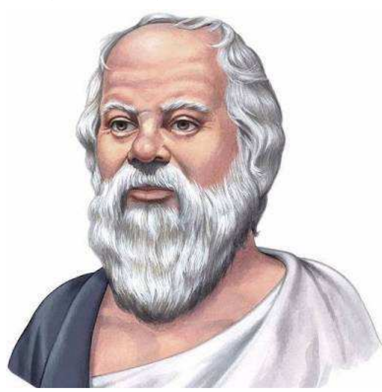
Wielu innych grekòw zasłużonych weszło na stałe do historii nauki. Wśròd nich Platon (429-428 B.C.) twòrca filozofii idealistycznej i Arystoteles (384-322 B.C.) Uczeń Platona i nauczyciel Aleksandra Wielkiego.
Platon założył słynną Akademie Platońską w Atenach. Po śmierci Platona

[1] Rachunek ròżniczkowy i całkowy, czyli Calculus, jest uczony na politechnikach i uniwersytetach jako przedmiot obowiązkowy

Arystoteles założył własną szkołę liceum w roku 343 B.C..

(Platon i Arystoteles)

Wymieńmy jeszcze Sokratesa (469-399 B.C.) ojca filozofii i miłośnika matematyki, który został ogłoszony nauczycielem wszechczasów.



Contents

Chapter 1

Liczby naturalne i całkowite

1.1 Wstęp

Koncepcja liczb naturalnych i proste operacje arytmetyczne były znane już od około 50 tysięcy lat temu. To wiemy na podstawie archeologicznych i historycznych odkryċ.
Natomiast pierwszy systematyczny opis arytmetyki liczb naturalnych opracowany został przez starożytnych greków w szkole Jońskiej Talesa, (625-545 p.n.e.), w szkole Pitagorejskiej (569-475 p.n.e.), na uniwersytecie w Aleksandrii przez Euklidesa (330-2675 p.n.e.) i przez Archmedesa z Syrakus (287-212 p.n.e.)
Teoria liczb jest w dalszym ciągu inspirującym przedmiotem licznych prac publikowanych w wiodących pisamach poświęconych teorii liczb. W ostatnich kilkudziesięciu latach obserwuje się szerokie zastosowania teorii liczb w projektowaniu systemów komputerowych w kryptografii i ochronie danych oraz w tworzeniu nowych algorytmów dla potrzeb administracji i programów społecznych.

1.2 Liczby naturalne

Zbiór liczb naturalnych dodatnich oznaczmy symbolem

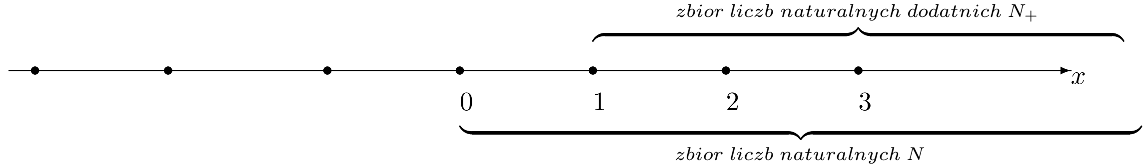
$$N_+ = \{1, 2, 3, ..., n, ...\} \tag{1.1}$$

Umownie do zbioru liczb naturalnych zalicza się zero. Wtedy zbiór liczb naturalnych oznaczamy symbolem

$$N = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\} \tag{1.2}$$

1.2.1 Własności liczb naturalnych

Oczywiste własności zbiorów N_+ i N.



Oś liczbowa. Liczby naturalne

Zbiór liczb naturalnych N_+ zawarty jest w zbiorze liczb naturalnych N, piszemy $N_+ \subset N$.

Suma liczb naturalnych $m+n$ też jest liczbą naturalną. Zatem dla dowolnych liczb naturalnych $m, n \in N$ ich suma

$$m+n \in N$$

należy do zbioru liczb naturalnych.
To znaczy że zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na operacje dodawania.
Na przykład dla $m = 7,\ n = 5$, mamy

$$m+n = 7+5 = 12 \in N$$

jest liczbą naturalną.
Operacja dodawania jest przemienna dla dowolnych liczb naturalnych m, n suma

$$m+n = n+m$$

Na przykład $5+3 = 3+5 = 8 \in N$.
Podobnie zbiòr liczb naturalnycj jest zamknięty na operacje mnożenia oraz operacja mnożenia jest przemienna
Mianowiciw, iloczyn liczb naturalnych $m*n$ jest liczbą naturalną.
Zatem dla dowolnych liczb naturalnych $m, n \in N$ ich iloczyn

$$m*n \in N$$

należy do zbioru liczb naturalnych.
To znaczy że zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na operacje mnożenia.
Na przykład dla $m = 7,\ n = 5$ mamy

$$m*n = 7*5 = 35 \in N$$

jest liczbą naturalną. Operacja mnożenia jest przemienna dla dowolnych liczb naturalnych m, n iloczyn

$$m*n = n*m$$

Natomiast, wynik odejmowania liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną.
Na przykład, rȯżnica liczb

$$3-5$$

nie jest liczbą naturalną, ale rȯżnica $3-5 = -2$ jest liczbą całkowitą. Liczby całkowite omȯwimy w następnym paragrafie.

1.2.2 Przykłady

Przykład 1.1 *Oblicz sumę kolejnych* 10 *liczb naturalnych*

$$S_{10} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami rȯwności, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc}
S_{10} & = & 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \\
S_{10} & = & 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 \\
--- & ... & ------------------ \\
2*S_{10} & = & \underbrace{11+11+11+11+11+11+11+11+11+11}_{10\ skladnikow\ sumy}
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{10} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{10} = 10 * 11 : 2 = 55$$

Przykład 1.2 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb naturalnych*

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy równości stronami, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc} S_n & = & 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ S_n & = & n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \\ ---- & ... & ------------------ \\ 2 * S_n & = & \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_n.

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{10}

$$S_{10} = \frac{10 * 11}{2} = 55$$

1.3 Liczby całkowite

Jak wiemy w zbiorze liczb naturalnych operacja odejmowania nie zawsze jest wykonalna. Na przykład nie ma liczby naturalnej, która byłaby wynikiem odejmowania liczby 9 od liczby 5, gdyż różnica

$$5 - 9$$

nie jest liczą naturalną.

1.3.1 Liczby przeciwne

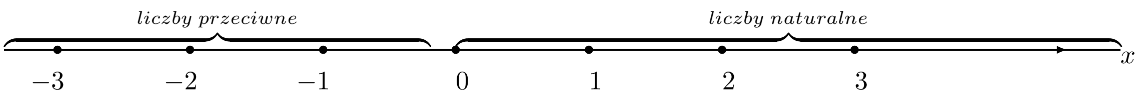
Liczbami przeciwnymi nazywamy dwie liczby leżące na osi liczbowej w tej samej odległości od zera, ale po przeciwnych stronach zera.
Liczby przeciwne mają tą własność, że ich suma wynosi 0.
Zatem liczba $-m$ jest przeciwna do liczby m wtedy

$$-m + m = 0$$

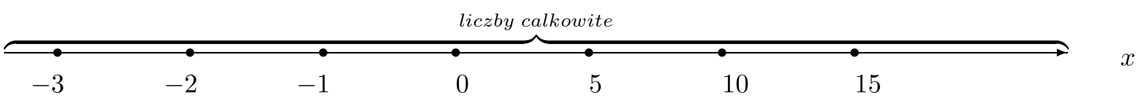
Na przykład

$$dla\, m = 7, \;\; liczba\, przeciwna\;\; -m = -7, \quad wtedy\;\; -7 + 7 = 0$$

Na osi liczbowej mamy zaznaczone liczby naturalne po prawej stronie zera, a po lewej stronie zera mamy zanaczone liczby przeciwne do liczb naturalnych.



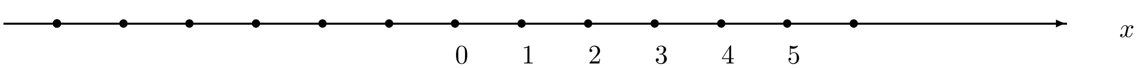
Niżej na osi liczbowej zaznacze są liczby całkowite



Wszystkie liczby naturalne razem ze wszystkimi liczbami do nich przeciwnymi tworzą zbiór liczb całkowitych
Zbiór liczb całkowitych oznaczamy literą C, piszemy

$$C = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

Przykład 1.1 *Zaznacz na osi liczbowej liczby przeciwne do wskazanych liczb naturalnych*



Oś liczbowa, liczby całkowite

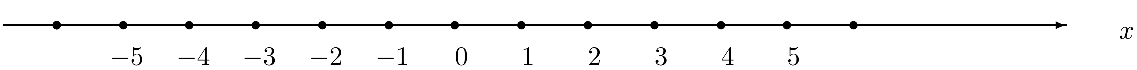
Niżej na osi liczbowej widzimy liczby naturalne

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

i liczby przeciwne do liczb naturalnych

$$0, -1, -2, -3, -4, -5$$

.



Oś liczbowa, liczby całkowite

Odejmując od 0 liczby naturalne znajdujemy liczby całkowite ujemne.

1.3.2 Proste przykłady odejmowania liczb naturalnych

Przykład 1.3 *Sprawdzamy odejmowowanie kolejnych liczb całkowitych od zera*

$$\begin{aligned} 0-1 &= -1, & 0-6 &= -6 \\ 0-2 &= -2, & 0-7 &= -7 \\ 0-3 &= -3, & 0-8 &= -8 \\ 0-4 &= -4, & 0-9 &= -9 \\ 0-5 &= -5, & 0-10 &= -10 \end{aligned}$$

Przykład 1.4 *Wykonaj sam odejmowanie*

$$\begin{aligned} 0-11 &= \quad, & 0-16 &= \\ 0-12 &= \quad, & 0-17 &= \\ 0-13 &= \quad, & 0-18 &= \\ 0-14 &= \quad, & 0-19 &= \\ 0-15 &= \quad, & 0-20 &= \end{aligned}$$

Przykład 1.5 *Sprawdź odejmowanie*

$$\begin{aligned} 5-10 &= -5 \;, & 10-16 &= -6 \\ 6-12 &= -6 \;, & 11-17 &= -7 \\ 7-13 &= -6 \;, & 12-18 &= -6 \\ 8-14 &= -5 \;, & 13-19 &= -6 \\ 9-15 &= -6 \;, & 14-20 &= -6 \end{aligned}$$

Przykład 1.6 *Wykonaj odejmowanie*

$$\begin{aligned} 1-10 &= \quad, & 10-20 &= \\ 3-12 &= \quad, & 11-21 &= \\ 5-14 &= \quad, & 12-22 &= \\ 7-15 &= \quad, & 13-23 &= \\ 9-16 &= \quad, & 14-24 &= \end{aligned}$$

1.4 Dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych

Dodanie liczby całkowitej ujemnej do liczby całkowitej dodatniej oznacza różnice tych liczb.

Przykład 1.7

$$\begin{array}{lllllllllll}
5+(-4) & = & 5-4 & = & 1, & & 9+(-7) & = & 9-7 & = & 2, \\
5+(-4) & = & 5-4 & = & 1, & & 9+(-7) & = & 9-7 & = & 2, \\
-15+5 & = & 5-15 & = & -10, & & -12+7 & = & 7-12 & = & -5, \\
-14+(-4) & = & -14-4 & = & -18, & & -21+(-7) & = & -21-7 & = & -28
\end{array}$$

Jeżeli mamy minus przed nawiasem, to nawias opuszczamy zmieniając znaki w nawiasie na przeciwne

Przykład 1.2

$$\begin{array}{ll}
-(-10) = 10, & -(1+2) = -1-2 = -3, \\
-(1-2) = -1+2 = 1, & -(-1-2) = 1+2 = 3, \\
-(-(-3)) = (-3) = -3, & -(-(1-2)) = (1-2) = -1
\end{array}$$

Przykład 1.8 *Sprawdź wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

$$\begin{array}{l}
-(9-10)-(5-6) = -9+10-5+6 = 2, \\
-(1+2)-(7-10) = -1-2-7+10 = 0, \\
(1-2)+(9-6) = 1+2+9-6 = 6, \\
-(-1-2)-(9-6) = 1+2-9+6 = 0, \\
-(-(2-3))+(-(4-5)) = (2-3)-(4-5) = -1-(-1) = -1+1 = 0, \\
-(-(1-2))-(-(4-5)) = (1-2)+(4-5) = -1+2+4-5 = 0.
\end{array}$$

1.5 Mnożenie liczb całkowitych

Iloczyn liczby całkowitej dodatnie przez liczbę całkowitą dodatnią jest liczbą całkowitą dodatnią

Przykład 1.3

$$8*8 \quad = \quad 64, \qquad 6*7 \quad = \quad 42$$

Iloczyn liczb całkowitych ujemnych jest dodatni

Przykład 1.4

$$(-8)*(-8) \quad = \quad 64, \qquad (-6)*(-7) \quad = \quad 42$$

Iloczyn liczby całkowitejch ujemnej przez liczbę dodatnią jest liczbą ujemną

Przykład 1.5

$$(-8)*(8) \quad = \quad -64, \qquad 6*(-7) \quad = \quad -42$$

Iloczyn każdej liczby całkowitych przez liczbę 0 jest równy 0

Przykład 1.6

$$(-8)*0 \quad = \quad 0, \qquad 0*(-7) \quad = \quad 0$$

Przykład 1.7 *Sprawdź wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$(-8) * (-8) + (-2) * 7 \quad = \quad 64 + (-14) \quad = \quad 64 - 14 \quad = \quad 50$$

Zadanie 1.1 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\begin{aligned} &(-9) * (-9) + (-6) * (-6) && = \\ &20 * (-1) - 14 * (-2) && = \\ &(-3) * 4 - (12 * (-2) - (-5) && = \end{aligned}$$

1.6 Dzielenie liczb całkowitych

Wynik dzielenia dwòch dodatnich liczb całkowitych jest liczbą dodatnią

Przykład 1.8

$$8 : 4 \quad = \quad 2, \qquad 15 : 3 \quad = \quad 5$$

Wynik dzielenia dwòch ujemnych liczb całkowitych jest liczbą dodatnią

Przykład 1.9

$$(-8) : (-4) \quad = \quad 2, \qquad (-15) : (-3) \quad = \quad 5$$

Wynik dzielenia liczby całkowitej ujemnej przez liczbę całkowitą dodatnią jest liczbą ujemną. Podobnie wynik dzielenia liczby całkowitej dodatniej przez liczbę całkowitą ujemną jest ujemną.

Przykład 1.10

$$(-8) : 4 \quad = \quad -2, \qquad 8 : (-4) \quad = \quad -5$$

Zadanie 1.2 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$(-8 : 4 + 14 : 7) - (9 : 3 - 6 : 2) =$$

$$(-18) : 3 + 12 : 3 - (15 : (-5) - (16 : 2)) =$$

$$((-24) : 6 + 12 : 3) - (15 : (-5) - (16 : 2)) =$$

1.7 Liczby parzyste, nieparzyste

Zbiór liczb naturalnych składa się z dwóch podzbiorów rozłącznych z podzbioru liczb parzystych i podzbioru liczb nieparzystych.
Liczby parzyste zapisujemy wzorem

$$n = 2k \quad \text{dla} \;\; k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

Mamy więc ciąg nieskończony liczb parzystych

$$0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...,$$

Liczby nieparzyste. Podobnie, liczby nieparzyste zapisujemy wzorem

$$n = 2k + 1, \quad \text{dla } \ k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

Zatem mamy ciąg nieskończony liczb nieparzystych

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...,$$

Zauważamy, że liczby parzyste dzielą się przez 2, natomiast liczby nieparzyste dzielą się przez 2 z resztą 1.

1.7.1 Przykłady

Przykład 1.9 *Suma trzech kolejnych liczb parzystych równa jest 84. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne liczby parzyste to

$$2n - 2, \quad 2n, \quad 2n + 2,$$

Ich suma

$$(2n - 2) + 2n + (2n + 2) = 6n = 84$$

Obliczamy n:

$$6n = 84, \quad n = 84 : 6 = 14$$

Obliczmy trzy kolejne liczby parzyste

$$\begin{aligned} &2n - 2 = 2 * 14 - 2 = 26, \\ &2n = 2 * 14 = 28, \\ &2n + 2 = 2 * 14 + 2 = 30 \end{aligned}$$

Sprawdzenie: Obliczamy sumę trzech kolejnych liczb parzystych

$$26 + 28 + 30 = 84.$$

Przykład 1.10 *Ile różnych liczb parzystych trzycyfrowych można utworzyć z cyfr* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$*?*

Rozwiązanie:
Liczby parzyste utworzone z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ mają trzy cyfry jedności
2 lub 4 lub 6
Napiszmy wszystkie różne liczby parzyste dwucyfrowe, które mają cyfrę jedności 2 lub 4 lub 6

12	14	16
22	24	26
32	34	36
42	44	46
52	54	56
62	64	66
72	74	76

Niżej podane są wszystkie różne liczby parzyste trzycyfrowe, które mają cyfrę jedności 2

112	212	312	412	512	612	712
122	222	322	422	522	622	722
132	232	332	432	532	632	732
142	242	342	442	542	642	742
152	252	352	452	552	652	752
162	262	362	462	562	662	762
172	172	372	472	572	672	772

Niżej podadane są wszystkie różne liczby parzyste trzycyfrowe, które mają cyfrę jedności 4

114	214	314	414	514	614	714
124	224	324	424	524	624	724
134	234	334	434	534	634	734
144	244	344	444	544	644	744
154	254	354	454	554	654	754
164	264	364	464	564	664	764
174	174	374	474	574	674	774

Niżej podane są wszystkie różne liczby parzyste trzycyfrowe, które mają cyfrę jedności 6

116	216	316	416	516	616	716
126	226	326	426	526	626	726
136	236	336	436	536	636	736
146	246	346	446	546	646	746
156	256	356	456	556	656	756
166	266	366	466	566	666	766
176	176	376	476	576	676	776

Teraz liczymy wszystkie liczby parzyste utworzone z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ W tabeli pierwszej z cyfrą jedności 2 jest ich $7 * 7 = 49$
Podobnie, w tabeli drugiej z cyfrą jedności 4 jest ich $7 * 7 = 49$
oraz w tabeli trzeciej z cyfrą jedności 6 jest ich $7 * 7 = 49$
Zatem razem w trzech tabelach jest różnych liczb parzystych

$$7 * 7 * 3 = 49 * 3 = 147$$

Przykład 1.11 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 51. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne liczby nieparzyste to

$$2n + 1, \quad 2n + 3, \quad 2n + 5.$$

Ich suma

$$(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) = 6n + 9 = 51.$$

Obliczamy n:

$$6n + 9 = 51, \quad 6n = 42, \quad n = 42 : 6 = 7.$$

Obliczmy trzy kolejne liczby nieparzyste

$$\begin{aligned} 2n + 1 &= 2 * 7 + 1 = 15, \\ 2n + 3 &= 2 * 7 + 3 = 17, \\ 2n + 5 &= 2 * 7 + 5 = 19. \end{aligned}$$

Sprawdzenie: Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych

$$15 + 17 + 19 = 51.$$

Przykład 1.12 *Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb parzystych*

$$S_{10} = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc} S_{20} & = & 2+4++6+8+10+12+14+16+18+20 \\ S_{20} & = & 20+18+16+14+12+10+8+6+4+2 \\ --- & ... & ------------------- \\ 2*S_{20} & = & \underbrace{22+22+22+22+22+22+22+22+22+22}_{10\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{20} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{20} = 10*22:2 = 110 \quad \text{lub} \quad \mathrm{S}_{20} = \frac{10*22}{2} = 110$$

Przykład 1.13 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb parzystch*

$$S_n = 2+4+\cdots+(2n-2)+2n$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{cccccccc} S_{2n} & = & 2+ & 4+ & 6+ & \cdots+ & 2n-2+ & 2n \\ S_{2n} & = & 2n+ & (2n-2)+ & (2n-4)+ & \cdots+ & 4+ & 2 \\ --- & ... & --- & --- & --- & \cdots & --- & --- \\ 2*S_{2n} & = & (2n+2)+ & (2n+2)+ & (2n+2)+ & \cdots+ & (2n+2)+ & (2n+2) \end{array}$$

$$\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{n\ skladnikow\ sumy}$$

Skąd obliczmy sumę S_{2n}.

$$S_{2n} = \frac{n(2n+2)}{2} = \frac{2n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{20}

$$S_{20} = \frac{10*22}{2} = 10*11 = 110$$

Przykład 1.14 *Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb nieparzystych*

$$S_{19} = 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy równości stronami, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc} S_{19} & = & 1\ \ +3+5+7+9+11+13+15+17+19 \\ S_{19} & = & 19+17+15+13+11+9+7+5+3+1 \\ --- & ... & ----------------- \\ 2*S_{19} & = & \underbrace{20+20+20+20+20+20+20+20+20+20}_{10\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{19} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{19} = 10*20:2 = 100 \quad \text{lub} \quad \mathrm{S}_{19} = \frac{10*20}{2} = 100$$

Przykład 1.15 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb nieparzystch*

$$S_n = 1 + 3 + \cdots + (2n-3) + (2n-1)$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{ccccccccc} S_{2n-1} & = & 1+ & 3+ & 5+ & \cdots+ & (2n-3)+ & (2n-1) \\ S_{2n-1} & = & (2n-1)+ & (2n-3)+ & (2n-5)+ & \cdots+ & 3+ & 1 \\ --- & ... & --- & --- & --- & \cdots & --- & --- \\ 2*S_{2n-1} & = & 2n+ & 2n+ & 2n+ & \cdots+ & 2n+ & 2n \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n\ skladnikow\ sumy}$$

Skąd obliczmy sumę S_{2n-1}.

$$S_{2n-1} = \frac{n*2n}{2} = n*n = n^2$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{19}

$$S_{19} = 10*10 = 100$$

Przykład 1.16 *Udowodnij, że wyrażenie algebraiczne*

$$a^2 + (a+2)(a+2) + (a+4)(a+4) + 1$$

jest podzielne przez 12 *dla każdej liczby nieparzystej a.*

Rozwiązanie:
Ponieważ liczba a jest nieparzysta to dla pewnego n

$$a = 2*n-1$$

gdyż dla każdej liczby nieprazystej jest naturalne n, takie że

$$a = 2*n-1$$

Podstawiając do tego wyrażenia algebraicznego

$$a = 2*n-1$$

otrzymamy

$$\begin{array}{rl} & a^2 + (a+2)(a+2) + (a+4)(a+4) + 1 = \\ = & (2*n-1)(2*n-1) + (2*n-1+2)(2*n-1+2)+ \\ + & 2*n-1+4)(2*n-1+4) + 1 = \\ = & (4*n*n-4*n+1) + (2*n+1(2*n+1)+ \\ + & (2*n+3)(2*n+3) + 1 = \\ = & (4*n^2-4*n+1) + (4*n^2+4*n+1) + (4*n^2+12*n+9) = \\ = & 12*n^2+12*n+12 = \\ = & 12*(n^2+n+1) \end{array}$$

Dla każdej nieparzystej liczby $a = 2*n-1$ to wyrażenie rozkłada się na czynniki 12 razy (n^2+n+1). Zatem to wyrażenie algebraiczne jest podzielne przez 12 dla każdej nieparzystej wartości parametru a.

1.7.2 Zadania

Zadanie 1.3 *Ile różnych liczb nieparzystych trzycyfrowych można utworzyć z cyfr* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$*?*

Zadanie 1.4 *Oblicz sumę kolejnych* 15 *liczb naturalnych*

$$S_{15} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$$

używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Zadanie 1.5 *Oblicz sumę kolejnych liczb naturalnych*

$$S_{19} = 10 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19$$

stosując wzór na sumę n kolejnych liczb naturalnych.

Zadanie 1.6 *Suma trzech kolejnych liczb naturalnych równa jest 45. Znajdź te liczby.*

Zadanie 1.7 *Suma trzech kolejnych liczb parzystych równa jest 120. Znajdź te liczby.*

Zadanie 1.8 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 180. Znajdź te liczby.*

Zadanie 1.9 *Wykaż, że wartość wyrażenia algebraicznego*

$$n^2 + n + 1$$

jest liczbą nieparzystą dla każdego naturalnego $n = 0, 1, 2, 3, ...;$

1.8 Operacja potęgowania

Mnożąc liczbę przez siebie kilka razy obliczamy jej potęgę.
Na przykład, mnożąc liczbę 2 otrzymamy jej kolejne potęgi

$$\begin{array}{lcl} 2^0 & = & 1 \\ 2^1 & = & 2 \\ 2*2 & = & 2^2 = 4 \\ 2*2*2 & = & 2^3 = 8 \\ 2*2*2*2 & = & 2^4 = 16 \end{array}$$

Podobnie, mnożąc liczb 3 przez siebie otrzymamy kolejne jej potęgi

$$\begin{array}{lcl} 3^0 & = & 1 \\ 3^1 & = & 3 \\ 3*3 & = & 3^2 = 9 \\ 3*3*3 & = & 3^3 = 27 \\ 3*3*3*3 & = & 3^4 = 81 \\ 3*3*3*3*3 & = & 3^5 = 243 \end{array}$$

Każda liczba $a \neq 0$ różna od zera podniesiona do potęgi 0 równą jest 1
[1] Na przykład

$$1^0 = 1, \quad 5^0 = 1, \quad 6^0 = 1, \quad 7^0 = 1, \quad 14^0 = 1, \quad 259^0 = 1$$

[1] Symbol 0^0 jest nieokreślony, nie ma sensu liczbowego

Ogólnie, potęgą liczby $a \neq 0$ różnej od zera o wykładniku naturalnym n nazywamy iloczyn tej liczby pomnożonej przez siebie n razy i zapisujemy

$$\begin{array}{ll} a^0 = 1, & 2^0 = 1 \\ \underbrace{a * a ... * a}_{n-czynnikow} = a^n, & \underbrace{2 * 2 ... * 2}_{n-czynnikow} = 2^n \end{array}$$

Wtedy a nazywamy podstawą i n wykładnikiem potęgi a^n.

Przykład 1.11 *Oblicz potęgi*

$$\begin{array}{llllll} 4^0 & = & , \; 4^1 & = & , 4^2 & = \\ 5^2 & = & , \; 5^3 & = & , 5^4 & = \\ 10^2 & = & , \; 10^3 & = & , 10^4 & = \end{array}$$

Operacje arytmetyczne na potęgach. Na potęgach następujące operacje są wykonalne:

1. Mnożenie potęg o tych samych podstawach

$$a^p * a^q = a^{p+q}$$

dla dowolnych p, q.
Na przykład dla $a = 2, \; p = 3, \; q = 5$ mamy

$$2^3 * 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$$

2. Dzielenie potęg o tych samych podstawach

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q},$$

dla dowolnych liczb p, q.
Na przykład dla $a = 2, \; p = 5, \; q = 3$ mamy

$$2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

3. Potęgowanie potęg o tych samych podstawach

$$(a^p)^q = a^{p*q},$$

dla dowolnych p, q.
Na przykład dla $a = 2, \; p = 2, \; q = 3$ mamy

$$(2^3)^2 = 2^{2*3} = 2^6 = 64$$

4. Potęga iloczynu liczb o tym samym wykładniku

$$(a * b)^n = a^n * b^n$$

równa jest iloczynowi potęg.
Na przykład dla $a = 2, \; b = 3, \; n = 3$ mamy

$$(2 * 3)^3 = 2^3 * 3^3 = 8 * 27 = 216$$

5. Potęga ilorazu liczb o tym samym wykładniku

$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$$

równa jest ilorazowi potęg.
Na przykład dla $a = 4,\ b = 2,\ n = 3$ mamy

$$(4:2)^3 = 4^3 : 2^3 = 64 : 8 = 8 \quad \text{lub} \quad (\frac{4}{2})^3 = \frac{4^3}{2^3} = \frac{64}{8} = 8$$

Przykład 1.17 *Oblicz*

$$\frac{2^3 * 3^4}{2^2 * 3^3}$$

Rozwiązanie. Wykonując działania na potęgach obliczmy

$$\frac{2^3 * 3^4}{2^2 * 3^3} \quad = \quad 2 * 3 = 6$$

Zadanie 1.10 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$(i) \quad 5^2 * 2^3 + 3^2 * 2^3 - 4^2 * 5^2$$

$$(ii) \quad \frac{2^3 * 3^2 + 5^2 * 7^2 - 2 * 6 * 8 - 1}{3^2 * 5^2 - 2^3 * 4^2 + 3}$$

Odp (ii) *:12*

Zadanie 1.11 *Oblicz*

$$\frac{3^3 * 2^3 - 3^2 * 2^2}{3 * 2^3 + 2 * 3}$$

Odp:6

1.9 Testy podzielności liczb naturalnych

- Pierwszy test podzielniści:
  Liczby parzyste

  $$0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, ...;$$

  zapisujemy w postaci ogòlnej

  $$n = 2k, \qquad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

  Liczby parzyste są podzielne przez 2.

  Obliczmy

  $$2 * k : 2 = k, \quad \text{lub} \qquad \frac{2 * k}{2} = k$$

  dla każdego naturalnego $k = 0, 1, 2, 3, 4, ...;$

  Przykład 1.12

  $$124 : 2 = 62, \quad \text{lub} \quad \frac{124}{2} = 62$$

  $$316 : 2 = 158, \quad \text{lub} \quad \frac{2528}{2} = 1264$$

- Drugi test podzielności
  Liczby podzielne przez 3

$$0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...;$$

zapisujemy w postaci ogólnej

$$n = 3k, \qquad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

Jasne, że liczby postaci $3 * k$, $k = 0, 1, 2, 3, ...;$ są podzielne przez 3, gdyż

$$3 * k : 3 = k, \quad \text{lub} \qquad \frac{3 * k}{3} = k$$

dla każdego naturalnego $k = 0, 1, 2, 3, 4, ...;$

Podzielność liczby n przez 3 poznajemy używając testu:

Liczba n jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma cyfr liczby n dzieli się przez 3.

1.9.1 Przykłady liczb podzielnych przez 3

Przykład 1.13 *Liczba* $n = 54$ *jest podzielna przez 3, ponieważ jej suma cyfr* $5+4 = 9$ *jest podzielna przez 3.*

$$54 : 3 = 18, \quad \text{bo} \quad 3 * 18 = 54$$

Podobnie,

Przykład 1.14 *Liczba* $n = 756$ *jest podzielna przez 3, ponieważ jej suma cyfr* $7+5+6 = 18$ *jest podzielna przez 3.*

$$756 : 3 = 252 \quad \text{bo} \quad 3 * 254 = 756$$

Test podzielności liczby $n = a_1a_0$ przez 3 ma proste uzasadnienie dla liczb dwucyfrowych. Liczba dwucyfrowa ma cyfrę dziesiątek a_1, i drugą cyfrę jedności a_0.

$$a_1a_0 = a_1 * 10 + a_0 = a_1(9 + 1) + a_0 = 9 * a_1 + a_1 + a_0$$

Pierwszy składnik $9 * a_1$ dzieli się przez 3 bo

$$9 * a_1 : 3 = 3a_1, \quad \text{lub} \qquad \frac{9 * a_1}{3} = 3a_1$$

Jeżeli drugi składnik sumy $a_1 + a_0$ dzieli się przez 3 to cała suma też dzieli się przez 3

1.9.2 Liczby dwucyfrowe podzielne przez 3. Przykłady

Przykład 1.15 *Liczba* $n = 57$ *ma cyfrę dziesiątek 5 i cyfrę jedności 7. Zatem suma cyfr* $5 + 7 = 12$ *dzieli sę przez* 3 *i liczba* 57 *też dzieli się przez* 3.
Rzeczywiście mamy

$$57 = 5 * 10 + 7 = 5 * (9 + 1) + 7 = 5 * 9 + 5 + 7,$$

$$(5 * 9 + 5 + 7) : 3 = 5 * 9 : 3 + 12 : 3 = 5 * 3 + 4 = 19$$

- Trzeci test podzielności.

1.9.3 Liczby podzielne przez 5

Zauważmy, że liczby

$$0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ...;$$

zapisujemy w postaci ogòlnej

$$n = 5k, \qquad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

Jasne że liczby postaci $5 * k$, $k = 0, 1, 2, 3, ...$; są podzielne przez 5, ponieważ

$$5 * k : 5 = k, \quad \text{lub} \qquad \frac{5 * k}{5} = k$$

dla każdego naturalnego $k = 0, 1, 2, 3, 4, ...;$

Podzielność liczby n przez 5 poznajemy używając testu:

Liczba n jest podzielna przez 5 wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej cyfra jedności jest 0 lub 5.

Przykład 1.18 *Liczba* $n = 50$ *jest podzielna przez 5, ponieważ jej cyfra jedności jest równa 0.*

$$50 : 5 = 10, \quad \text{bo} \quad 5 * 10 = 50$$

Przykład 1.19 *Liczba* $n = 265$ *jest podzielna przez 5, ponieważ jej cyfra jedności jest równa 5.*

$$265 : 5 = 53, \quad \text{bo} \quad 5 * 53 = 265$$

1.10 Dzielenie liczb przez liczby jednocyfrowe z resztą

Liczby naturalne, ktòre spełniają testy podzielności przez liczby 2 lub 3 lub 5, dzielą się z resztą 0. Wtedy mòwimy, że są podzielne przez 2 lub 3 lub 5. Jednak, jest dużo liczb, ktòre nie spełniają testòw podzielności, wtedy dzielenie wykonujemy z resztą.

1.11 Dzielenie z resztą

Rozpatrzmy następujące przykłady

Przykład 1.16 *Podziel liczbę* 13 *przez* 3

$$\frac{13}{3} \quad = \quad \frac{\overbrace{3 * 4 + 1}^{13}}{3} = 4 + \frac{1}{3}$$

Liczba 13 *dzielona przez 3 ròwna się 4 z resztą* 1.
Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{rl} 4 & \\ -- & \\ 13 & : 3 \\ -12 & \\ -- & \\ 1 & \end{array}$$

Odpowiedź: 13 podzielić przez 3 równa się 4 z resztą 1
Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$13 = 4 * 3 + 1$$

Przykład 1.17 *Podziel liczbę* 53 *przez* 8

$$\frac{53}{8} \quad = \quad \frac{\overbrace{6 * 8 + 5}^{53}}{8} = 6 + \frac{5}{8}$$

Liczba 53 *dzieli się przez* 8 *z resztą* 5.
Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{rl} 6 & \\ -- & \\ 53 & :8 \\ -48 & \\ -- & \\ 5 & \end{array}$$

Odpowiedź: 53 podzielić przez 8 równa się 6 z resztą 5
Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$53 = 6 * 8 + 5$$

Przykład 1.18 *Podziel liczbę* 85 *przez* 9

$$\frac{85}{9} \quad = \quad \frac{\overbrace{9 * 9 + 4}^{85}}{9} = 6 + \frac{4}{9}$$

Liczba 85 *dzieli się przez* 9 *z resztą* 4.
Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{rl} 9 & \\ -- & \\ 85 & :9 \\ -81 & \\ -- & \\ 4 & \end{array}$$

Odpowiedź: 85 podzielić przez 9 równa się 9 z resztą 4
Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$85 = 9 * 9 + 4$$

Ogólnie piszemy, że liczba n dzieli się przez liczbę d z resztą r według wzoru

Przykład 1.19 *Dzielimy liczbę* n *przez* d

$$\frac{n}{d} \quad = \quad \frac{\overbrace{k * d + r}^{n}}{d} = k + \frac{r}{d}$$

Liczba n dzieli się przez d z resztą r.
Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{rl} k & \\ -- & \\ n & :d \\ -k*d & \\ -- & \\ r & \end{array}$$

Odpowiedź: n podzielić przez d równa się k z resztą r
Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$n = k*d + r$$

1.12 Dzielenie liczb przez liczby dwucyfrowe z resztą

Przykład 1.20 *Podziel liczbę* 78 *przez* 42

$$\frac{78}{42} \quad = \quad \frac{\overbrace{42+36}^{78}}{42} = 1 + \frac{36}{42}$$

Liczba 78 *dzieli się przez* 42 *z resztą* 36.
Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{rl} 1 & \\ -- & \\ 78 & :42 \\ -42 & \\ -- & \\ 36 & \end{array}$$

Odpowiedź: 78 podzielić przez 42 równa się 1 z resztą 36
Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$78 = 1*42 + 36$$

Przykład 1.21 *Podziel liczbę* 1190 *przez* 25

$$\frac{1190}{25} \quad = \quad \frac{\overbrace{47*25+15}^{1190}}{25} = 47 + \frac{15}{25}$$

Liczba 1190 *dzieli się przez* 25 *z resztą* 15.
Teraz dzielimy według schematu

$$\begin{array}{rll} 47 & & \\ -- & & \\ 1190 & :25 & 25\ miesci\ sie\ w\ 119\ \ cztery\ razy,\ pisz emy\ nad\ kreska\ 4 \\ -100 & & 4*25 = 100; odejmujemy\ 100 \\ -- & & \\ 190 & & roznica\ 19\ dopisujemy\ nastepna\ cyfre\ 0, \\ -175 & & 25\ miesci\ sie\ w\ 190\ \ siedem\ \ razy\ piszemy\ nad\ kreska\ 7 \\ -- & & 7*25 = 175; odejmujemy\ 175 \\ 15 & & reszta\ 15 \end{array}$$

Odpowiedź: 1190 podzielić przez 25 równa się 47 z resztą 15
Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$1190 = 47 * 25 + 15 \qquad \text{lub} \qquad \frac{1190}{25} = 47 + \frac{15}{25} = 47 + \frac{3}{5}$$

Przykład 1.22 *Podziel liczbę* 1995 *przez* 17

$$\frac{1995}{17} \quad = \quad \frac{\overbrace{117 * 17 + 6}^{1995}}{17} = 117 + \frac{6}{17}$$

Liczba 1995 *dzieli się przez* 17 *z resztą* 6.
Teraz dzielimy według schematu

$$\begin{array}{rll}
117 & & \\
-- & & \\
1995 & :17 & 17\ \mathit{miesci\ sie\ w}\ 19\ \mathit{jeden\ raz,\ piszemy}\ 1\ \mathit{nad\ kreska} \\
-17 & & 1 * 17 = 17; \mathit{odejmujemy}\ 17 \\
-- & & \\
29 & & \mathit{roznica}\ 2\ \mathit{dopisujemy\ nastepna\ cyfre}\ 9 \\
-17 & & 17\ \mathit{miesci\ sie}\ 29\ \mathit{jeden\ raz,\ piszemy\ drugie}\ 1\ \mathit{nad\ kreska} \\
-- & & \mathit{roznica}\ 12\ \mathit{dopisujemy\ nastepna\ cyfre}\ 5 \\
125 & & 17\ \mathit{miesci\ sie}\ 125\ \mathit{siedem\ razy} \\
-119 & & 7 * 17 = 119\ \mathit{piszemy}\ 7\ \mathit{nad\ kreska} \\
-- & & \\
6 & & \mathit{reszta}\ 6
\end{array}$$

Odpowiedź: 1995 podzielić przez 17 równa się 117 z resztą 6
Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$1995 = 117 * 17 + 6 \qquad \text{lub} \qquad \frac{1995}{17} = 117 + \frac{6}{17}$$

1.12.1 Zadania

Zadanie 1.12 *Wykonaj dzielenie pisemne*

$$(i) \qquad 2546 : 3, \qquad (ii) \qquad 5796 : 9$$

Zadanie 1.13 *Wykonaj dzielenie pisemne*

$$(i) \qquad 455 : 13, \qquad (ii) \qquad 18011 : 31$$

Zadanie 1.14 *Wykonaj dzielenie pisemne z resztą*

$$(i) \qquad 2547 : 3, \qquad (ii) \qquad 5766 : 9$$

Zadanie 1.15 *Udowodnij, że liczba* $\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0$ *jest podizelna przez* 3 *wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma cyfr*

$$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$$

jest podzielna przez 3. *Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, żeby liczba* $\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0$ *była podzielna przez* 9.

Zadanie 1.16 *Podaj najmniejszą liczbę naturalą większą od liczby 2018 , która ma sumę cyfr 11.*

Zadanie 1.17 *Udowodnij, że liczba czterocyfrowa* $\alpha_3\alpha_2 25$ *jest podzielna przez* 25 *dla dowolnych cyfr* $\alpha_3,\ \alpha_2$.

Zadanie 1.18 .

(a) *Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 3. Wypisz 5 kolejnych liczb podzielnych przez 3.*

(b) *Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 3 z reszta 1. Wypisz 6 kolejnych liczb podzielnych przez 3 z reszytą 1*

(c) *Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 3 z resztą 2. Wypisz pierwsze 7 kolejnych liczb podzielnych przez 3 z resztą 2.*

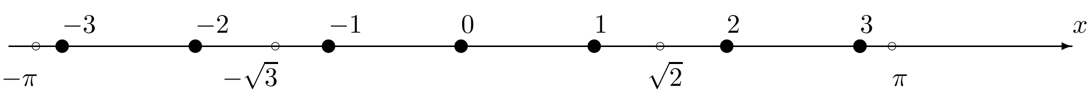
Zadanie 1.19 *Bracia Antek, Bolek, Wacek i Staś dostali od ojca razem 400 zł na zakupy szkolne. Bolek wydał o 4zł więcej niż Antek, Wacek wydał o 3 zł mniej niż Bolek, Staś wydał tyle samo co Wacek.*
Ile każdy z nich wydał na zakupy szkolne?

Zadanie 1.20 *W gospodarstwie były krowy, owce, kury i gęsi. Owiec było 2 razy więcej niż krów, gęsi było 4 razy więcej niż owiec, kur było 6 razy więcej niż gęsi. Razem mieli 124 nogi. Ile było w gospodarstwie krów, owiec, kur i gęsi ?*

Chapter 2

Liczby wymierne i liczby rzeczywiste

$$\sqrt{x^2} = |x|, \; \textit{dlatego} \;\; \sqrt{4} = 2, \;\; \textit{nigdy} \;\; -2$$



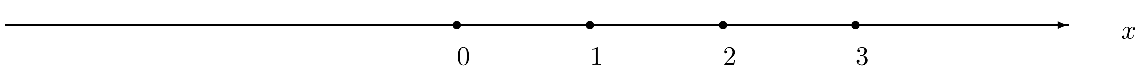
Oś liczbowa. Liczby rzeczywiste

2.1 O liczbach naturalnych i całkowitych

Zacznijmy od przypomnienia własności zbioru liczb naturalnych i liczb całkowitych.
Niżej podajemy graficzny obraz tych zbiorów na osi liczbowej.
Zbiór liczb naturalnych

$$N = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

zaznaczamy na osi liczbowej



Oś liczbowa, Liczby naturalne

Przypominamy, że w zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie. To znaczy, że suma dwóch liczb natualnych

$$m + n = s, \;\; m, n \in N, \;\; \text{to} \;\; s \in N$$

jest liczbą naturalną
Na przyklad

$$3 + 5 = 8, \quad 3, 5 \in N, \;\; 8 \in N$$

Podobnie iloczyn dwóch liczb naturalnych

$$m * n = s, \;\; m, n \in N, \;\; \text{to} \;\; s \in N$$

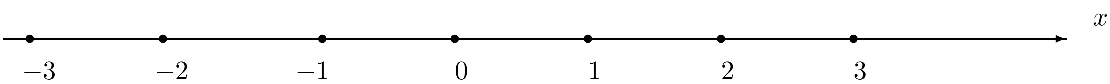
jest liczbą naturalną
Na przyklad

$$3 * 5 = 15, \quad 3, 5 \in N, \;\; 15 \in N$$

Dołanczając wszystkie liczby ujemne przeciwne do liczba naturalnych otrzymamy zbiòr liczb całkowitych Zbiòr liczb całkowitych

$$C = \{..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

zaznaczamy na osi liczbowej



Oś liczbowa. Liczby całkowite

Zbiòr liczb całkowitych jest zamknięty ze względu na dodawanie, odejmowanie i mnożenie. To znaczy, że suma dwòch liczb całkowitych

$$m + n = s, \quad m, n \in C, \quad \text{to} \quad s \in C$$

jest liczbą naturalną
Na przyklad

$$-10 + (-5) = -10 - 5 = -15, \quad -10, -5 \in N, \quad -15 \in N$$

Podobnie ròżnica dwòch liczb całkowitych

$$n - m = s, \quad n, m \in C, \quad \text{to} \quad s \in C$$

jest liczbą całkowitą
Na przyklad

$$-12 - (-5) = -12 + 5 = -7, \quad -12, -5 \in C, \quad -7 \in C$$

Ròwnież iloczyn dwòch liczb całkowitych

$$m * n = s, \quad m, n \in C, \quad \text{to} \quad s \in C$$

jest liczbą całkowitą
Na przyklad

$$-10 * (-5) = 50, \quad -10, -5 \in C, \quad 50 \in C$$

Natomiast, iloraz dwòch liczb całkowitych nie musi byċ liczbą całkowitą
Na przykład

$$\frac{3}{5}$$

jest ułamkiem, a nie jest liczbą całkowitą.
Niżej określamy liczby wymierne jako zbiòr wszystkich możliwych ułamkòw.

2.2 Ułamki zwykłe

Licznik i mianownik ułamka zwykłego

$$\frac{\overbrace{5}^{licznik}}{\underbrace{8}_{mianownik}}$$

Ułamki zwykłe

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{9}$$

W tych ułamkach liczniki są te same równe 1. Natomiast mianowniki tych ułamków są kolejnymi liczbami $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
Niżej podane ułamki mają różne liczniki i różne mianowniki.

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{9}{10}, \quad \frac{3}{11}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{7}{15}$$

2.3 Dodawanie ułamków. Przykłady

Dodawanie ułamków o tych samych mianownikach. W tym przypadku dodajemy liczniki zostawiamy ten sam mianownik.

Przykład 2.1 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1+1+1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+1+1+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Przykład 2.2 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{1+2+3+5}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

Dodawanie ułamków o różnych mianownikach. Żeby dodać ułamki o różnych mianownikach: należy znaleźć wspólny mienownik. Może to być najmniesza wspólna wielokrotna mianowników.

Przykład 2.3 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{20}{6} + \frac{15}{60} + \frac{24}{60} = \frac{20+15+24}{60} = \frac{59}{60}$$
$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{5}{20} + \frac{12}{20} = \frac{5+12}{20} = \frac{17}{20}$$

2.4 Odejmowanie ułamków

Odejmowanie ułamków o tych samych mianownikach. Odejmujemy ułamki o tych samych mianownikach tak: odejmujemy liczniki i zostawiamy ten sam mianownik

Przykład 2.4 *Odejmij ułamki*

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$
$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{4}{5} - \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4-2-1}{5} = \frac{1}{5}$$

Przykład 2.5 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{1+2+4}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{1+2+3+5}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$$

Przykład 2.6 *Odejmij ułamki*

$$\frac{7}{9}-\frac{1}{9}=\frac{7-1}{9}=\frac{6}{9}$$
$$\frac{13}{20}-\frac{5}{20}+\frac{3}{20}=\frac{13-5+3}{20}=\frac{12}{20}$$
$$\frac{37}{50}-\frac{23}{50}=\frac{37-23}{50}=\frac{14}{50}$$

Odejmowanie ułamkò o ròżnych mianownikach. Odejmując ułamki o ròżnych mianownikach: należy znaleźċ wspòlny mienownik. Może to być najmniesza wspòlna wielokrotna mianownikòw.

Przykład 2.7 *Odejmij ułamki*

$$\frac{5}{9}-\frac{1}{3}=\frac{5-3*1}{9}=\frac{2}{9}$$
$$\frac{33}{25}-\frac{21}{50}=\frac{2*33-21}{50}=\frac{45}{50}=\frac{9}{10}$$
$$\frac{14}{15}-\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{14-3*2+5*2}{15}=\frac{14-6+10}{15}=\frac{18}{15}$$
$$\frac{253}{500}-\frac{126}{1000}=\frac{2*253-126}{1000}=\frac{506-126}{1000}=\frac{380}{1000}$$

2.5 Mnożenie ułamkòw

Operacja mnożenia ułamkòw jest bardzo prosta. Ułamek $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ mnożymy przez ułamek $\frac{s}{t}$, $s \neq 0$ według schematu: licznik razy licznik, mianownik razy mianownik

$$\frac{p}{q}*\frac{s}{t}=\frac{p*s}{q*t}, \quad q\neq 0, \;\; t\neq 0$$

Przykład 2.8 *Pomnòż ułamki*

$$(a) \quad \frac{2}{3}*\frac{4}{5}=\frac{2*4}{3*5}=\frac{8}{15}$$
$$(b) \quad \frac{10}{13}*\frac{21}{25}=\frac{10*21}{13*25}=\frac{210}{273}$$

2.6 Dzielenie ułamkòw

Operacja dzielenia ułamkòw jest bardzo prosta. Ułamek $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ dzielimy przez ułamek $\frac{s}{t}$, $s \neq 0$ według schematu: licznik razy mianownik, mianownik razy licznik

$$\frac{p}{q}:\frac{s}{t}=\frac{p*t}{q*s}, \quad q,s\neq 0, \;\; p,t\neq 0$$

Przykład 2.9 *Podziel ułamki*

$$(a) \quad \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2*5}{3*4} = \frac{10}{12}$$
$$(b) \quad \frac{10}{13} : \frac{21}{25} = \frac{10*25}{13*21} = \frac{250}{273}$$

2.7 Zbiór liczb wymiernych

Dołanczając do zbioru liczb całkowitych wszystkie ułamki otrzymamy zbiòr liczb wymiernych. Ułamki

$$...-\frac{17}{5}, -\frac{7}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{2}, \frac{4}{5}, \frac{7}{4}, \frac{5}{3},, \frac{9}{2}, \frac{16}{3}, ...$$

nie są liczbami całkowitymi. Ogòlnie, dla liczb całkowitych p i $q \neq 0$ ułamek

$$\frac{p}{q},$$

nie jest liczbą całkowitą, jeżeli $q \neq 1$. Dla $q = 1$ ułamek jest liczbą całkowitą. Zbiòr wszystkich liczb całkowitych razem ze zbiòrem wszystkich możliwych ułamkòw tworzą zbiòr liczb wymiernych. Zbiòr liczb wymiernych oznaczamy literą W i piszemy

$$W = \{\frac{p}{q} : \text{ dla calkowitych liczb } p \text{ i } q \neq 0\}$$

Zbiór liczb wymiernych jest zamknięty ze względu na cztery operacje arytmetyczne dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez liczby różne od zera. To znaczy dla dowolnych liczb wymiernych $w_1, w_2 \in W$ wynik czterech operacji jest liczbą wymierną

$$w_1 + w_2 \in W, \quad w_1 - w_2 \in W, \quad w_1 * w_2 \in W, \quad \frac{w_1}{w_2} \in W, \ \ w_2 \neq 0.$$

Na przykład, dla

$$w_1 = -\frac{2}{3} \in W, \ w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

suma

$$w_1 + w_2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2*4+3*3}{12} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12} =\in W$$

jest liczbą wymierną
Dla

$$w_1 = -\frac{1}{2} \in W, \ w_2 = \frac{2}{3} \in W$$

różnica

$$w_1 - w_2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1*3-2*3}{6} = \frac{3-6}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \in W$$

jest liczbą wymierną
Dla

$$w_1 = \frac{2}{3} \in W, \ w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

iloczyn

$$w_1 * w_2 = \frac{2}{3} * \frac{3}{4} = \frac{2*3}{3*4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} =\in W$$

jest liczbą wymierną
Ròwnież, dla liczb

$$w_1 = \frac{2}{3} \in W, \ w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

iloraz

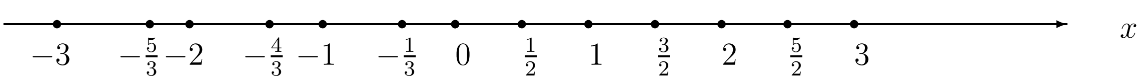
$$w_1 : w_2 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2 * 4}{3 * 3} = \frac{8}{9} \in W$$

jest liczbą wymierną

Zauważmy, że zbiór liczb wymiernych jest wszędzie gęsty. To znaczy pomiędzy dwoma różnymi liczbami wymiernymi w_1, w_2 istnieje "dużo" innych liczb wymiernych, na prrzykład ich średnia arytmetyczna $\frac{w_1 + w_2}{2} \in W$.

Ponadto, zbiór liczb wymiernych W jest najmnieszym zbiorem liczbowym zamkniętym ze względu na cztery operacje arytmetyczne. Mianowicie, złóżmy na chwile, że liczba wymierna x nie należy do zbioru W, $(x \notin W)$. Ponieważ każda liczba wymierna ma postać $\frac{p}{q}$ dla pewnych całkowitych p i $q \neq 0$. To znaczy, że nie ma liczb wymiernych poza zbiorem W.

Liczby wymierne są reprezentowane jako punkty na osi liczbowej



Oś liczbowa. Liczby wymierne

2.8 Liczby rzeczywiste

Dotychczas poznaliśmy zbiòr liczb naturalnych N, zbiòr liczb całkowitych C i zbiòr liczb wymiernych W. Wiemy, że w zbiorze liczb naturalnych wykonalne są dwie operacje arytmetyczne, dodawanie i mnożenie, natomiast wynik odejmowania lub dzielenia dwòch liczb naturalnych może nie byċ liczbą naturalną.
Rozszerzeniem zbioru liczb naturalnych N jest zbiòr liczb całkowitych C. Zatem wszystkie liczby naturalne są liczbami całkowitymi, piszemy $N \subset C$. W zbiorze liczb całkowitych C wykonalne są trzy operacje arytmetyczne dodawanie odejmowanie i mnożenie, a wynik dzielenia dwòch liczb całkowitych może nie byċ liczbą całkowitą.
Rozszerzeniem zbioru liczb całkowitych C jest zbiòr liczb wymiernych W. Zatem wszystkie liczby całkowite są liczbami wymiernymi, piszemy $C \subset W$. W zbiorze liczb wymiernych W wykonalne są wszystkie cztery operacje arytmetyczne dodawanie odejmowanie i mnożenie i dzielenie.
Zauważmy, że w zbiorze liczb wymiernych W nie zawsze jest wykonalna operacja odwrotna do operacji potęgowania.
Na przykład, nie ma liczby wymiernej x, ktòrej kwadrat ròwny byłby 2. Inaczej ròwnanie

$$x^2 = 2$$

nie ma rozwiązania w zbiorze liczb wymiernych.
Istotnie, gdyby istniała liczba wymierna

$$x = \frac{p}{q}, \ q \neq 0,$$

o największym wspólnym dzielniku $NWD(p,q) = 1$ to ta liczba wymierna byłaby rozwiązaniem równania

$$(\frac{p}{q})^2 = 2, \qquad i \quad p^2 = 2q^2.$$

Wtedy liczba całkowita p byłaby liczbą parzystą, to znaczy $p = 2k$ dla pewnej liczby całkowitej k. W tym przypadku liczba q musiałaby być również liczbą parzystą, to znaczy

$$q = 2s$$

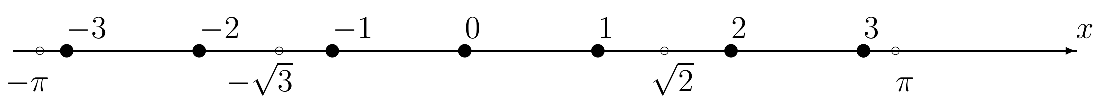
dla pewnego całkowitego s.
W konsekwencji mamy nierówność $NWD(p,q) >= 2$, która przeczy istnieniu liczby wymiernej w postaci nieskracalnego ułamka $\frac{p}{q}$, w którym największy wspólny dzielnik licznika p i mianownika q, $NWD(p,q) = 1$.
Kolejnym rozszerzeniem zbiorów liczb

$$N,\ C,\ W$$

jest zbiór liczb rzeczywistych R w którym operacja odwrotne do potęgowanie jest wykonalna.
Do zbioru liczb rzeczywistych należą wszystkie liczby wymierne i wszystkie liczby niewymierne takie jak

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[5]{7}\ \ \pi, ...;$$

$\sqrt{x^2} = |x|$, *dlatego* $\sqrt{4} = 2$, *nigdy* -2



Oś liczbowa. Liczby rzeczywiste

Zbiór liczb rzeczywistych

$$R = \{........ -\pi, -3, -\sqrt{5}, -2, -\sqrt{2} - 1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, \sqrt[3]{9}, 3, \pi...;\}$$

2.9 Zadania

Zadanie 2.1 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$20\frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})}{(2 - \frac{1}{3})(1 + \frac{2}{3})}$$

Zadanie 2.2 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$5[(\frac{4}{5} + \frac{7}{10})(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}) + (\frac{4}{5} - \frac{7}{10})(\frac{4}{5} + \frac{7}{10})]$$

Zadanie 2.3 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{1}{2}(\frac{2}{5} + 1.5) : (\frac{5}{7} - 1\frac{2}{3})$$

Zadanie 2.4 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego*

$$36(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})(\frac{a}{b} - \frac{b}{a})$$

dla $a = 3$ *i* $b = 2$

Zadanie 2.5 *Wykonaj operacje arytmetyczne*

$$a * b, \quad a - b, \quad b : a$$

dla $a = 3 + \sqrt{7}, \quad b = 4 - 2\sqrt{7}$

Zadanie 2.6 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\sqrt{67 - \sqrt[3]{27}}$$

Zadanie 2.7 *Udowodnij, że liczba* $\sqrt{3}$ *jest liczbą niewymierną*

Zadanie 2.8 *Udowodnij, że liczba* $\sqrt[3]{7}$ *jest liczbą niewymierną*

Zadanie 2.9 *Znajdź wartości parametrów* a *i* b *dla których*

$$a\sqrt{b} = \sqrt{50} + \sqrt{128} + \sqrt{162}$$

Zadanie 2.10 *Dla zbiorów*

$$A = \{x : \ -\infty < x < 5\} \quad \text{oraz} \quad B = \{x : \ 2 < x \leq 9\}$$

Zaznacz na osi liczbowej alternatywę $A \smile B$ *i koniukcję* $A \frown B$ *tych zbiorów.*

Chapter 3

Wyrażenia arytmetyczne i algebraiczne

Zacznijmy od sformułowania pojęć wyrażenia arytmetycznego i algebraicznego.

Definition 3.1 *Wyrażeniem arytmetycznym nazywamy ciąg liczb połączonych czterema operacjemi arytmentycznymi dodawania, odejmowania mnożenia i dzielenia przez liczby różne od zera.*

Na przykład, wyrażenie

$$\frac{3*4+6:2-2*3}{2^3+3^2-8:2}$$

jest wyrażeniem arytmetycznym składającym się z ciągu liczb

$$3, 4, 6, 2, 2, 3, \quad licznik, \quad 2, 3, 3, 2, 8, 2, \quad mianownik$$

połączonych operacjemi

$$*,\ +,\ :,\ -,\ *, /,\ {}'+,\ {}'-,\ :$$

Podobnie definiujemy wyrażenia algebraiczne. Mianowicie

Definition 3.2 *Wyrażeniem algebraicznym nazywamy ciąg liczb lub liter połączonych czterema operacjemi arytmentycznymi dodawania, odejmowania mnożenia i dzielenia przez liczby lub litery, których wartości są różne od zera.*

Na przykład

$$\frac{a*4+x:2-2*3}{x^3+3^2-b:2}$$

jest wyrażeniem algebraicznym składającym się z ciągu liczb i liter

$$a, 4, x, 2, 2, 3, x, 3, 3, 3, 2, b, 2$$

połączonych operacjemi

$$*,\ +,\ :,\ -,\ *, /,\ {}'+,\ {}'-,\ :$$

które dla wartości $a = 3, \ x = 6, \ b = 8$ staje się wyrażeniem arytmetycznym. Obliczając wartość wyrażenia arytmetycznego należy zachować kolejność wykonywania operacji arytmetycznych.

Najpierw wykonujemy operacje mnożenia i dzielenia, w następnej kolejności wykonujemy operacje dodawania i odejmowania.

Kolejność wykonywania operacji arytmetycznych mogą zmienić nawiasy, jeżeli w wyrażeniu nawiasy występują.

W szkołach i na uniwersytetach, w zakresie przedmiotów ścisłych, wiele wzorów mają postać wyrażeń algebraicznych.
W szkołach podstawowych już od pierwszej klasy uczymy obliczania wartości najprostrzych wyrażeń arytmetycznych.
Zatem, wyrażenia arytmetyczne lub algebraiczne są ważną częścią programów nauczania matematyki. Im wcześniej uczniowie osiągną sprawność rachunkową obliczania wartości tych wyrażeń tym lepiej. Oczywiście. sprawność obliczania wartości wyrażeń arytmetycznych lub algebraicznych można osiągnąć przez ćwiczenia rozwiązując odpowiednią ilość zadań.

3.1 Wyrażenia arytmetyczne proste i z nawiasami

Zacznijmy ćwiczenia obliczania wartości wyrażeń arytmetycznych od prostych zadań.

3.1.1 Ćwiczenia

Zadanie 3.1 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$(a) \quad 12 + 14 + 24 \quad = \quad$ ....

$(b) \quad 50 - 24 - 8 \quad = \quad$ ....

Zadanie 3.2 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność działań*

$(a) \quad 18 - 16 + 2 * 8 \quad = \quad$ ....

$(b) \quad 5 * 6 + 24 : 3 \quad = \quad$ ....

Zadanie 3.3 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

(a) $3 * (4+6) - 2 * (3+5) \quad = \quad$ ....

....

(b) $(50-40) * 2 - (10+6) : 2 \quad = \quad$ ....

....

Zadanie 3.4 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$5^2 * 2^3 + 3^2 * 2^3 - 4^2 * 5^2$$

Zadanie 3.5 *Oblicz wartość wyrażenia artmetycznego*

$$\frac{3^3 * 2^3 - 3^2 * 2^2}{3 * 2^3 + 2 * 3}$$

Odp:6

Zadanie 3.6 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{\frac{2}{5} * \frac{3}{5} - \frac{2}{9} * \frac{3}{8}}{\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3}}$$

Zadanie 3.7 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5}}{\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3}}$$

Zadanie 3.8 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

$$\frac{(\frac{1}{3} - \frac{1}{2})(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})}{(\frac{2}{3} + \frac{3}{4})(\frac{4}{3} + \frac{5}{4})}$$

Zadanie 3.9 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

$$\frac{(\frac{2}{5} * \frac{3}{5} - \frac{2}{9} * \frac{3}{8})(\frac{3}{5} * \frac{3}{5} - \frac{1}{5} * \frac{3}{5})}{(\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3})(\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3})}$$

Zadanie 3.10 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

$$\frac{(\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5})(\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5})}{(\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3})(\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3})}$$

3.2 Wyrażenia algebraiczne

Przypominamy, że oprócz wyrażeń arytmetycznych, mamy wyrażenia algebraiczne. W wyrażeniach algebraicznych dopuszczamy litery, symbole o zmiennej warości. Zatem, wyrażeniem algebraicznym nazywamy ciąg liczb i liter połączonych operacjami arytmetycznymi dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia.

Przykład 3.1 *Uprość wyrażenie*

$$\frac{a^2-a}{a-1}-(a+1), \qquad a>1.$$

Rozwiązanie. Wykonując działania arytmetyczne, obliczmy

$$\begin{aligned}
\frac{a^2-a}{a-1}-(a+1) &= \frac{(a^2-a)-(a-1)(a+1)}{a-1}\\
&= \frac{(a^2-a)-[a(a+1)-1(a+1)]}{a-1}\\
&= \frac{a^2-a-[a^2+a-a-1]}{a-1}\\
&= \frac{a^2-a-a^2+1]}{a-1}\\
&= \frac{1-a}{a-1} = -\frac{1-a}{1-a} = -1.
\end{aligned}$$

3.2.1 Ćwiczenia

Zadanie 3.11 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości* $a=2$

$$\frac{\frac{a}{3}-\frac{a}{2}}{\frac{a}{3}+\frac{a}{4}}$$

Zadanie 3.12 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości* $b=1$

$$\frac{\frac{2}{b}*\frac{3}{b}-\frac{2}{b}*\frac{3}{b}}{\frac{b}{3}*\frac{b}{5}+\frac{b}{7}*\frac{b}{3}}$$

Zadanie 3.13 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości* $c=3$

$$\frac{\frac{c}{3}*\frac{c}{5}-\frac{c}{3}*\frac{3}{c}}{\frac{c}{3}*\frac{1}{c}+\frac{3}{c}*\frac{c}{3}}$$

Zadanie 3.14 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla* $a=2$

$$\frac{(\frac{a}{3}-\frac{a}{2})(\frac{2}{3}-\frac{a}{2})}{(\frac{2}{3}+\frac{a}{4})(\frac{4}{a}+\frac{a}{4})}$$

Zadanie 3.15 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla* $b = 3$

$$\frac{(\frac{b}{5} * \frac{3}{b} - \frac{b}{9} * \frac{3}{b})(\frac{3}{b} * \frac{3}{b} - \frac{1}{b} * \frac{3}{5})}{(\frac{b}{3} * \frac{2}{b} + \frac{3}{7} * \frac{b}{3})(\frac{b}{3} * \frac{b}{5} + \frac{b}{7} * \frac{b}{3})}$$

Zadanie 3.16 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla* $c = 1$

$$\frac{(\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{2} * \frac{c}{5})(\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{2} * \frac{c}{5})}{(\frac{c}{3} * \frac{c}{4} + \frac{c}{4} * \frac{c}{3})(\frac{c}{3} * \frac{c}{4} + \frac{c}{4} * \frac{c}{3})}$$

3.3 Wyrażenie algebraiczne liniowe

Wyrażenie algebraiczne

$$a * x + b$$

nazywamy liniowym ze względu na zmienną x, gdzie współczynniki wyrażenia liniowego a i b mają ustaloną wartość.

Na przykład

$$2 * x + 1, \quad \textit{gdzie wspolczynniki} \qquad a = 2, \quad b = 1$$

$$-5 * x + 4, \quad \textit{gdzie wspolczynniki} \qquad a = -5, \quad b = 4$$

3.3.1 Zdania

Zadanie 3.17 *Napisz wyrażenie algebraiczne liniowe o współczynnikach*

$$(i) \quad a = 5, \qquad b = -25$$

$$(ii) \quad a = \frac{3}{5}, \qquad b = \frac{2}{9}$$

$$(iii) \quad a = -\frac{13}{15}, \quad b = -\frac{15}{29}$$

3.4 Równanie liniowe

Równanie w postaci

$$a * x + b = 0$$

lub każde inne równanie, które można sprowadzić do tej postaci nazywamy równaniem liniowym ze względu na niewiadomą x. Współczynniki a i b tego równania mają wartość ustaloną.
Rozwiązaniem równania liniowego z niewiadomą x jest każda liczba, która podstawiona w miejsce x, spełnia to równanie.
Rozwiązanie równania liniowego otrzymujemy postępując według schematu:

• przenosimy liczby na prawą stronę zmieniając ich znak na przeciwny,
• niewiadomą x zostawiamy na lewej stronie
• dzielimy lub mnożymy przez współczynnik $a \neq 0$, żeby otrzymać współczynnik 1 przy zmiennej x.

Przykłady równań liniowych z rozwiązaniami.

$$2 * x - 4 = 0, \quad x = 2, \quad bo \qquad 2 * 2 - 4 = 0, \quad dla \qquad a = 2, \quad b = -4$$

$$-3 * x + 3 = 0, \quad x = 1, \quad bo \qquad -3 * 1 + 3 = 0, \quad dla \qquad a = -3, \qquad b = 3$$

Przykład 3.2 *Rozwiąż równanie liniowe*

$$2x - 1 = 0, \qquad a = 2, , \quad b = -1.$$

Rozwiązanie.
Przenosimy liczbę -1 na prawą strone, zmieniając znak na przeciwny idzielimy obie strony tego równania przez 2

$$2x = 1 \mid : 2$$

W ten sposób znajdujemy rozwiązanie

$$x = \frac{1}{2}$$

Podstawiając do równania $x = \frac{1}{2}$, sprawdzamy, że otrzymane rozwiązanie spełnia to równanie.
Mianowicie dla $x = \frac{1}{2}$, mamy

$$2x - 1 = 2\frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Widzimy, że rozwiązanie $x = \frac{1}{2}$ spełnia to równanie. Teraz podamy ogólny schemat rozwiązania równania liniowego.

$$a\,x + b = 0,$$

$$a \neq 0,$$

$$a\,x = -b,$$

$$x = -\frac{b}{a},$$

3.4.1 Ćwiczenia

Zadanie 3.18 *Rozwiąż równanie*

$$\begin{array}{ll} (i) & 3\,x - 12 = 0 \\ (ii) & 5\,x + 20 = 10 \\ (iii) & \frac{3}{4}x + \frac{5}{8} = 1 \end{array}$$

Zadanie 3.19 *Mały pastuszek zauważył lecące bociany i krzyknął chyba ich leci 100. Starszy pastuch odpowiedział dużo mniej, gdyby leciało ich dwa razy tyle, i pół tyle, i ćwierć tyle i ty żebyś z nimi poleciał to wtedy byłoby ich razem z tobą 100. Ile bocianów leciało po niebie?*

Obraz Józefa Chełmońskiego (1849-1914). Bociany

Zadanie 3.20 *Franek czytał książkę 25 stron dziennie. Przeczytał całą książkę w ciągu 3 dni.*
Oblicz ile stron ma ta książka ?

....

Zadanie 3.21 *Marysia kupiła 3 zeszyty po 7 złotych każdy. Kazik kupił piłkę za 10 złotych i zegarek za 35 złotych?*

Ile zapaciła Marysia za 3 zeszyty ?

....

Ile zapłacił Kazik za piłkę i za zegarek ?

....
O Ile więcej złotych Kazik zapłacił za zakupy od Marysi ?

....

Bolek jest 2 razy starszy od Stefki, która ma 7 lat. Olek ma tyle lat co Bolek i Stefka razem.

(a) Ile lat ma Bolek ?

....

(b) Ile lat ma Olek ?

Zadanie 3.22 *Na kilku drzewach siedziały wrony. Janek powiedział do Ojca*
Tato dużo wron widzę na drzewach, chyba jest ich 100.
Ojciec odpowiedział Jasiu gdyby było 2 razy tyle i połowę tyle to wtedy byłoby 100 wron.

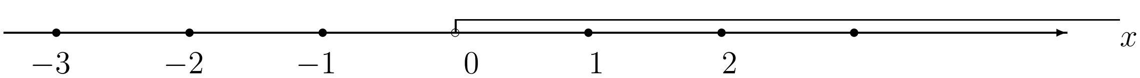
Ile wron siedziało na drzewach ?

Zadanie 3.23 *Uprość wyrażenie algebraiczne*

$$\frac{a^2 - a}{a - 1} - (a + 1), \qquad a > 1.$$

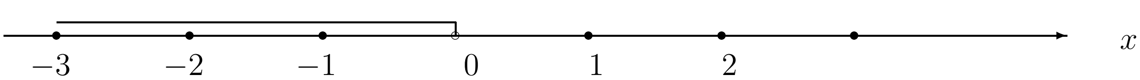
3.5 Nierówności

Zaznacz na osi liczbowej te wrtości x które są większe od zera, nierówność $x > 0$ ostra, zero nie jest włączone.



Nierównść ostra wartości $x > 0$

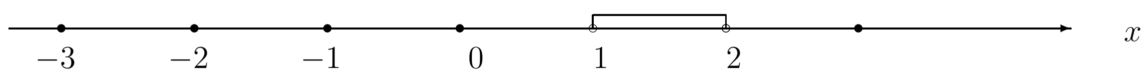
Zaznacz na osi liczbowej te wrtości x, które są mniejsze od zera, nierówność $x < 0$ ostra, zero nie jest włączone.



Nierównść ostra wartości $x < 0$

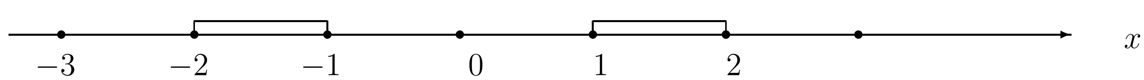
Zaznacz na osi liczbowej te wrtości x, które leżą
pomiędzy liczbą 1 i liczbą 2, to znaczy $1 < x < 2$ nierówność $1 < x < 2$ ostra,

wartości 1 i 2 nie są włączone.



Nierówność ostra wartości $1 < x < 2$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości x, które leżą pomiędzy liczbą -2 i liczbą -1 lub liczbą 1 i liczbą 2, to znaczy $-2 \leq x \leq -1$ lub $1 \leq x \leq 2$, nierówności słabe z włączeniem liczb $-2, -1, 1, 2$



Nierównść słaba $-2 \leq x \leq -1$ lub $1 \leq x \leq 2$

3.5.1 Ćwiczenia

Zadanie 3.24 *Rozwiąż nierówność*

$$(i) \quad 2x - 1 > 1$$

$$(ii) \quad 4x - 6 \leq 10$$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości x dla których nierówność jest prawdziwa.

Przykład 3.1 *Rozwiąż nierówność*

$$3(x-1) < 2(x+1)$$

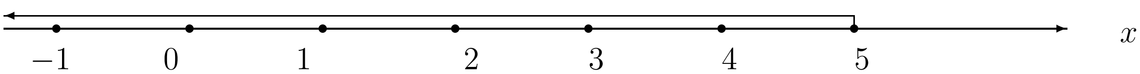
Zaznacz na osi liczbowej te wartości x dla których nierówność jest prawdziwa.
Rozwiązanie
Wykonujemy mnożenia po lewej i po prawej stronie nierówności

$$3x - 3 < 2x + 2$$

Zawsze, przenosimy zmienną x na lewą stronę nierówności ze znakiem przeciwnym, natomiast liczby przenosimy na prawą stronę nierówności też ze znakiem przeciwnym

$$3x - 2x < 2 + 3, \qquad x < 5$$

Na osi liczbowej zaznaczmy rozwiązanie $x < 5$ nierówności.



Nierównść ostra wartości $x < 5$

Zadanie 3.25 *Rozwiąż nierówność*

$$(i) \quad 3(3x-1) - 2(2x+1) < 4(x-1)$$

$$(ii) \quad 3(x-2) + 4(x+2) \leq 2x + 10$$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości x dla których nierówność jest prawdziwa.

3.6 Ułamki dziesiętne

Ułamki zwyczajne o mianownikach 10,100, 1000 na zywamy ułamkami dziesiętnymi. Ułamki dziesiętne zapisujemy używając przecinka zamiast kreski.

$$\frac{1}{10} = 0,1, \quad \frac{1}{100} = 0,01, \quad \frac{1}{1000} = 0,001.$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{3}{10} &= 0,3, & \frac{5}{100}, &= 0,05, \\ \frac{35}{1000} &= 0,035 & \frac{735}{1000} &= 0,735, \\ 2\frac{3}{10} &= 2,3, & 10\frac{12}{100} &= 10,12. \end{aligned}$$

Mamy relacje odwrotne, ułamki dziesiętne zamieniamy na ułamki zwyczane

$$\begin{aligned} 0,1 &= \frac{1}{10}, & 0,01 &= \frac{1}{100}, \\ 0,001 &= \frac{1}{1000}, & 0,3 &= \frac{3}{10}, \\ 0.05 &= \frac{5}{100}, & 0,035 &= \frac{35}{1000}, \\ 0,735 &= \frac{735}{1000}, & 2,3 &= \frac{3}{10}, \\ 10,12 &= 10\frac{12}{100}. \end{aligned}$$

Każdy ułamek zwyczajny możemy zamienić na ułamek dziesiętny.
Pierwszy prosty sposòb zamiany ułamka zwyczajnego na dziesiętny polega

na zapisaniu tego ułamka przy mienowniku, $10, 100, 1000, ...$ Ten sposòb jest prosty tylko dla wybranych ułamkòw.

Przykład 3.2

$$\frac{1}{2} = \frac{1*5}{2*5} = \frac{5}{10} = 0.1$$
$$\frac{3}{4} = \frac{3*25}{4*25} = \frac{75}{100} = 0.25$$
$$\frac{7}{5} = \frac{7*20}{5*20} = \frac{140}{100} = 1.4$$
$$\frac{15}{250} = \frac{15*4}{250*4} = \frac{60}{1000} = 0.06$$

Drugi sposòb zamiany ułamkòw zwyczajnych na dziesiętne polega na dzieleniu licznika przez mianownik.

Przykład 3.3 *Zamień ułamek* $\frac{1}{4}$ *na ułamek dziesiętny.*

Rozwiązanie. *Dzielimy 1=1,00 przez 4. Zauważamy, że zera po przecinku nie zmieniają wartości 1*

$$\begin{array}{rll}
 & 0,25 & \\
 & -- & \\
 & 1,00 & :4 \\
- & 0 & \\
 & -- & \\
 & 10 & \\
 & -8 & \\
 & -- & \\
 & \ \ 20 & \\
 & - \ \ 2 & \\
 & -- & \\
 & \ \ \ 0 & \\
\end{array}$$

Odpowiedź: $\frac{1}{4} = 0,25$

3.6.1 Ćwiczenia

Zadanie 3.26 *Zamień ułamek zwyczajny na dziesiętny*

$$(i)\quad \frac{3}{5}$$
$$(ii)\quad \frac{37}{50}$$
$$(iii)\quad \frac{253}{250}$$

Zadanie 3.27 *Zamień ułamek zwyczajny na dziesiętny*

$$(i)\quad \frac{2}{15}$$
$$(ii)\quad \frac{23}{45}$$
$$(iii)\quad \frac{37}{150}$$

3.7 Procenty i promile

$p\%$ procent to ułamk $\frac{p}{100}$ o mianowniku 100.

Na przykład

1% jeden procent to ułamek $\frac{1}{100} = 0.01$ o mianowniku 100.

25% to ułamek $\frac{25}{100} = 0.25$ o mianowniku 100.

100% to całość $\frac{100}{100} = 1$.

Obliczamy $p\%$ procent z wartości a

$$p\% \ * \ a = \frac{p}{100} * a$$

jako ułamek o liczniku p i o mianowniku 100 z a.

3.7.1 Ćwiczenia

Przykład 3.4 *Oblicz* 15% *z wartości a=60*

$$15\% * 60 = \frac{15}{100} * 60 = \frac{15 * 60}{100} = \frac{15 * 6}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

Przykład 3.5 *Oblicz* 25% *z wartości a=3000*

$$25\% * 3000 = \frac{25}{100} * 3000 = \frac{25 * 3000}{100} = \frac{75000}{100} = 750$$

Odwrotnie, mając $p\% * a$ procent wartości a, obliczamy wartość a

Przykład 3.6 30% *procent wartości* a *równa się* 600. *Oblicz wartość* a

Rozwiązanie.

$$30\% * a = 600, \quad \frac{30}{100} * a = 600, \quad a = \frac{600}{\frac{30}{100}} = \frac{600 * 100}{30} = 2000$$

Zadanie 3.28 *Oblicz* 75% *z wartości* $a = 2000$

Zadanie 3.29 *Oblicz* 15% *z wartości* $a = 4000$

Odwrotnie, mając $p\% * a$ procent wartości a, oblicz wartość a podaną niżej w ćwiczeniach

Zadanie 3.30 50% *procent wartości* a *równa się* 800. *Oblicz wartość* a

Zadanie 3.31 30% *procent wartości* a *równa się* 5000. *Oblicz wartość* a

Zadanie 3.32 *Cena metra kwadratowego materiału na zasłony okien kosztowała* 50 *zł. Najpierw podwyższono cenę o* 30% *potem obniżono o* 10 % *za metr kwadratowy. Ile zapłacił klient za* 10 m^2 *materiału ?*

Zadanie 3.33 *Cena materiału razem z* 7% *VAT kosztowała* 107 *zł. Podatek VAT materiału wrósł do* 22%. *Ile kosztował materiał z całym VAT ?. O ile procent wrosła cena materiału ?*

3.8 Promile

Promile to ułamki o mianowniku 1000.
$p\%\%$ promili to ułamk $\frac{p}{1000}$ o mianowniku 1000.

Na przykład

1%% jeden procent to ułamek $\frac{1}{1000} = 0.001$ o mianowniku 1000.

$25\%\%$ to ułamek $\dfrac{25}{1000} = 0.025$ o mianowniku 1000.

$1000\%\%$ to całość $\dfrac{1000}{1000} = 1$.

Obliczamy $p\%\%$ procent z wartości a

$$p\%\% \ * \ a = \frac{p}{1000} * a$$

jako ułamek o mianowniku 1000 z a.

3.8.1 Ćwiczenia

Przykład 3.7 *Oblicz* 15%% *z wartości a=3000*

$$15\%\% * 3000 = \frac{15}{1000} * 3000 = \frac{15 * 3000}{1000} = 45$$

Przykład 3.8 *Oblicz* 25%% *z wartości a=3000*

$$25\%\% * 3000 = \frac{25}{1000} * 3000 = \frac{25 * 3000}{1000} = 75$$

Odwrotnie, mając $p\%\% * a$ procent wartości a, obliczamy wartość a

Przykład 3.9 30%% *procent wartości a równa się* 600. *Oblicz wartość a*

Rozwiązanie.

$$30\%\% * a = 600, \quad \frac{30}{1000} * a = 600, \quad a = \frac{600}{\frac{30}{1000}} = \frac{600 * 1000}{30} = 20000$$

Zadanie 3.34 *Oblicz* 75%% *z wartości* $a = 2000$

Zadanie 3.35 *Oblicz* 15%% *z wartości* $a = 4000$

Odwrotnie, mając $p\%\% * a$ promili wartości a, oblicz wartość a podaną niżej w ćwiczeniach

Zadanie 3.36 50%% *promili wartości a równa się* 800. *Oblicz wartość a*

Zadanie 3.37 30%% *promili wartości a równa się* 5000. *Oblicz wartość a*

3.9 Procent składany

WprowadŹmy następujące oznaczenia

- K_0 - kapitał początkowy
- K_n - kapitał po n latach
- p - stopa procentowa w skali roku
- n - ilość lat oszczędności

Po pierwszym roku oszczzędzania kapitał K_0 wzrośnie o $p\%$

$$K_1 = K_0 + K_0\frac{p}{100} = K_0(1 + \frac{p}{100})$$

Po drugim roku oszczędności kapitałK_1 wzrośnie o $p\%$

$$K_2 = K_1 + K_1\frac{p}{100} = K_1(1 + \frac{p}{100}) = K_0(1 + \frac{p}{100})^2$$

Ogólnie, stosując zasadę indukcji zupełnej, jeżeli po $n-1$ latach oszczędzania kapitał wrośnie o $p\%$

$$K_{n-1} = K_0(1 + \frac{p}{100})^{n-1}$$

to po n latach oszczędznia

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1}\frac{p}{100} = K_0(1 + \frac{p}{100})^n$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na końcowy kapitał po n latach oszczędzania

$$K_n = K_0(1 + \frac{p}{100})^n$$

Przykład 3.3 *Oblicz o ile wzrośnie kapitał* $150000PLN$ *po 10 latach, jeżeli stopa prcentowa* $p = 5\%$.

Rozwiaązanie. Stosując wzór, obliczamy

$$K_{10} = 150000(1 + \frac{5}{100})^{10} = 150000 * 1.05^{10} = 150000 * 1.62889 = 244334PLN$$

OdpowiedŹ: Kapitał $150000PLN$ wzrośnie przez 10 lat o $94334PLN$, jeżeli stopa procentowa w stosunku rocznym wynosi $p = 5\%$.

Spłata kredytu. Podobnie obliczamy procent składany od kredytu.
Po pierwszym roku spłacania kapitał K_0 zmaleje o $p\%$

$$K_1 = K_0 - K_0\frac{p}{100} = K_0(1 - \frac{p}{100})$$

Po drugim roku spłacania kapitał K_1 zmaleje o $p\%$

$$K_2 = K_1 - K_1\frac{p}{100} = K_1(1-\frac{p}{100}) = K_0(1-\frac{p}{100})^2$$

Ogólnie, stosując zasadę indukcji zupełnej, jeżeli po $n-1$ latach spłacania kapitał zmaleje do sumy

$$K_{n-1} = K_0(1-\frac{p}{100})^{n-1}$$

to po n latach spłacania kapitał zmaleje do sumy

$$K_n = K_{n-1} - K_{n-1}\frac{p}{100} = K_0(1-\frac{p}{100})^n$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na końcowy kapitał po n latach spłacania kredytu.

$$K_n = K_0(1-\frac{p}{100})^n$$

Przykład 3.4 *Oblicz o ile zmaleje kredyt od kapitału* $150000PLN$ *po 10 latach spłacania. i po 150 latach spłaconia, jeżeli stopa prcentowa* $p = 5\%$.

Rozwiaązanie. Stosując wzór, obliczamy

$$K_{10} = 150000(1-\frac{5}{100})^{10} = 150000 * 0.95^{10} = 150000 * 0.598737 = 89810PLN$$

$$K_{150} = 150000(1-\frac{5}{100})^{150} = 150000*0.95^{150} = 150000*0.0004555 = 68.33PLN$$

OdpowiedQ́: Po 10 latach kredyt zmaleje o $60189.5PLN$. Natomiast po 150 latach kredyt zmaleje o $149931.67PLN$.

Zadanie 3.38 *Oblicz o ile zmaleje kredyt od kapitału* $200000PLN$ *po 10 latach spłacania. i po 180 latach spłaconia, jeżeli stopa prcentowa* $p = 5\%$.

3.10 Wartość bezwzglęna

Wartość bezwzględna liczby to odległość punktu x od począdku układu oznaczonego przez 0. Zatem, wartość bezwzględna liczby x jest zawsze nieujemna.

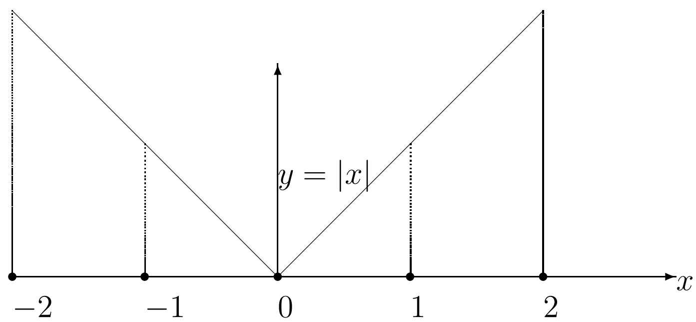
Definition 3.3 *Wartość bezwzględną liczby x określamy jak następuje:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{gdy} \quad x < 0 \end{cases}$$

Na przykład $|5| = 5$ bo $5 > 0$, również $|-5| = -(-5) = 5$, gdy $x = -5 < 0$. Również wartość bezwzględną liczby x jest dana wzorem

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Zauważmy, że $\sqrt{4} = 2$, nigdy -2.



Wykres wartości bezwzlędnej $y = |x|$

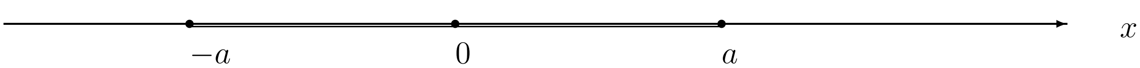
Odcinek na osi liczbowej. Z definicji wartości bezwzglęnej liczby x, wynika nierówność

$$|x| \leq a, \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad -a \leq x \leq a, \quad a \geq 0.$$

Rzeczywiście, zauważamy, że

$$|x| \leq a, \quad \text{gdy} \quad x \leq a \quad \text{i} \quad -x \leq a, \quad \text{to znaczy} \quad -a \leq x \leq a.$$

Na osi liczbowej zaznaczmy zbiór liczb x, które spełniają $-a \leq x \leq a$



Odcinek na osi liczbowej $|x| \leq a$.

Podobnie, odcinek $[a, b]$ o początku w punkcie a i końcu w punkcie b, to jest zbiór punktów x leżących pomiędzy punktami a i b zapisujemy jak następuje:

$$[a, b] = \{x \in R : \ a \leq x \leq b\}$$

Długość odcinka $[a, b]$, to jest odległość punktu a od punktu b, równa się wartości bezwzględnej różnicy $|b - a|$.

Przykład 3.5 *Rozwiąż równanie*

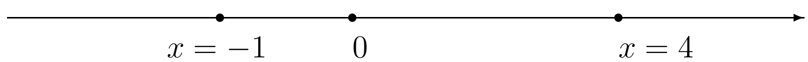
$$|2x - 3| = 5.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Rozwiązanie. Z defincji wartości bezwzględnej

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3=5, \quad gdy \quad 2x-3 \geq 0, \quad to \quad x=4, \\ -(2x-3)=5 \quad gdy \quad -2x+3 \leq 0, \quad to \quad x=-1, \end{cases}$$

Rozwiązanie x=-1 lub $x = 4$ podane jest niżej na osi liczbowej.



Rozwiązanie $x = -1$ lub $x = 4$.

Przykład 3.6 *Rozwiąż nierówńść*

$$|x-3| \leq 2.$$

Rozwiązanie. Z definicji wartości bezwzlęnej nierówność

$$|x-3| \leq 2.$$

jest równoważna z podwójną nierównością

$$-2 \leq x-3 \leq 2, \qquad \text{lub} \quad 1 \leq x \leq 5.$$

OdpowiedĆ: $1 \leq x \leq 5$.

Przykład 3.7 *Podaj zbiór punktów, które spełniają nierówność*

$$|x-1| + |x+1| \leq 1.$$

Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej.

Rozwiązanie. Z definicji wartości bezwzlęnej znajdujemy

1. *dla* $\quad x-1 \leq 0, \quad |x-1| = -(x-1) = 1-x, \quad |x+1| = -(x+1) = -1-x$

$$|x-1| + |x+1| = 1-x-1-x = -2x \leq 1,$$

gdy $\quad x \geq -\dfrac{1}{2},$

2. *dla* $\quad -1 \leq x \leq 1, \quad |x-1| = (x-1) = x-1, \quad |x+1| = -(x+1) = -1-x$

$$|x-1| + |x+1| = x-1-1-x = -2 \leq 1,$$

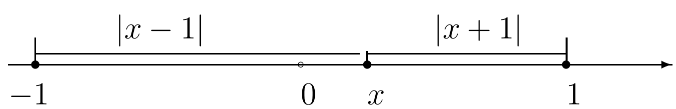
gdy $\quad -1 \leq x \leq 1$

3. *dla* $\quad x+1 \geq 0, \quad |x-1| = x-1, \quad |x+1| = x+1$

$$|x-1| + |x+1| = (x-1) + (x+1) = 2x \leq 1,$$

gdy $\quad x \leq \dfrac{1}{2},$

OdpowiedQ́: Nierówność jest spełniona dla $-1 \leq x \leq 1$. To znaczy dla wszystkich x takich, że $|x| \leq 1$.
Również zauważmy, że odległość punktu $x \in [-1, 1]$ od punktu -1 plus odległość tego punktu $x \in [-1, 1]$ od 1 równa się 1. Zatem nierówność jest spełniona również dla $x = -1$ lub $x = 1$, wtedy zachodzi znak równości. Zaznaczmy to rozwiązanie na rysunku.



Równanie $|x-1| + |x+1| = 1$.

3.10.1 Zadania

Zadanie 3.39 *Rozwiąż równanie*

$$|3x - 5| = 4.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 3.40 *Rozwiąż równanie*

$$|2x - 3| = 5.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 3.41 *Rozwiąż nierówność*

$$|x - 5| \leq 2.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 3.42 *Podaj zbiór punktów, które spełniają nierówność*

$$|x| + |x - 2| \leq 2.$$

Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej

3.11 Ciąg arytmetyczne i szereg arytmetyczny.

Wyrażenia postaci

$$a_0, a_0 + r, a_0 + 2r, \ a_0 + 3r, ..., a_0 + n\, r; \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

nazywamy ciągiem arytmetcznym, gdzie $a_0 \in R$ jest pierwszym wyrazem ciągu i $r \in R$ jest różnicą ciągu.
Zatem wyraz ogólny ciągu a_n można zapisać wzorem

$$a_n = a_0 + n\, r, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu wynosi

$$a_{n+1} - a_n = a + (n+1)r - (a + n\,r) = r, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Na przyład, ciąg kolejnych liczb naturalnych

$$0, 1, 2, ...;$$

jest ciągiem arytmetycznym o wyrazie pierwszym $a_0 = 0$, różnicy $r = 1$ i o wyrazie ogólnym $a_n = n$.

Średnia Arytmetyczna. Zauważmy, że wyraz ciągu arytmetycznego

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

jest średnią arytmetyczną wyrazu poprzedniego i następnego.
Rzeczywiście, obliczamy

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_0 + (n-1)r) + (a_0 + (n+1)r)}{2} = \frac{2a_0 + 2nr}{2} = a_n$$

Również sumy dwóch wyrazów odległych o liczbę k od a_0 i o liczbę k od a_n

$$a_0 + a_n = a_k + a_{n-k}$$

są równa dla każdego $k = 0, 1, 2, ...n;$
Mianowicie, sprawdzamy, że dla każdego $k = 0, 1, 2, ..., n$, may

$$a_k + a_{n-k} = \underbrace{a_0 + kr}_{a_k} + \underbrace{a_0 + (n-k)r}_{a_{n-k}} = a_0 + \underbrace{a_0 + nr}_{a_n} = a_0 + a_n.$$

Przykład 3.8 *Sprawdź czy następujący ciąg jest artmetyczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{3n+1}{3}, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

$$(ii) \quad a_n = 1 + n^2, \quad n = 0, 1, 2, ...,:$$

Rozwiązanie (i). Sprawdzamy czy różnica r kolejnych wyrazów ciągu jest stała, to znaczy jest niezależna od n

$$r = a_{n+1} - a_n = \underbrace{\frac{3(n+1)+1}{3}}_{a_{n+1}} - \underbrace{\frac{3n+1}{3}}_{a_n} = \frac{3n+1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3n+1}{3} = \frac{1}{3}, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Odpowiedź: Ciąg jest arytmetyczny, gdyż różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu jest stała $r = \dfrac{1}{3}$ i nie zależy od $n = 0, 1, 2, ...;$

Rozwiązanie (ii). Sprawdzamy czy różnica kolejnych wyrazów ciągu jest stała, to znaczy niezależy od n

$$r = a_{n+1} - a_n = \underbrace{1 + (n+1)^2}_{a_{n+1}} - \underbrace{(1 + n^2)}_{a_n} = 1 + n^2 + 2n + 1 - (1 + n^2) = 1 + 2n,$$

Odpowiedź: Widzimy, że ciąg (ii) nie jest ciągiem arytmetyczny, gdyż różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu $r = 2n+1$ dla $n = 0, 1, 2, ...;$ zależy od n.

3.11.1 Zadania

Zadanie 3.43 *Sprawdź czy następujący ciąg jest artmetyczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{8n+1}{5}, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$
$$(ii) \quad a_n = 1 + 2^n, \quad n = 0, 1, 2, ..., :$$

Postęp Arytmetyczny. Postępem arytmetycznym nazywamy sumę wyrazów ciągu arytmetycznego

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

lub

$$a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \cdots + (a_0 + nr),$$

W sigma notacji zapisujemy szereg arytmetyczny jako następującą sumę:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

lub

$$\sum_{k=0}^{n} (a_0 + kr) = a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \cdots + (a_0 + nr).$$

Łatwo wyprowadzić wzór na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego. Mianowicie, oznaczmy sumę przez

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Napiszmy tą sumę w odwrotnej kolejności dodawania wyrazów

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$$

Dodając stronami, otrzymamy

$$2S_n = (a_0 + a_n) + (a_1 + a_{n-1}) + (a_2 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_1) + (a_n + a_0)$$

Ponieważ, wyrazy postępu arytmetycznego spełniają równość

$$a_0 + a_n = a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2} = \cdots = a_n + a_0$$

dlatego, suma wyrazów ciągu arytmetycznego

$$2S_n = (n+1)(a_0 + a_n)$$

lub

$$S_n = \frac{n+1}{2}(2a_0 + nr).$$

Przykład 3.9 *Oblicz sumę postępu arytmetycznego*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że w tym postępie arytmetycznym pierwszy wyraz $a_0 = 0$ i różnica $r = 1$.
Stosując powyższy wzór, znajdujemy sumę

$$S_n = \frac{(n+1)}{2}(2a_0 + nr) = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Zadanie 3.44 *Oblicz sumę n wyrazów postępu arytmetycznego o wyrazie ogólnym*

$$a_n = \frac{3n+5}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, ..., ;$$

3.11.2 Ciągi geometryczne i postępy geometryczne.

Wyrażenie postaci

$$a_0, a_0q, a_0q^2,\ a_0q^3, ..., a_0q^n \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

nazywamy ciągiem geometrycznym, gdzie $a_0 \in R$ jest pierwszym wyrazem ciągu i $q \in R$ jest ilorazem ciągu.
Zatem wyraz ogólny ciągu geometrycznego zapisujemy wzorem

$$a_n = a_0q^n, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Zakładamy nie trywialny przypadek gdy $a_0 \neq 0,\ q \neq 0$.
Iloraz dwóch kolejnymi wyrazów ciągu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Na przykład, ciąg liczb

$$1, 2, 2^2, 2^3...; 2^n$$

o wyrazie pierwszym $a_0 = 1$, ilorazie $q = 2$ i o wyrazie ogólnym $a_n = 2^n$ jest ciągiem geometrycznym. Zauwamy, e gdy iloraz $q = 0$ to cig geometryczny jest o wyrazie oglnym staym $a_n = a_0$ dla kadego $n 1, 2, ...;$
Średnia Geometryczna. Zauważmy, że wartość bezwzględna wyrazu ciągu geometryczngo jest średnią geometryczną wyrazu poprzedniego i następnego

$$|a_n| = \sqrt{|a_{n-1}a_{n+1}|}$$

Rzeczywiście, obliczamy

$$a_{n-1} * a_{n+1} = a\ q^{n-1} * a * q^{n+1} = a^2 * q^{2n} = a_n^2.$$

Skąd wynika średnia geometryczna

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} * a_{n+1}}$$

Również iloczyny dwóch wyrazów odległych o liczbę k od a_0 i liczbę k od a_n

$$a_0 * a_n = a_k * a_{n-k}$$

są równa dla każdego $k = 0, 1, 2, ...n$;
Mianowicie, sprawdzamy, że dla każdego $k = 0, 1, 2, ..., n$

$$a_k * a_{n-k} = \underbrace{a_0 * q^k}_{a_k} * \underbrace{a_0 * q^{n-k}}_{a_{n-k}} = \underbrace{a_0(a_0 q^n)} = a_0 * a_n.$$

Przykład 3.10 *Sprawdź czy następujący ciąg o danym wyrazie ogólnym jest geometryczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{3^n}{2^n}, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

$$(ii) \quad a_n = n^2, \quad n = 1, 2, ..., :$$

Rozwiązanie (i). Sprawdzamy czy iloraz q kolejnych wyrazów ciągu jest stały, to znaczy jest niezależny od n

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}) : (\frac{3^n}{2^n}) = \frac{3^{n+1} * 2^n}{2^{n+1} * 3^n} = \frac{3}{2} = q, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Odpowiedź: Ciąg jest geometryczny, gdyż iloraz kolejnych wyrazów ciągu jets stały i nie zależy od n, $q = \frac{3}{2}$ dla $n = 0, 1, 2, ...$;
Rozwiązanie (ii). Sprawdzamy czy iloraz q kolejnych wyrazów ciągu jest stały, to znaczy jest niezależny od n

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, ...;$$

Odpowiedź: Ciąg nie jest geometryczny, gdyż iloraz kolejnych wyrazów ciągu $q = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$ dla $n = 1, 2, ...$; zależy od n.

3.11.3 Zadania

Zadanie 3.45 *Sprawdź czy następujący ciąg jest geometryczny.*

$$(i) \quad \frac{(\sqrt{2})^n}{5^n}, ... \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

$$(ii) \quad \sqrt{n}, ... \qquad n = 1, 2, ...;$$

Zadanie 3.46 *Podaj pierwszy wyraz, n-ty wyraz i oblicz iloraz ciągu geometrycznego*

$$(i) \quad \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3^2}{5}, \frac{3^3}{5}.$$

$$(ii) \quad \sqrt{2},\ 2, 2\sqrt{2}, 4,\ 4\sqrt{2}.... :$$

Chapter 4

Liczby pierwsze. Algorytm Euklidesa

Liczba 2, to jest jedyna najmniejsza liczba parzysta i pierwsza

Oś liczbowa. Liczba 1, to nie jest liczba pierwsza

4.1 Wstęp

Jedną z najważniejszych operacji na liczbach jest rozkład dowolnej] liczby naturalnej na czynniki liczb pierwszych. Rozkład liczb na czynniki pierwsze podajemy na podstawie fundamentalnego twierdzenia arytmetyki.
Bezpośrednią konsekwencją rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze jest wyznaczanie największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspólnej wielokrotnej dwóch liczb naturalnych. Jednym z optymalnych algorytmów wyznaczania namniejszego wspólnego dzielnika dwóch liczb naturalnych jest *Algorytm Euklidesa*.

4.2 Liczby pierwsze

Opis liczb pierwszych należy zacząć od definicji

Definition 4.1 *Liczbę naturalną $p > 1$ nazywamy liczbą pierwszą, jeżeli ma dokładnie dwa dzielniki, to jest liczbę 1 i samą siebie p. To znaczy ze liczby pierwsze dzielą się tylko przez liczbę 1 i przez siebie samą. Każda inna liczba nazywa się liczbą złożoną.*

Zauważmy, że liczba natyralna $p = 1$ nie jest liczbą pierwszą, gdyż ma tylko jeden dzielnik samą siebie i nie jest wieksza od 1. Liczba 0 również nie jest pierwsza bo jest mniejsza od 1 i ma więcej dzielników niż dwa, gdyż podzielona przez dowolną liczbę naturalną, rózną od zera, daje wynik 0. Wymieńmy kilka kolejnych liczb pierwszych

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 51, 53, 57...;$$

Z defincji wynika w sposòb oczywisty, że liczba $p = 2$ jest jedyną liczbą pierwszą parzystą.
Zbiòr liczb pierwszych nie jest zamknięty na operację arytmetyczne. Wystarczy podać kontr-przykład.

Przykład 4.1 *Mianowicie liczby $m = 7$ i $n = 3$ są pierwsze jednak ich suma $m + n = 7 + 3 = 10$ nie jest liczbą pierwszą i rożnica $7 - 3 = 4$ też nie jest liczbą pierwszą. Podobnie iloczyn tych liczb $m * n = 3 * 7 = 21$ nie jest liczbą pierwszą.*

Jedna z najważniejszych własności liczb pierwszych opisana jest w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 4.1 Fundamentalne Twierdzenie Arytmetyki. *Każdą liczbę naturalną można przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych. Taki rozkład jest jedyny.*
Inaczej, jeżeli n jest liczbą naturalną to istnieją liczby pierwsze

$$p_1, p_2, p_3 \cdots, p_k$$

takie, że

$$n = p_1 * p_2 * p_3 * \cdots * p_k$$

4.3 Sposòb rozkładu liczb na czynniki pierwsze

Z fundamentalnego twierdzenia arytmetyki wiemy, że każda liczba naturalna dodatnia ma postać iloczynu liczb pierwszych. Inaczej,każda liczba naturalna dodatnia $p > 1$ rozkłada się na iloczyn liczb pierwszych. Co więcej taki rozkład jest jedyny. To znaczy, ze nie ma innego rozkładu tej liczby naturalnej.
Sposòb rozkładu liczby naturalnej m na czynniki pierwsze jest prosty. Mianowicie, dzielimy liczbę m przez kolejne liczby pierwsze. Wtedy liczba m ròwna się iloczynowi dzielnikòw.

Przykład 4.2 *Rozłòż liczbę $m = 1638$ na czynniki pierwsze.*

Posłòżymy się schematem

$$\begin{array}{l|l}
1638 & 2 \\
819 & 3 \\
273 & 3 \\
91 & 7 \\
13 & 13 \\
1 &
\end{array}$$

Liczba 1638 rozkłada się na czynniki $2, 3, 3, 7, 13$
To znaczy
$$1638 = 2 * 3 * 3 * 7 * 13$$

Przykład 4.3 *Rozłóż liczbę m=5040 na czynniki pierwsze. Posłóżymy się schematem*

$$\begin{array}{l|l}
5040 & 2 \\
2520 & 2 \\
1260 & 2 \\
630 & 2 \\
315 & 3 \\
105 & 5 \\
21 & 3 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}$$

Liczba $m = 5040$ rozkłada się na czynniki $2, 2, 2, 2, 3, 5, 3, 7,$ To znaczy

$$5040 = 2 * 2 * 2 * 2 * 3 * 5 * 3 * 7.$$

Zauważmy, że siedem silnia równa się

$$7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040$$

W tym rozkładzie mamy liczby złożone

$$4 = 2 * 2 \ i \ 6 = 2 * 3$$

.

4.3.1 Zadania

Zadanie 4.1 *Wiadomo, że liczba naturalna m jest podzielna przez* 5 *i rozkłada się na* 3 *czynniki pierwsze, których suma równa jest* 15. *Znajdź liczbę m.*

Zadanie 4.2 *Wiadomo, że liczba naturalna m jest podzielna przez* 5 *i rozkłada się na* 3 *czynniki pierwsze, których suma równa jest* 19. *Znajdź wszystkie wartości liczby m.*

4.4 Największy wspólny dzielnik

Pojęcie największego wspólnego dzielnika wyjaśnimy na przykładach.

Przykład 4.4 *Wspólnym dzielnikiem liczb* 21 *i* 57 *jest liczba* 3, *ponieważ liczba* 3 *dzieli liczbę* 21 *i dzieli liczbę* 57. *Poza tym te liczby nie mają innych wspólnych dzielników.*

$$21 : 3 = 7 \ i \ 57 : 3 = 19$$

Zatem liczby 21 i 57 rozkładają się na czynniki

$$21 = 3 * 7 \;\; i \;\; 57 = 3 * 19,$$

Liczba 3 jest wpólnym dzielnikiem liczby 21 i liczby 57. Zauważamy również, że te dwie liczby nie mają innych wpólnych dzielników. Dlatego liczba 3 jest najwiekszym wspólnym dzielnikiem liczby 21 i liczby 57.

Przykład 4.5 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* 42 *i* 78.

Rozkładamy obie liczby na czynniki pierwsze

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2, \\ 21 & 3, \\ 7 & 7, \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Zauważamy, że te liczby

$$42 = 2 * 3 * 7 \quad i \quad 78 = 2 * 3 * 13$$

mają dwa wspólne dzielniki 2 i 3. Dlatego największym wspólnym dzielnikiem liczb 42 i 78 jest liczba $2 * 3 = 6$.
Dzielnik 7 liczby 42 nie dzieli liczby 78 oraz dzielnik 13 liczby 78 nie dzieli liczby 42.
Z powyższych przykładów widzimy, że najwiekszy wspólny dzielnik dwóch liczb naturalnych możemy wyznaczyć rozkładając te liczby na czynniki pierwsze a następnie wybieramy ich wspólne dzielniki. Wtedy za największy wspólny dzielnik jest równy iloczynowi ich wspólnych dzielników.
Rozpatrzy jeszcze jeden przykład wyznaczania największego wspólnego dzielnika przez rozkład liczb na czynniki pierwsze

Przykład 4.6 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczby* 210 *i liczby* 231

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2, \\ 105 & 3, \\ 35 & 7, \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Zauważamy, że te liczby

$$210 = 2 * 3 * 7 * 5 \quad i \quad 231 = 3 * 7 * 11$$

mają dwa wspólne dzielniki 3 i 7. Dlatego najwiekszym wspólnym dzielnikiem liczb 210 i 231 jest iloczyn $3 * 7 = 21$. Sprawdzamy, że

$$210 : 21 = 10 \quad oraz \quad 231 : 21 = 7.$$

Dlatego największym wspólnym dzielnikiem liczb 210 i 231 jest iloczyn $3 * 7 = 21$.
Dzielniki 2, 5 liczby 210 nie dzielą liczby 231 oraz dzielnik 11 liczby 231 nie dzieli liczby 210.

4.5 Algorytm Euklidesa (325-265 B.C.)

Opòcz sposobu znajdowania największego wspòlnego dzielnika przez rozkład liczb na czynniki pierwsze, istnieją inne sposoby. Najbardziej efektywnym sposobem wyznaczania największego wspòlnego dzielnika jest Algorytm Euklidesa. Już w starożytnych czasach w Egipcie, Euklides grecki nauczyciel i dziekan wydzialu nauk przyrodniczych na Uniwersytecie w Aleksandrii podał algorytm na znajdowanie największego wspòlnego dzielnika dwòch liczb naturalnych. Niżej podajemy opis algorytmu Euklidesa.

Zacznijmy opis algorytmu Euklidesa od przykładòw.

Przykład 4.7 *Znajdź największy wspòlny dzielnik liczb $a = 78$ i $b = 42$ stosując Algorytm Euklidesa.*

W liczbie $a = 78$ liczba $b = 42$ miejści się raz i zostaje reszta 36, piszemy

$$\frac{78}{42} = 1 + \frac{36}{42} \qquad lub \qquad 78 = 1 * 42 + 36.$$

Dalej wykonujemy dzielenia według schematu

$$\begin{array}{cc|c} a = 78, & b = 42 & reszta \\ - - - - - - - & & - - - \\ & \frac{78}{42} = 1 + \frac{36}{78} & 36 \\ & \frac{42}{36} = 1 + \frac{6}{36} & 6 \\ & \frac{36}{6} = 6 & 0 \end{array}$$

Największym wspòlnym dzielnikiem liczb 78 i 42 jest ostatnia reszta 6 rò̇zna od zera.

Ostatnia reszta 6 rò̇zna od zera jest rownież największym dzielnikiem reszty 36 i liczby 42.
Rozpatrzymy następny przykład zastosowania Algorytmu Euklidesa.

Przykład 4.8 *Znajdź największy wspòlny dzielnik liczb $a = 1995$ i $b = 1190$*

Podobnie jak w poprzednim przykładzie znajdujemmy największy wspòlny dzielnik liczb 1995 i 1190 stosując ten sam schemat

$$
\begin{array}{ccc}
a = 1995, \quad b = 1190 & | & reszta \\
-------- & & --- \\
\frac{1995}{1190} = 1 + \frac{805}{1190} & | & 805 \\
\frac{1190}{805} = 1 + \frac{6}{385} & | & 385 \\
\frac{805}{385} = 2 + \frac{35}{385} & | & 35 \\
\frac{385}{35} = 11 & | & 0
\end{array}
$$

Największym wspólnym dzielnikiem liczb 1995 i 1190 jest ostatnia reszta 35 różna od zera.
Zauważmy, że reszata 35 jest rownież dzielnikiem reszt 805 i 385 z poprzedniego dzielenia.
Teraz podamy ogólny schemat Algorytmu Euklidesa.
Niech r_0 i r_1 będą dwoma liczbami naturalnymi dla których chcemy znaleźć największy wspólny dzielnik.
Zakładamy, że $r_0 > r_1 > 0$.

Przykład 4.9 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb r_0 i r_1.*

Zauważamy, że jeżeli liczba d jest dzielnikiem liczb r_0 i r_1 to rownież jest dzielnikiem ich sumy $r_0 + r_1$ i różnicy $r_0 - r_1$.
Wykonując dzielenie

$$\frac{r_0}{r_1} = k_0 + \frac{r_2}{r_1}$$

obliczamy resztę

$$r_2 = r_0 - k_0 * r_1.$$

Tutaj k_0 jest całością z dzielenia liczby naturalnej liczb r_0/r_1.
Teraz staje się jasne, że jeżeli liczba d jest wspólnym dzielnikiem liczb r_0 i r_1 to jest również dzielnikiem reszt r_2.

Kolejne reszty z dzielenia obliczamy według schematu tak długo aż kolejna obliczona reszta $r_m = 0$.

$$
\begin{array}{ccc}
a = r_0, \;\; b = r_1 & | & reszta \\
- - - - - - - - & & - - - \\
\dfrac{r_0}{r_1} = k_0 + \dfrac{r_2}{r_1} & | & r_2 = r_0 - k_0 * r_1 \\
\dfrac{r_1}{r_2} = k_1 + \dfrac{r_3}{r_2} & | & r_3 = r_1 - k_1 * r_2 \\
\dfrac{r_2}{r_3} = k_2 + \dfrac{r_4}{r_3} & | & r_4 = r_2 - k_2 * r_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{r_{m-2}}{r_{m-3}} = k_{m-2} + \dfrac{r_m}{r_{m-1}} & | & r_m = r_{m-2} - k_{m-2} * r_{m-1} \\
\dfrac{r_{m-1}}{r_m} = k_{m-1} & | & r_{m+1} = 0
\end{array}
$$

Ciąg reszt $r_0 > r_1 > r_2 \cdots > r_{m-1} > r_m$ jest malejący. Ostatnia reszta z dzielenia r_m różna od zera jest największym wspólnym dzielnikiem liczb naturalnych $a = r_0$ i $b = r_1$. Zauważmy, że największy wspólny dzielnik r_m liczb r_0 i r_1 jest również największym wspólnym dzielnikiem wszystkich poprzednich reszt $r_{m-1}, r_{m-2}, \cdots, r_2, r_1, r_0$

Przykład 4.10 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* 975 *i* 690

Rozwiązanie.
Stosujemy wyżej opisany algorytm Euklidesa obliczajmy kolejne reszty

$$
\begin{array}{ccc}
a = r_0 = 975, \;\; b = r_1 = 690 & | & reszta \\
- - - - - - - - - - & & - - - - - - - - - \\
\dfrac{975}{690} = 1 + \dfrac{285}{690} & | & r_2 = 975 - 1 * 690 = 285 \\
\dfrac{690}{285} = 2 + \dfrac{120}{285} & | & r_3 = 690 - 2 * 285 = 120 \\
\dfrac{285}{120} = 2 + \dfrac{45}{120} & | & r_4 = 285 - 2 * 120 = 45 \\
\dfrac{120}{45} = 2 + \dfrac{30}{45} & | & r_5 = 120 - 2 * 45 = 30 \\
\dfrac{45}{30} = 1 + \dfrac{15}{30} & | & r_6 = 45 - 1 * 30 = 15 \\
\dfrac{30}{15} = 2 & | & r_7 = 0
\end{array}
$$

Ciąg reszt

$$975 > 690 > 285 > 120 > 45 > 30 > 15$$

jest malejący.
Ostatnia reszta z dzielenia $r_6 = 15$ różna od zera jest największym wspólnym

dzielnikiem liczb naturalnych $a = r_0 = 975$ i $b = r_1 = 690$. Zauważmy, że największy wspólny dzielnik $r_6 = 15$ liczb $r_0 = 975$ i $r_1 = 690$ jest również największym wspólnym dzielnikiem wszystkich poprzednich reszt

$$r_2 = 285,\ r_3 = 120,\ r_4 = 45,\ r_5 = 30,\ r_6 = 15$$

4.6 Najmniejsza wspólna wielokrotna

Wspólną wielokrotną dwóch liczb naturalnych jest trzecia liczba naturalna, która jest podzielna przez obie te liczby.

Przykład 4.1 *Dla liczb* 5 *i* 7 *wspólną wielkrotną jest ich iloczyn* $5 * 7 = 35$. *Liczba* 35 *jest najmniejsza wspólna wielokrotna liczb* 5 *i* 7. *Inną wspólną wielokrotną liczb* 5 *i* 7 *jest liczba* 70, *ponieważ* $70 : 5 = 24$ *i* $70 : 7 = 10$. *Jednak* 70 *nie jest najmnieszą wspólną wielokrotną liczb* 5 *i* 7.

Sposób znajdowania najmniejszej wspólnej wielokrotnej oparty jest na rozkładzie liczb na czynniki pierwsze. Wyjaśniamy to na przykładach

Przykład 4.2 *Znajdz najmniejszą wspólną wielokrotną liczb* 120 *i* 210 *Rozkładamy liczby* 120 *i* 210 *na czynniki pierwsze według schematu*

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2, \\ 60 & 2, \\ 30 & 2, \\ 15 & 3, \\ 5 & 5 \\ 51 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \\ & \end{array}$$

Wybieramy wspólne czynniki w rozkładzie obu liczb : $2, 3$ i 5. Następnie do iloczynu $2 * 3 * 5$ dopisujemy czynniki, które nie są wspólne, to znaczy nie powtarzają się. To są czynniki 4 i 7.
Najmniejszą wspólną wielokrotną jest iloczyn tych czynników

$$2 * 3 * 5 * 4 * 7 = 1540$$

Przykład 4.3 *Znajdź najmniejszą wspólną wielokrotną liczb* 910 *i* 1155 *Rozkładamy liczby* 910 *i* 1190 *na czynniki pierwsze według schematu*

$$\begin{array}{r|l} 910 & 2, \\ 455 & 5, \\ 91 & 7, \\ 13 & 13, \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 1155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Wybieramy wspólne czynniki w rozkładzie obu liczb : 5 i 7. Następnie do iloczynu $5 * 7$ dopisujemy czynniki, które się nie są wspólne, to znaczy nie powtarzają się. To są czynniki $2, 3, 11, 13$.
Najmniejszą wspólną wielokrotną jest iloczyn tych czynników

$$5 * 7 * 2 * 3 * 11 * 13 = 30030$$

4.6.1 Zadania

Zadanie 4.3 *Rozłóż na czynniki pierwsze liczby*

(i) $a = 184$

(ii) $b = 6006$

Zadanie 4.4 *Podaj resztę z dzielenia liczby a przez liczbę b*

(i) $a = 254 \quad i \quad b = 15$

(ii) $b = 2672 \quad i \quad b = 848$

Zadanie 4.5 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* 425 *i* 125

(i) przez rozkład tych liczb na czynniki pierwsze.

(ii) stosując Algorytm Euklidesa

Zadanie 4.6 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb stosując Algorytm Euklidesa*

$$2672 \;\; i \;\; 848$$

Zadanie 4.7 *Wyznacz wszystkie rozwiązania układu równań*

$$x + y = 180$$

$$NWD(x, y) = 30$$

[1]

Zadanie 4.8 *Ile wspólnych wyrazów mają ciągi arytmetyczne*

$$5, 8, 11, 14, ..., ; \quad i \quad 3, 7, 11, 15, ..., ;$$

Zadanie 4.9 *Znajdź najmniejszą wspólną wielokrotną liczb*

(i) 25 *i* 235

(ii) 512 *i* 5040

Zadanie 4.10 *Czy liczbę pierwszą p można przedstawić w postaci iloczynu różnicy i sumy liczb naturalnych a i b*

$$p = (a - b)(a + b)$$

Zadanie 4.11 *Wykaż, że dla każdej liczby pierwszej* $p > 4$ *liczba* $(p-1)(p+1)$ *jest podzialna przez* 24

[1] NWD(x,y) oznacza największy wspólny dzielnik liczby x i liczby y.

Chapter 5

Reprezentacja liczb w komputerze.

Błąd bezwzględny zaokrąglenia liczby x

$$\epsilon_x = x - fl(x)$$

Błąd względny zaokrąglenia liczby $x \neq 0$

$$\delta_x = \frac{x - fl(x)}{x}$$

Błąd procentowy zaokrąglenia liczby $x \neq 0$

$$\delta_x^{\%} = \frac{x - fl(x)}{x} * 100\%$$

Liczby w zapisie dziesiętnym zokrąglamy na r-tym miejscu po przecinku w ten sposób, że do cyfry na r-tym miejscu dodajemy 1, jeżeli następna cyfra jest większa lub równa 5. W przeciwnym razie cyfry po r-ym miejscu kasujemy. Operacje zaokrąglania liczby x na r-tym miejscu oznaczamy symbolem $fl_r(x)$.

Przykład 5.1 *Zaokrąglamy liczbę $\frac{22}{7}$ na 5-tym miejscu po przecinku jak następuje:*

$$\frac{22}{7} = 3.142857142857...; \quad fl_5(3.142857142857...) = 3.14286, \quad r = 5.$$

5.1 Zapis liczb w zmiennym przecinku

W obliczeniach z użyciem systemów obliczeniowych i komputerów liczby zapisywane są w postaci zmiennego przecinka

$$x = \mp m 10^c, \quad m - \text{ mantysa}, \quad c - \text{ cecha},$$

gdzie mantysa $m = 0.\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_r$; $\alpha_1 \neq 0$; $0 \leq \alpha_i \leq 9$; $i = 1, 2, \ldots, r$
Najbardziej znacząca cyfra $\alpha_1 \neq 0$ jest zawsze różna od zera.
Dlatego mantysa m spełnia następującą nierówność

$$0.1 \leq m < 1.$$

Jasne, że liczba x może mieć dokładną zmienno przecinkową reprezentacje w komputerze, jeżeli jej mantysa ma skończoną liczbę cyfr.

Na przykład $\frac{1}{4}$ ma dokładną reprezentacje gdyż jej mantysa $m = 0.25$ i cecha $c = 0$.
Natomiast, mantysa liczby

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

ma nieskończenie wiele cyfr $m = 0.333...$, i nie ma dokładnej reprezentacji komputerowej.
Każdą liczbę, nawet z mantysą o nieskończonej ilości cyfr, można zapisać w komputerze z dokładnością błędu zaokrągleń mantysy na r-tym miejscu po przecinku.

$$\epsilon \leq 0.\underbrace{000...0}_{r-zer}5 = 0.5\ 10^{-r}.$$

Na przykład

$$x = \frac{2}{3} = 0.66666666666...$$

zaokrąglone na 4-tym miejscu po przecinku ($r = 4$)

$$fl(x) = 0.6667$$

ma błąd zaokrągleń $\epsilon = 0.0000333...$

Zadanie 5.1 *Zaokrąglij następujące liczby na 3-cim miejscu po przecinku i zapisz je w zmiennym przecinku*

$$2\frac{3}{4},\ \frac{29}{7},\ -\frac{238}{13}.$$

5.2 Błąd bezwzględny zaokrąglenia.

Błąd bezwzgędny zaokrąglenia liczby
$x = \mp m 10^c$

$$\epsilon_x = fl_r(x) - x$$

Ten błąd spełnia nierówność

$$\mid fl_r(x) - x \mid \leq \epsilon * 10^c,$$

gdzie $\epsilon = 0.5\ 10^{-r}$.
Niech
$$x = 0.57367864 * 10^2, \quad r = 3.$$
Wtedy błąd bezwględny liczby x na trzecim miejscu po przecinkuzlędny zaokąglenia wynosi
$$| fl_3(0.57367864 * 10^2) - 0.57367864 * 10^2 |=$$
$$| 0.574 * 10^2 - 0.57367864 * 10^2 |= 0.032136 < \frac{1}{2}\ 10^{-3} * 10^2 = 0.05.$$

5.3 Błąd względny zaokrąglenia.

Błąd względny zaokrąglenia danej liczby $x = \mp m\ 10^c \neq 0$ określamy jak następuje:
$$\delta_x = \frac{\epsilon_x}{x} = \frac{fl_r(x) - x}{x}, \quad \text{gdy } \ x \neq 0.$$
Ponieważ mantysa $m \geq 0.1$, dlatego błąd względny spełnia nierówność
$$| \frac{| fl_r(x) - x}{x} |\leq 0.5 * 10^{1-r}, \quad x \neq 0.$$
Rzeczywiście,
$$| \frac{fl_r(x) - x}{x} |=| \frac{fl_r(\mp m 10^c) \pm m 10^c}{\mp m 10^c} |\leq| \frac{0.5 *\ 10^{-r}}{\mp m} |\leq 10\epsilon = 0.5 * 10^{1-r}.$$
Tak więc błąd względny nie przewyższa komputerowej precyzji $\delta = \dfrac{1}{2} 10^{1-r}$.

Na przykład, jeżeli $r = 3$ wtedy komputerowa precyzja $\delta = \dfrac{1}{2} 10^{-2}$

Obliczamy względny błąd zaokrąglenia liczby $x = 0.57367864 * 10^2$
$$|\frac{fl(x) - x}{x}| = \frac{0.032136}{0.57367864 * 10^2} = 0.0005601742.$$
Błąd względny bezpośrednio związany jest z błędem procentowym.
Mianowicie, błąd procentowy wyraża się wzorem
$$p\% = 100 * \delta_x\% = 100 \frac{fl(x) - x}{x}\%, \quad \text{gdy } \ x \neq 0.$$
Obliczamy błąd procentowy liczby $x = 0.57367864 * 10^2$

$$p\% = 100 *\ 0.5601742 * 10^{-3}\% = 0.5601742 * 10^{-1}\% = 0.05601742\%.$$

Wyniki obliczeń w komputerze czterech operacji arytmetycznych $x \pm y,\ xy$ i dzielenia x/y na ogół są niedokładne, nawet jeżeli x i y są dane w postaci

dokładnej.
Na przykład, niech $x = 0.11111111$ i $y = 0.55555555$ będą 8-cyfrowymi liczbami w 8-mio cyfrowej arytmetyce w komputerze, (8-cyfr mantysa).
Zauważamy, że wynik mnożenia $xy = 0.617283938271605 * 10^{-1}$ ma 15-sto cyfrową mantysę $m = 0.617283938271605$, która automatycznie jest zaokrąglona w komputerze do 8 cyfrowej mantysy 0.61728394 z błędem bezwzględnym $\epsilon_x = 0.000000018271605$.

Przykład 5.2 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego w 3 i 5-cio cyfrowej arytmetyce liczb w zapisie zmienno - przecinkowym*

$$\frac{2\frac{1}{3} * 3\frac{1}{7} + 45.27}{4\frac{2}{9}}$$

Podaj: błąd bezwzględny, błąd względny i błąd procentowy obliczeń.

Rozwiązanie. Najpierw, napiszemy liczby $x = 2\dfrac{1}{3},\ y = 3\dfrac{1}{7},\ z = 45.27,\ t = 4\dfrac{2}{9}$ w postaci zmiennego przecinka, potem zaokrąglimy do miejsca $r = 3$ i podamy błąd zaokrąglenia każdej z danych liczb

$$\begin{array}{lll}
x = 2\frac{1}{3} = 2.33333...; & fl_3(x) = 0.233 * 10, & \epsilon_x = 0.003333....; \\
y = 3\frac{1}{7} = 3.142857142857...; & fl_3(y) = 0.314 * 10, & \epsilon_y = 0.0042857....; \\
z = 45.27 & fl_3(z) = 0.453 * 10^2, & \epsilon_z = 0.07 \\
t = 4\frac{2}{9} = 4.222222...; & fl_3(t) = 0.422 * 10, & \epsilon_t = 0.00222....;
\end{array}$$

Dalej, stosując reguły kolejności wykonywania operacji arytmetycznych, mnożenie, dzielenie, dodawanie i odejmowanie, obliczmy wartość wyrażenia w arytmetyce 3-cyfrowej:

$$\begin{array}{lcl}
Iloczyn & = & fl_3(2\frac{1}{3}) * fl_3(3\frac{1}{7}) = fl_3(2.33 * 3.14) = fl_3(7.3162) = 7.32 \\
Suma & = & fl_3(7.32 + fl_3(45.274)) = fl_3(7.32 + 45.3) = fl_3(52.62) = 52.6 \\
Licznik & = & 52.6, \quad Mianownik = 4.22, \\
\dfrac{Licznik}{Mianownik} & = & fl_3(\dfrac{52.6}{4.22}) = fl_3(12.4645) = 12.5,
\end{array}$$

Odpowiedz: Wartość wyrażenia artmetycznego obliczonego w 3 cyfrowej arytmetyce wynosi 12.5
Teraz obliczmy wartość tego wyrażenia w 5-cio cyfrowej arytmetyce.

Mamy następujące dane:

$x = 2\frac{1}{3} = 2.33333...;$ $\quad fl_5(x) = 0.23333 * 10, \quad \epsilon_x = 0.00003333....;$

$y = 3fl_5\frac{1}{7} = 3.142857142857...;$ $\quad fl_5(y) = 0.31429 * 10, \quad \epsilon_y = 0.000042857....;$

$z = 45.27$ $\quad fl_5(z) = 0.4527 * 10^2, \quad \epsilon_z = 0.0$

$t = 4\frac{2}{9} = 4.222222...;$ $\quad fl_5(t) = 0.42222 * 10, \quad \epsilon_t = 0.0000222....;$

Podobnie, obliczmy wartość wyrażenia arytmetycznego w 5-cio cyfrowej arytmetyce

$$Iloczyn = fl_5(2\tfrac{1}{3}) * fl_5(3\tfrac{1}{7}) = fl_5(2.3333 * 3.1429) = fl_3(7.333333) = 7.3333$$

$$Suma = fl_5(7.3333 + fl_5(45.27)) = fl_5(7.3333 + 45.27) = fl_5(52.6033) = 52.603$$

$$Licznik = 52.603, \quad Mianownik = 4.2222,$$

$$\frac{Licznik}{Mianownik} = fl_5(\frac{52.603}{4.2222}) = fl_3(12.4587) = 12.459$$

Odpowiedz: Wartość wyrażenia artmetycznego obliczonego wyżej w 5-cio cyfrowej arytmetyce wynosi 12.459
Błędy: Dokładna wartość wyrażenia: = 12.457
Błąd bezwględny zaokrągleń w 3 cyfrowej arytmetyce $12.5 - 12.457 = 0.043$.
Błąd względny zaokrągleń w 3 cyfrowej arytmetyce $= \dfrac{0.043}{12.457} = 0.00345;\ 0.345\%$
Błądu bezwględny zaokrągleń w 5 cyfrowej arytmetyce $12.459 - 12.457 = 0.002$.
Błąd względny zaokrągleń w 5 cyfrowej arytmetyce $= \dfrac{0.002}{12.457} = 0.00016;\ 0.016\%$.

Zadanie 5.2 *Oblicz wartość następującego wyrażenia arytmetycznego w 3 i 5-cio cyfrowej arytmetyce liczb w zapisie zienno - przecinkowym*

$$\frac{7\frac{2}{3} * 9\frac{3}{7} + 125.97}{3\frac{7}{9}} + 256.75$$

Podaj błędy: bezwzględny, względny i procentowy obliczeń.

Chapter 6

Dzielenie z resztą. Cechy podzielności. Kongruencja.

6.1 Wstęp

Ten rozdział jest opracowany dla rozszerzonego programu matematyki i dotyczy podzielności liczb naturalnych. Treść rozdziału, ćwiczenia, przykłady i zadania dostosowane są do poziomu uczniów klas starszych szkoły podstawowej.

Operacje dzielenia z resztą i cechy podzielności liczb naturalnych opisane są w sytemie dziesiętnym.

W tym rozdziale wprowadzone jest pojęcie liczb przystających i operacja dzielenia z resztą modulo n. Pojęcie kongruencji czyli przystawania liczb całkowitych a i b względem liczby naturalnej n wykracza poza podstawę programową, jednak jest istotnym tematem w programie rozszerzonym. Podobnie równanie liniowe Diofantosa i roszerzony algorytm Euklidesa wykraczają poza podstawę programową ale doskonale pasują do programu rozszerzonego w ramach kółka z matematyki dla klas starszych.

Ćwiczenia z zadaniami dostosowanymi do programu podstawowego i do programu rozszerzonego.

6.2 Cechy podzielności liczb naturalnych

Cechy podzielności liczb naturalnych wynikają z ogólnego zapisu liczb w systemie pozycyjnym. Przypominamy, że w systemie dziesiętnym, każdą liczbę n-cyfrową piszemy w postaci

$$
\begin{aligned}
m &= \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_1\alpha_0 \\
&= \alpha_{n-1} * 10^{n-1} + \alpha_{n-2} * 10^{n-2} + \cdots + \alpha_1 * 10^1 + \alpha_0 * 10^0
\end{aligned}
$$

gdzie

$$\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \cdots, \alpha_1, \alpha_0$$

są cyframi liczby m o wartościach $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
Teraz sformułujemy i podamy prosty dowód cechy podzielności liczby naturalnej przez 3

6.2.1 Cecha podzielności liczby naturalnej przez 3 lub przez 9

Liczba naturalna

$$m = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_1\alpha_0$$

jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej suma cyfr

$$\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \cdots + \alpha_1 + \alpha_0$$

dzieli się przez 3. Ponadto, jeżeli suma cyfr liczby m dzieli się przez 9 to liczba m również jest podzielna przez 9.
Zanim podamy dowód tej cechy, rozpatrzmy kilka przykładów jej zastosowania.

Przykład 6.1 *Niech* $m = 24$. *Cyfry tej liczby dwucyfrowej, gdy* $n = 2$, *to* $\alpha_1 = 2$ *i* $\alpha_0 = 4$
Suma cyfr

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 2 + 4 = 6$$

jest podzielna przez 3. *Zatem liczba* 24 *jest podzielna przez* 3. *Rzeczywiście*

$$24 : 3 = 8$$

Przykład 6.2 *Niech* $m = 381$. *Cyfry tej liczby trzycyfrowej, gdy* $n = 3$, *to* $\alpha_2 = 2 = 3$, $\alpha_1 = 8$ *i* $\alpha_0 = 1$
Suma cyfr

$$\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 3 + 8 + 1 = 12$$

jest podzielna przez 3, *bo* $12 : 3 = 4$. *Zatem liczba* 381 *jest podzielna przez* 3. *Rzeczywiście*

$$381 : 3 = 127$$

Przykład 6.3 *Niech* $m = 5673$. *Cyfry tej liczby czterocyfrowej* $n = 4$, *to* $\alpha_3 = 5$, $\alpha_2 = 6$, $\alpha_1 = 7$ *i* $\alpha_0 = 3$
Suma cyfr

$$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 5 + 6 + 7 + 3 = 21$$

jest podzielna przez 3. *Zatem liczba* 5673 *jest podzielna przez* 3. *Rzeczywiście*

$$5673 : 3 = 1891$$

Przykład 6.4 *Niech* $m = 48537$. *Cytry tej liczby pięciocyfrowej, gdy* $n = 5$, *to* $\alpha_4 = 4$, $\alpha_3 = 8$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 7$ *i* $\alpha_0 = 7$
Suma cyfr

$$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 4 + 8 + 5 + 3 + 7 = 27$$

jest podzielna przez 3 *i przez* 9. *Zatem liczba* 5673 *jest podzielna przez* 3 *i przez* 9. *Rzeczywiście*

$$48537 : 3 = 16177, \quad i \quad 48537 : 9 = 5393$$

Dowód w przypadku liczb dwucyfrowych. Liczby dwucyfrowe piszemy w postaci

$$\alpha_1\alpha_0 = \alpha_1 * 10 + \alpha_0$$

Proste przekształcenie wyrażenia algebraicznego

$$\begin{aligned} \alpha_1 * 10 + \alpha_0 &= \alpha_1 * 10 + \alpha_0 - (\alpha_1 + \alpha_0) + (\alpha_1 + \alpha_0) \\ &= \alpha_1(10 - 1) + (\alpha_1 + \alpha_0) \\ &= 9 * \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_0) \end{aligned}$$

zawiera składnik $9 * \alpha_1$ z czynnikiem 9, zatem ten składnik jest podzielny przez 3 i przez 9.

Skąd wnioskujemy, że:

Jeżeli suma cyfr $\alpha_1 + \alpha_0$ *jest podzielny przez* 3 *lub* 9 *to liczba* m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Prawdą jest również zdanie odwrotne:

Jeżeli liczba m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9 *to suma jej cyfr* $\alpha_1 + \alpha_0$ *też jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Te dwa zdania wyrażamy jednym zdaniem:

Liczba m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9 *wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej suma cyfr* $\alpha_1 + \alpha_0$ *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Ta relacja w obie strony nazywa się warunkiem koniecznym i dostatecznym. W tym przykładzie jest to warunek konieczny i dostateczny podzielności liczby m przez 3 lub przez 9.

Powtórzmy dowód cechy podzielności liczby m przez 3 lub przez 9 dla liczb trzycyfrowych.

Dowód w przypadku liczb trzycyfrowych. Liczby trzycfrowe piszemy w

postaci
$$\alpha_2\alpha_1\alpha_0 = \alpha_2 * 100 + \alpha_1 * 10 + \alpha_0$$
Proste przekształcenie wyrażenia algebraicznego
$$\begin{aligned}
\alpha_2 * 100 + \alpha_1 * 10 + \alpha_0 &= \alpha_2 * 100 + \alpha_1 * 10 + \alpha_0 \\
&\quad -(\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0) + (\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0) \\
&= \alpha_2 * (100 - 1) + \alpha_1(10 - 1) + (\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0) \\
&= 99 * \alpha_2 + 9 * \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0)
\end{aligned}$$
zawiera składnik $99 * \alpha_2 + \ 9 * \alpha_1$, który dzieli się przez 3 i przez 9. Zatem, jeżeli suma cyfr $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ jest podzielna przez 3 lub przez 9 to liczba m jest również podzielna przez 3 lub przez 9.

Skąd wnioskujemy, że:

Jeżeli suma cyfr $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ *jest podzielny przez* 3 *lub* 9 *to liczba* m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Prawdą jest również zdanie odwrotne:

Jeżeli liczba m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9 *to suma jej cyfr* $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ *też jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Te dwa zdania wyrażamy jednym zdaniem:

Liczba m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9 *wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej suma cyfr* $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Ta relacja w obie strony nazywa się warunkiem koniecznym i dostatecznym podzielności liczby m przez 3 lub przez 9.

W przypadku ogólnym dla liczb *n-cyfrowych*, schemat dowodu cechy podzielności liczby m przez 3 lub przez 9 jest taki sam jak dla liczb dwucyfrowych i trzycyfrowych.

Zadanie 6.1 *Wiadomo, że liczba naturalna* m *jest podzielna przez* 3 *i ma dokładnie* 4 *dzielniki, których suma równa jest* 128. *Znajdź tą liczbę.*

6.2.2 Cecha podzielności liczby naturalnej przez 5

Bardzo łatwo rozpoznać liczbę m, która jest podzielna przez 5. Mianowicie, zachodzi następujące cecha podzielności:

Liczba naturalna m *jest podzielna przez* 5 *wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej cyfry jedności są* 0 *lub* 5.

Przykład 6.5 *Łatwo sprawdzamy, że liczby*

$$30, 35, 40, 45, 150, 155, 2360, 2365, 9800, 9855, 9890, 9995$$

są podzielne przez 5

Dowód cechy podzielności liczby m przez 5.

Dla uproszczenia , rozpatrzymy liczbę trzycyfrową m, która ma cyfrę jedności 0 lub 5. Wtedy liczba m rozkłada się na iloczyn liczby 5 przez liczbę naturalą. Mianowicie, mamy

$$\begin{aligned} m &= \alpha_2 * 10^2 + \alpha_1 * 10 \\ &= 5 * (2 * \alpha_2 * 10 + 2 * \alpha_1) \end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned} m &= \alpha_2 * 10^2 + \alpha_1 * 10 + 5 \\ &= 5 * (2 * \alpha_2 * 10 + 2 * \alpha_1 + 1) \end{aligned}$$

W przypadku ogólnym liczb n-cyfrowych, które mają cyfrę jedności 0 lub 5 mamy również rozkład liczby m na iloczyn liczby 5 przez liczbę naturalną. Mianowicie

$$\begin{aligned} m &= \alpha_{n-1} * 10^{n-1} + \alpha_{n-2} * 10^{n-2} + \cdots + \alpha_1 * 10^1 \\ &= 5 * (2 * \alpha_{n-1} * 10^{n-2} + 2 * \alpha_{n-2} * 10^{n-3} + \cdots + 2 * \alpha_1) \end{aligned}$$

lub

$$m = 5 * (2 * \alpha_{n-1} * 10^{n-2} + 2 * \alpha_{n-2} * 10^{n-3} + \cdots + 2 * \alpha_2 + \alpha_1)$$

Zatem w przypadku ogólnym liczba m, która ma cyfrę jedności 0 lub 5 jest podzielna przez 5.

6.3 Dzielenie liczb przez 3 z resztą

Każda liczba naturalna m dzieli się przez 3 lub dzieli się przez 3 z resztą 1 lub z resztą 2.

Wtedy piszemy

$$\begin{array}{ll} m = 3k & \textit{gdy liczba } m \textit{ jest podzielna przez } 3 \\ m = 3k + 1 & \textit{gdy liczba } m \textit{ jest podzielna przez } 3, \quad \textit{reszta } 1 \\ m = 3k + 2 & \textit{gdy liczba } m \textit{ jest podzielna przez } 3, \quad \textit{reszta } 2 \end{array}$$

Przykład 6.6 *Wykonaj dzielenie z resztą*

- $33 : 3 = 11 \quad reszta \quad 0$
- $34 : 3 = 11 \quad reszta \quad 1$
- $35 : 3 = 11 \quad reszta \quad 2$

lub piszemy dzielenie w postaci ułamków

- $\frac{33}{3} = 11 \quad reszta \quad 0$
- $\frac{34}{3} = 11 + \frac{1}{3} \quad reszta \quad 1$
- $\frac{35}{3} = 11 + \frac{2}{3} \quad reszta \quad 2$

Przykład 6.7 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *równa jest* 36. *Jakie to liczby?*

Rozwiązanie.

Napiszmy trzy kolejne liczby podzielne przez 3

$$3k - 3, \; 3k, \;\; 3k + 3$$

Suma tych liczb

$$(3k - 3) + 3k + (3k + 3) = 9k = 36$$

Skąd obliczamy

$$9k = 36, \qquad k = 36 : 9 \qquad k = 4.$$

Odpowiedź:

$$3k - 3 = 3 * 4 - 3 = 9,$$

$$3k = 3 * 4 = 12,$$

$$3k + 3 = 3 * 4 + 1 = 15$$

Kolejnymi liczbami podzelnymi przez 3, których suma równa jest 36 są liczby

$$9, \qquad 12 \qquad 15$$

Sprawdzenie:

$$9 + 12 + 15 = 36$$

Zadanie 6.2 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *równa jest* 72. *Jakie to liczby?*

Zadanie 6.3 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *z resztą* 1 *jest równa* 75. *Jakie to liczby?*

Zadanie 6.4 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *z resztą* 2 *jest równa* 105. *Jakie to liczby?*

6.4 Dzielenie liczb przez 5 z resztą

Każda liczba naturalna m dzieli się przez 5 lub dzieli się przez 5 z resztą 1 lub resztą 2 lub z resztą 3 lub z resztą 4.

Wtedy piszemy

$$m = 5k \quad gdy \;\; liczba \;\; m \;\; jest \;\; podzielna \;\; przez \;\; 5$$

$$m = 5k + 1 \quad gdy \;\; liczba \;\; m \;\; jest \;\; podzielna \;\; przez \;\; 5, \quad reszta \;\; 1$$

$$m = 5k + 2 \quad gdy \;\; liczba \;\; m \;\; jest \;\; podzielna \;\; przez \;\; 5, \quad reszta \;\; 2$$

$$m = 5k + 3 \quad gdy \;\; liczba \;\; m \;\; jest \;\; podzielna \;\; przez \;\; 5, \quad reszta \;\; 3$$

$$m = 5k + 4 \quad gdy \;\; liczba \;\; m \;\; jest \;\; podzielna \;\; przez \;\; 5, \quad reszta \;\; 4$$

Przykład 6.8 *Wykonaj dzielenie przez* 5 *z resztą*

- $35 : 5 = 7 \quad reszta \quad 0$
- $36 : 5 = 7 \quad reszta \quad 1$
- $37 : 5 = 7 \quad reszta \quad 2$
- $38 : 5 = 7 \quad reszta \quad 3$
- $39 : 5 = 7 \quad reszta \quad 4$

lub piszemy dzielenie w postaci ułamków

- $\frac{35}{5} = 7 \quad reszta \quad 0$
- $\frac{36}{5} = 7 + \frac{1}{5} \quad reszta \quad 1$
- $\frac{37}{5} = 7 + \frac{2}{5} \quad reszta \quad 2$
- $\frac{38}{5} = 7 + \frac{2}{5} \quad reszta \quad 3$
- $\frac{39}{5} = 7 + \frac{2}{5} \quad reszta \quad 4$

Przykład 6.9 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *równa jest* 45. *Jakie to liczby?*

Napiszmy trzy kolejne liczby podzielne przez 3
Rozwiązanie.

$$5k-5,\ 5k,\ \ 5k+5$$

Suma tych liczb

$$(5k-5)+5k+(5k+5)=15k=45$$

Skąd obliczamy k

$$15k=45, \qquad k=45:15 \qquad k=3.$$

Skąd obliczmy trzy kolejne liczby podzielne przez 5, których suma równa jest 45

$$5k-5=5*3-5=10,$$

$$5k=5*3=15,$$

$$5k+5=5*3+5=20$$

Kolejnymi liczbami podzelnymi przez 5, których suma równa jest 45 są liczby

$$10, \qquad 15 \qquad 20$$

Sprawdzenie:

$$10+15+20=45$$

Zadanie 6.5 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *z resztą* 1 *równa jest* 108*. Jakie to liczby?*

Rozwiązanie.
Napiszmy trzy kolejne liczby podzielne przez 5 z resztą 1

$$5k+1,\ 5k+6,\ \ 5k+11$$

Suma tych liczb

$$(5k+1)+(5k+6)+(5k+11)=15k+18=108$$

Skąd obliczamy k

$$15k=90, \qquad k=90:15 \qquad k=6.$$

Skąd obliczmy trzy kolejne liczby podzielne przez 5, których suma równa jest 108

$$5k+1=5=5*6+1+31,$$

$$5k+6=5*6+6=36,$$

$$5k+11=5*6+11=41$$

Kolejnymi liczbami podzelnymi przez 5, których suma równa jest 45 są liczby

$$31, \quad 36 \quad 41$$

Sprawdzenie:

$$31 + 36 + 41 = 108$$

Zadanie 6.6 *Suma dwóch kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *z resztą* 2 *jest równa* 79. *Jakie to liczby?*

Zadanie 6.7 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *z resztą* 3 *jest równa* 129. *Jakie to liczby?*

6.4.1 Ogólna zasada podzielności liczb naturalnych z resztą

Każda liczba naturalna m dzieli się przez liczbę naturalną n z resztą r. W wyniku dzielenia otrzymujemy całość k i resztę r.[1]
Wtedy piszemy

$$m : n = k + r : n \quad lub \quad \frac{m}{n} = k + \frac{r}{n} \quad lub \quad m = k * n + r$$

gdzie reszta $r = 0, 1, 2, ..., n - 1$.
Z operacją dzielenia liczb z resztą łączymy funkcje całość z dzielenia liczby m przez liczbę n.

• Funkcje całość z dzielenia, piszemy $E[m : n]$ lub $[m : n]$.

Wartość funkcji całość z $E[m : n]$ jest równa największej liczbie całkowitej nie większej od $m : n$.

Zatem

$$E[m : n] \leq m : n \qquad lub \qquad [m : n] \leq m : n.$$

Na przykład niech $m = 37, \quad n = 5$.

Największa liczba całkowita z tego dzielenia, ale nie większa od

$$37 : 5 = 7\frac{2}{5}$$

jest równa 7, piszemy

$$E[37 : 5] = E[\frac{37}{5}] = 7 \qquad lub \qquad [37 : 5] = [\frac{37}{5}] = 7.$$

Przykład 6.10 *Oblicz całość i resztę z dzielenia liczb* $m = 36,\ 37,\ 38,\ 39\ 40,\ 41$ *przez* $n = 6$.
Podaj wzór ogólny dzielenia liczby m *przez* 6 *z resztą* r.

[1] Wartość funkcji całość z ułamka x, piszemy $E[x] \leq x$ lub $[x] \leq x$, równa jest największej liczbie całokowitej nie większej od x. Po angielsku Entire of x

Rozwiązanie:

$$36:6=6,\ \ liczba\ 36\ jest\ podzielna\ przez\ 6,\ \ z\ reszta\ 0,\ \ calosc\ k=6,\ r=0.$$

$$37:6=6,\ \ liczba\ 37\ dzieli\ sie\ przez\ 6,\ \ z\ reszta\ 1,\ \ calosc\ k=6,\ r=1,$$

$$38:6=6,\ \ liczba\ 38\ dzieli\ sie\ przez\ 6,\ \ z\ reszta\ 2,\ \ calosc\ k=6,\ r=2,$$

$$39:6=6,\ \ liczba\ 37\ dzieli\ sie\ przez\ 6,\ \ z\ reszta\ 3,\ \ calosc\ k=6,\ r=3,$$

$$40:6=6,\ \ liczba\ 40\ dzieli\ sie\ przez\ 6,\ \ z\ reszta\ 4,\ \ calosc\ k=6,\ r=4,$$

$$41:6=6,\ \ liczba\ 31\ dzieli\ sie\ przez\ 6,\ \ z\ reszta\ 5,\ \ calosc\ k=6,\ r=5,$$

Wzór ogólny dzielenia liczby naturalnej m przez 6

$$m=6k+r,\ \ z\ \ reszta\ \ r=0,1,2,3,4,5.$$

Zadanie 6.8 *Stosując wzór ogólny dzielenia liczby naturalnej m przez 6 wykaż, że każda liczba pierwsza $p>3$ dzieli się przez 6 z resztą 1 lub z resztą 5 i wtedy można napisać liczbę p w postaci*

$$p=6*k+1,\ \ lub\ \ p=6k-1\ \ dla\ \ pewnej\ liczby\ naturalnej\ k$$

Napisz liczbę pierwszą $p=7901$ w postaci $p=6k-1$

6.5 Liczby przystające. Kongruencja

Liczby całkowite a i b nazywamy przystające względem liczby naturalnej n, jeżeli ich różnica $a-b$ jest podzielna przez n.
Na przykład

13 przystaje do 3 względem 2, bo $(13-3):2=5$, gdy $a=13,\ b=3,\ n=2.$

47 przystaje do 35 względem 6, bo $(47-35):6=2,$

gdy $a=47,\ b=35,\ n=6.$

Liczby przytające są również nazywane liczbami kogruentnymi. Kongruencja po polsku znaczy przystawanie.
Karol Gauss (1777-1835) wprowadził oznaczenia operacji modulo.

$$a\ \equiv\ b(mod\ n)$$

Powyższy zapis rozumiemy, że różnica $a-b$ jest podzielna przez n. To znaczy

$$a-b=k*n$$

dla pewnej liczby całkowitej k.

Przykład 6.11 *Pisząc*

$$27 \equiv 13(mod\ 7)$$

rozumiemy, że różnica $27 - 13$ *jest podzielna przez 7. W tym przykładzie*

$$(27 - 13) : 7 = 2.$$

To znaczy, że $27 - 13 = 2 * 7$ *dla* $k = 2$.

Przykład 6.12 *Które kongruencje są prawdziwe?*

$7 \equiv 3(mod\ 2)$, *prawdziwa bo* $(7 - 3) : 2 = 4 : 2 = 2$

$12 \equiv 5(mod\ 4)$, *nieprawdziwa bo* $(12 - 5) = 7$, 7 *niepodzielne przez* 4

Z operacją dzielenia z resztą łączymy operacje modulo $r \equiv m(mod\ n)$

• Mianowicie, resztę z dzielenia liczby m przez lliczbę n, piszemy

$$r = m(mod\ n).$$

Wynik operacji modulo jest równa różnicy

$$r = (m : n - E[m : n]) * n$$

lub

$$r = (m : n - [m : n]) * n.$$

Na przykład niech

$$m = 37, \quad n = 5.$$

Wtedy obliczamy wartość funkcji modulo, reszte z tego dzielenia

$$r = (37 : 5 - E[37 : 5]) * 5 = (7\frac{2}{5} - 7) * 5 = 2$$

lub

$$r = (37 : 5 - [37 : 5]) * 5 = (7\frac{2}{5} - 7) * 5 = 2.$$

6.5.1 Dzielenie modulo

Wynik dzielenia modulo liczby całkowitej a przez liczbę naturalą n równy jest reszcie z dzielenia liczby a przez liczbę n. Zatem, operacja modulo określona jest na zbiorze liczb całkowitych.

Na przykład

$$r = 25(mod\ 15) = 10 \quad bo \quad 25 : 15 = 1 + reszta \quad 10$$

$$r = 37(mod\ 12) = 1 \quad bo \quad 37 : 12 = 3 + reszta \quad 1$$

Dokładny wylnik

$$\frac{25}{15} = 1 + \frac{10}{15}$$
$$\frac{37}{12} = 3 + \frac{1}{12}$$

Wtedy piszemy

$$r = a(mod\ n), \quad 25(mod 15) = 10, \quad gdy \quad a = 25, \quad n = 15, \quad reszta \quad r = 10$$

$$r = a(mod\ n), \quad 37(mod 12) = 1, \quad gdy \quad a = 37, \quad n = 12, \quad reszta \quad r = 1$$

Przykład 6.13 *Oblicz* $47(mod\ 5)$

Obliczamy

$$47 : 5 = 9 + reszta \quad 2,$$

Odpowiedź:

$$47(mod\ 5) = 2$$

Przykład 6.14 *Oblicz* $123(mod\ 7)$

Obliczamy

$$123 : 7 = 17 + reszta \quad 4,$$

Odpowiedź:

$$123(mod\ 7) = 4$$

6.5.2 Własności operacji modulo

Relacja $\equiv$ kongruencji, to znaczy relacja przystawania liczb całkowitych ma podobne własności jak zwykła relacja równości $=$.
Własności kongruencji:

1. **Własność symetrii**

   $a \equiv b(mod\ n) \quad to \quad b \equiv a(mod\ n)$

   Przykład 6.15 *Rozpatrzmy kongruencje*

   $$15 \equiv 3(mod\ 4) \qquad i \quad 3 \equiv 15(mod\ 4)$$

   $$a = 15, \quad b = 3$$

   Liczby $a = 15$ i $b = 3$ są przystające względem liczby naturalnej $n = 4$ w obu przypadkach, gdyż

   $$(15 - 3) : 4 = 3 \qquad i \quad (3 - 15) : 4 = -3$$

2. **Operacja przechodnia**

   Jeżeli liczby a i b oraz liczby b i c są przystające względem liczby n, to znaczy prawdziwe są kongruencje

$$a \equiv b((mod\ n) \quad i \quad b \equiv c(mod\ n)$$

   to liczby a i c też są przystające względem liczby n, to znaczy

$$a \equiv c(mod\ n)$$

   Przykład 6.16 *Rozpatrzmy dwie kongruencje*

$$20 \equiv 12(mod\ 4) \qquad i \qquad 12 \equiv 8(mod\ 4),$$

$$a = 20, \quad b = 12, \quad c = 8, \quad n = 4.$$

   Liczby $a = 20$ i $c = 8$ też są przystające względem liczby 4, gdyż

$$20 \equiv 8(mod\ 4)$$

   ponieważ różnica

$$(20 - 8) : 4 = 3$$

3. **Dodawanie i mnożenie kongruencji**
   Jeżeli prawdziwe są kongruencje

$$a \equiv b(mod\ n) \quad i \quad c \equiv d(mod\ n)$$

   to suma stron tych kongruencji

$$a + c \equiv b + d(\text{mod } n)$$

   oraz iloczyn stron tych kongruencji

$$a \cdot c \equiv b \cdot d(\text{mod } n)$$

   Przykład 6.17 *Rozpatrzmy dwie kongruencje*

$$15 \equiv 3(mod\ 4) \qquad i \qquad 20 \equiv 5(mod\ 4)$$

$$a = 15, \quad b = 3 \quad c = 20, \quad d = 4, \quad n = 4$$

   Liczby 15 i 3 są przystają względem liczby naturalnej $n = 4$, gdyż różnice

$$(15 - 3) : 4 = 3 \qquad i \qquad (3 - 15) : 4 = -3$$

   są podzielne przez 4.

4. **Mnożenie kongruencji przez siebie. Potęga Kongruencji.** Mnożąc stronami kongruencję

$$a \equiv b(mod\; n)\}$$

przez siebie, otrzymamy

$$a^2 \equiv b^2(\text{mod } n), \quad a^3 \equiv b^3(mod\; n)\}, \; \dots \,, a^k \equiv b^k(mod\; n)\}$$

dla każdego naturalnego $k = 1, 2, 3, ...;$

Przykład 6.18 *Rozpatrzmy kongruencje*

$$9 \equiv 3(mod\; 2)$$

$$a = 9, \quad b = 3, \quad n = 2.$$

Mnożąc tą kongruencje stronami, otrzymamy

$$9^2 \equiv 3^2(mod\; 2), \quad 9^3 \equiv 3^3(mod\; 2), ..., 9^k \equiv 3^k(mod\; 2)$$

lub

$$81 \equiv 9(mod\; 2), \quad 729 \equiv 27(mod\; 2), \; \dots \,, 9^k \equiv 3^k(mod\; 2)$$

Sprawdzamy:

$(81 - 9) : 2 = 36, \qquad (729 - 27) : 2 = 702 : 2 = 351, ..., (9^k - 3^k) : 2 =) : 2$

Różnica $9^k - 3^k$ jest również podzielna przez 2. Ponieważ cyfry jedności liczb 9^k i 3^k są nieparzyste. Mianowicie cyfry jedności liczby 9^k to

$$1, 9, 1, 9, 1, 9, ...;$$

i cyfry jedności liczby 3^k to

$$9, 7, 1, 9, 7, 1, ...;$$

Różnica liczba nieparzystych jest liczbą parzystą.
Zatem liczba $9^k - 3^k$ jest podzielna przez 2 dla każdej liczby naturalnej $k = 1, 2, 3, ...;$
Skąd wynika, że liczby 9^k i 3^k są przystające modulo 2.

Przykład 6.19 *Liczba*

$$43^{125} - 33^{125}$$

jest podzielna przez 10.

Podnosząc stronami kongruencje

$$43 \equiv 33(mod\; 10)$$

do potęgi 125, otrzymamy kongruencje

$$43^{125} \equiv 33^{125}(mod\; 10)$$

Liczba 43 przystaje do liczby 33 modulo 10, gdyż

$$(43 - 33) : 10 = 1$$

Dlatego liczba 43^{125} przestaje do liczby 33^{125} modulo 10. Zatem różnica

$$43^{125} - 33^{125}$$

jest podzielna przez 10. Zastosowanie kongruencji do sprawdzania podzielności liczb wskażemy w następującym przykładzie

Przykład 6.20 *Stosując własność mnożenia stronami kongruencji, potęgowania stronami kongruencji, udowodnij, że liczba* $7^{246} + 1$ *jest podzielna przez* 10.

Rozwiązanie. Zauważmy, że liczba $7^2 + 1 = 50$ jest podzielna przez 10. To znaczy, że liczba 49 przystaje do liczby -1 modulo 10. Zatem mamy

$$49 \equiv -1(mod\ 10)$$

Podnosząc stronami tą kongruencje do potęgi 123, otrzymamy

$$49^{123} \equiv (-1)^{123}(mod\ 10), \qquad 7^{246} \equiv (-1)^{123}(mod\ 10)$$

Skąd, wynika kongruencja

$$7^{246} \equiv -1(mod\ 10)$$

która oznacza, że liczba $7^{246} + 1$ jest podzielna przez 10.

6.5.3 Rozwiązywanie kongruencji liniowych

Ogólna postać kongruencji liniowej

$$a * x \equiv b(mod\ n)$$

w której w spółczynniki $a,\ b$ są liczbami całkowitymi, natomiast n jest liczbą naturalną.
Rozwiązać kongruencję liniową znaczy wyznaczyć wszystkie liczby całkowite, które podstawione na x spełniają kongruencje, to znaczy znaleść wszystkie wartości całkowite x dla których liczba $a * x$ przystaje do liczby b modulo n.
W pierwszej kolejności powstaje pytanie, podobnie jak w przypadku innych równań, ile rozwiązań ma kongruencja liniowa? Z góry można spodziewać się że kongruencja liniowa może mieć

- jedno rozwiązanie, to znaczy istnieje tylko jedna liczba całkowita x_0 przystająca do liczby b modulo n taka, że

$$a * x_0 \equiv b(mod\ n)$$

- więcej niż jedno rozwiązanie, to znaczy istnieje skończona lub nawet nieskończona ilość liczb całkowitych $x_1, x_2, ..., x_k, ...$; które są przystające do liczby b modulo n. To znaczy

$$a * x_k \equiv b(mod\, n), \qquad k = 1, 2, 3, ...;$$

- kongruencja nie ma rozwiązań.

Istnienie rozwiązania kongruencji liniowej wynika z następującego warunku koniecznego i wystarczającego:

Warunek konieczny i wystarczający
Kongruencja liniowa

$$a * x \equiv b(mod\, n)$$

ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy największy wspólny dzielnik $NWD(a, n)$ *liczb* a *i* n *jest dzielnikiem liczby* b*, to znaczy* $NWD(a, b)|n$.
Po przeczytaniu powyższego wstępu o kongruencjach liniowych należy rozwiąwiązać kilka kongruencji, ażeby poznać sposoby ich rozwiązywania.

Przykład 6.21 *Rozwiąż kongruencje*

$$2 * x \equiv 3(mod\, 2)$$

Sprawdzamy warunek konieczny i wystarczający istnienia rozwiązania tej kongruencji.
Największy wspólny dzielnik

$$NWD(a, b) = NWD(2, 2) = 2$$

nie dzieli współczynnika

$$b = 3, \qquad 2 \dagger\ 3.$$

Zatem nie istnieje rozwiązanie tej kongruencji.

Przykład 6.22 *Rozwiąż kongruencje*

$$3 * x \equiv 6(mod\, 9)$$

Sprawdzamy warunek konieczny i wystarczający istnienia rozwiązania tej kongruencji.
Największy wspólny dzielnik

$$NWD(a, b) = NWD(3, 9) = 3$$

dzieli współczynnik

$$b = 6, \quad 3|6, \quad 6 : 3 = 2.$$

Zatem istnieje rozwiązanie tej kongruencji.
Z definicji kongruencji mamy równanie

$$3 * x - 6 = 9 * k,$$

dla wszystkich wartości calkowitych $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$

Skąd obliczamy rozwiązanie

$$3 * x = 9 * k + 6, \quad x_k = 3 * k + 2, \quad dla \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$$

Sprawdzenie:

Podstwiając rozwiązanie

$$x_k = 3 * k + 2, \quad dla \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$$

do kongruencji

$$3 * x \equiv 6 (mod\, 9)$$

otrzymamy

$$3 * (3 * k + 2) \equiv 6 (mod\, 9),$$

Skąd wynika tożsamość

$$(9 * k + 6 - 6) : 9 = 9 * k, \quad 9 * k = 9 * k$$

dla każdej całkowitej wartości $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$

6.6 Rozwiązanie ròwnania liniowego Diofantosa

Ogòlna postać ròwnań liniowych Diofantosa

$$a * x + b * y = c \tag{6.1}$$

gdzie współczynniki $a,\ b,\ c$ są danymi liczbami całkowitymi, niewiadomych x i y ròwnież szukamy w liczbach całkowitych.

6.6.1 Rozszerzony algorytm Euklidesa.

Rozszerzony algorytm Euklidesa wyznaczania największego wspòlnego dzielnika $NWD(a, b)$ prowadzi ròwnież do rozwiązania ròwnania liniowego Diofantosa, jeżeli rozwiązanie tego ròwnania istnieje.

Warunek istnienia rozwiązania ròwnania liniowego Diofantosa.
Ròwnanie liniowe Diofantosa o współczynnikach całkowitych $a,\ b,\ c$

$$a * x + b * y = c \tag{6.2}$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy największy wspòlny dzielnik $NWD(a, b)$ współczynnikòw a i b jest ròwnież dzielnikiem współczynnika c.

Zauważamy, że jeżeli liczba d jest dzielnikiem liczb r_0 i r_1 to rownież jest

dzielnikiem ich sumy $r_0 + r_1$ i różnicy $r_0 - r_1$.
Wykonując dzielenie

$$\frac{r_0}{r_1} = k_0 + \frac{r_2}{r_1}$$

obliczamy resztę

$$r_2 = r_0 - k_0 * r_1.$$

Tutaj k_0 jest całością z dzielenia liczby naturalnej liczb r_0/r_1.
Teraz staje się jasne, że jeżeli liczba d jest wspólnym dzielnikiem liczb r_0 i r_1 to jest również dzielnikiem reszty r_2.

Kolejne reszty z dzielenia obliczamy według schematu tak długo aż kolejna obliczona reszta $r_m = 0$.

$$\begin{array}{ccc}
a = r_0, \quad b = r_1 & | & reszta \\
- - - - - - - & & - - - \\
\dfrac{r_0}{r_1} = k_0 + \dfrac{r_2}{r_1} & | & r_2 = r_0 - k_0 * r_1 \\
\dfrac{r_1}{r_2} = k_1 + \dfrac{r_3}{r_2} & | & r_3 = r_1 - k_1 * r_2 \\
\dfrac{r_2}{r_3} = k_2 + \dfrac{r_4}{r_3} & | & r_4 = r_2 - k_2 * r_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{r_{m-2}}{r_{m-3}} = k_{m-2} + \dfrac{r_m}{r_{m-1}} & | & r_m = r_{m-2} - k_{m-2} * r_{m-1} \\
\dfrac{r_{m-1}}{r_m} = k_{m-1} & | & r_{m+1} = 0
\end{array}$$

Ciąg reszt $r_0 > r_1 > r_2 \cdots > r_{m-1} > r_m$ jest malejący i kończy się na reszcie $r_m \neq 0$, gdyż następne reszty $r_{m+1} = 0, \ r_{m+2} = 0, ...;$ są równe zero.
Ostatnia reszta z dzielenia r_m różna od zera jest największym wspólnym dzielnikiem liczb naturalnych $a = r_0$ i $b = r_1$. Zauważmy, że największy wspólny dzielnik r_m liczb r_0 i r_1 jest również największym wspólnym dzielnikiem wszystkich poprzednich reszt $r_{m-1}, r_{m-2}, \cdots, r_2, r_1, r_0$

Rozszerzony algorytm Euklidesa dotyczy rozwiniętej formy reszt, która prowadzi do rozwiązania równania Diofantosa. Mianowicie, ostatnia reszta różna od zera

$$r_m = NWD(a, b)$$

jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b.

Zauważmy, że reszty określone są wzorem rekurencyjnym z warunkami początkowymi

$$\begin{aligned}
r_0 &= a, \quad r_1 = b, && \textit{warunki poczatkowe} \\
r_m &= r_{m-2} - k_{m-2} * r_{m-1}, && m = 2, 3, 4, ...;
\end{aligned}$$

Podstawiają $r_0 = a, \;\; r_1 = b$

do reszty
$$r_2 = r_0 - k_0 * r_1$$
otrzymamy resztę
$$r_2 = a - k_0 * b.$$
Podobnie podstawiając $r_1 = b, \;\; r_2 = a - k_1 * b$

do reszty
$$r_3 = r_1 - k_2 * r_2$$
otrzymamy resztę
$$r_4 = (1 + k_1 * k_2)a - (k_0 + k_2 + k_0 * k_1 * k_2)b.$$
w postaci lewej strony równania Diofantosa o współczynnikach a i b.

Dalej podstawiając na r_2 i r_3 prawe strony powyższych równości, po uporządkowaniu współczynników przy a i b, otrzymamy resztę
$$r_5 = -(k_1 + k_3 + k_* k_2 * k_3)a + (1 + k_0 * k_1 + k_0 * k_3 + k) * k_1 * k_2 * k_3)b.$$
w postaci lewej strony równania Diofantosa o współczynnikach a i b.

Obliczanie następnych reszt $r_6, \; r_7, ...; r_m$ przez podstawianie wcześniej określonych reszt przez współczynniki a i b prowadzi do wyrażenia reszty w postaci
$$r_m = a * w_1(k_0, k_1, ..., k_m) + b * w_2(k_0, k_1, ..., k_m)$$
gdzie wielkości
$$w_1(k_0, k_1, k_2, ..., k_m)) \;\; i \;\; w_2(k_0, k_1, ..., k_m)$$
określone są przez dane współczynniki a i b równania Diofantosa.

Ponieważ największy wspólny dzielnik $NWD(a, b) = r_m$ to zachodzi równość
$$a * w_1(k_0, k_1, ..., k_m) + b * w_2(k_0, k_1, ..., k_m) = NWD(a, b)$$
Mnożąc obie strony powyższej równości przez stałą
$$K = \frac{c}{NWD(a, b)}.$$
otrzymamy równość Diofantosa
$$a * K * w_1(k_0, k_1, ..., k_m) + b * K * w_2(k_0, k_1, ..., k_m) = c$$
z której wynika szczególne rozwiązanie równania Diofantosa
$$x = K * w_1(k_0, k_1, ..., k_m), \quad y = K * w_2(k_0, k_1, ..., k_m)$$
Niżej podajemy tablicę wielkości w_1 i w_2 w przypadku $m = 2, 3, 4, 5$

m	$w_1(k_0,k_1,k_2,k_3)$	$w_2(k_0,k_1,k_2,k_3)$
2	1	$-k_0$
3	$-k_1$	$1+k_1$
4	$1+k_1*k_2$	$-(k_0+k2+k+0*k_1*k_2)$
5	$-(k_1+k_3+k_1*k_2*k_3)$	$1+k_0*k_1+k_0*k_3+k_2*k_3+k_o*k_1*k_2*k_3$

Korzystają z systemów obliczeniowych takich jak *Mathematica* [2] obliczamy największy wspólny dzielnik jedną instrukcją

```
GCD[a,b]
```

Na przykład największy wspólny dzielnik liczb $a = 105$ i $b = 56$ obliczamy wykonując instrukcje w systemie *Mathematica*

```
GCD[105,56]
out        7
```

Podobnie można rozwiązać w systemie *Mathematica* jedną instukcją równanie liniowe Diofantosa

$$a*x+b*y=c$$

o współczynnikach całkowitych $a,\ b,\ c.$

```
ExtendedGCD[a,b]

out        { GCD[a,b],{x,y}}
```

Rozpatrzmy następujący przykład:

Przykład 6.23 *Rozwiąż równanie Diofantosa*

$$5*x+3*y=1$$

w systemie Mathematica

Rozwiązanie:

```
ExtendedGCD[5,3]

out              {1,{-1,2}}
```

Sprawdzenie rozwiązania $x=-1,\ \ y=2$

$$5*(-1)+3*2=1$$

[2]Mathematica for doing Mathematics, by Stephen Wolfram

6.6.2 Przykłady

Stosowanie rozszerzonego algorytmu Euklidesa do rozwiązywania liniowych równań Diofantosa jest znacznie prostrze od jego ogólnego opisu. Niżej podajemy kilka przykładów zastosowania rozszerzonego algorytmu Euklidesa.

Przykład 6.24 *Rozwiąż równanie Diofantosa*

$$2 * x + 3 * y = 4. \tag{6.3}$$

Rozwiązanie:
W tym przykładzie łatwo określamy największy wspólny dzielnik współczynników $a = 2,\ b = 3$ i $c = 4$ równania liniowego Diofantosa. Mianowicie

$$NWD(2, 3) = 1$$

Również łatwo sprawdzymy warunek konieczny i wystarczający istnienia rozwiązania tego równania, gdyż największy wspólny dzielnik $NWD(2, 3) = 1$ dzieli współczynnik $c = 4$. Zatem rozwiązanie równiania (7.1) istnieje.
Stosując rozszerzony algorytm Euklidesa zanajdziemy rozwiązanie równania liniowego (7.1).

Mianowicie, najpierw znajdź największy wspólny dzielnik liczb 2 i 3 według schematu

$$\begin{array}{ll} a = r_0 = 2, \ \ b = r_1 = 3 & | \ \ reszta \\ ----------- & ---------- \\ \dfrac{3}{2} = 1 + \dfrac{1}{2} & | \ \ r_2 = 3 - 1 * 2 = 1 \\ \dfrac{2}{1} = 2 & | \ \ r_3 = 0 \end{array}$$

Skąd piszemy największy wspólny dzielnik $N(2, 3) = r_2 = 1$ w postaci równości

$$3 - 2 * 1 = 1 \quad lub \quad 2 * (-1) + 3 * 1 = 1$$

Zauważamy, że tutaj

$$\begin{array}{ll} m = 2, & \\ k_0 = 1, & k_1 = 0, \\ w_1(k_0, k_1) = -1, & w_2(k_0, k_1) = 1, \\ K = 4 & \end{array}$$

Mnożąc powyższą równość przez stałą $K = 4$, otrzymamy wyrażenie Diofantosa tego równania

$$2 * 4 * (-1) + 3 * 4 * 1 = 4$$

skąd wynika rozwiązanie szczególne

$$x = 4 * (-1) = -4 \quad i \quad y = 4 * 1 = 4$$

Sprawdzenie:

$$2 * x + 3 * y = 2 * (-4) + 3 * 4 = 4$$

Przykład 6.25 *Rozwiąż równanie Diofantosa*

$$16 * x + 7 * y = 11. \tag{6.4}$$

Rozwiązanie:
W tym przykładzie łatwo określamy największy wspólny dzielnik współczynników $a = 16,\ b = 7$ równania liniowego Diofantosa. Mianowicie

$$NWD(16, 7) = 1$$

Również łatwo sprawdzymy warunek konieczny i wystarczający istnienia rozwiązania tego równania, gdyż największy wspólny dzielnik $NWD(16, 7) = 1$ dzieli współczynnik $c = 11$. Zatem rozwiązanie równiania (6.4) istnieje.
Stosując rozszerzony algorytm Euklidesa zanajdziemy rozwiązanie równania liniowego (6.4).

Mianowicie, najpierw znajdź największy wspólny dzielnik liczb 16 i 7 według schematu

$$\begin{array}{ll}
a = r_0 = 16, \quad b = r_1 = 7 & |\quad reszta \\
----------- & ---------- \\
\dfrac{16}{7} = 2 + \dfrac{2}{7} & |\quad r_2 = 16 - 7 * 2 = 2 \\
\dfrac{7}{2} = 3 + \dfrac{1}{7} & |\quad r_3 = 7 - 3 * 2 = 1 \\
\dfrac{2}{1} = 2 & |\quad r_4 = 0.
\end{array}$$

Skąd piszemy największy wspólny dzielnik $N(16, 7) = r_3 = 1$ w postaci równości

$$r_3 = 7 - 3 * 2 = 1 \quad lub \quad r_3 = 7 * 1 - 3 * (16 - 7 * 2) = 1, \quad 16 * (-3) + 7 * 7 * 1 = 1$$

Zauważamy, że tutaj

$$\begin{array}{ll}
m = 3, & \\
k_0 = 2, & k_1 = 3, \quad k_2 = 2 \\
w_1(k_0, k_1, k_2) = -3, & w_2(k_0, k_1, k_2) = 7, \\
K = 11 &
\end{array}$$

Mnożąc powyższą równość przez stałą $K = 11$, otrzymamy wyrażenie Diofatosa tego równania

$$16 * 11 * (-3) + 7 * 11 * 7 = 11$$

Skąd wynika rozwiązanie szczególne

$$x = 11 * (-3) = -33 \quad i \quad y = 11 * 7 = 77.$$

Sprawdzenie:

$$16 * x + 7 * y = 16 * (-33) + 7 * 77 = 11$$

Rozwiążmy następne równanie z większą ilością obliczanych reszt.

Przykład 6.26 *Rozwiąż równanie liniowe Diofantosa*

$$975 * x + 690 * y = 360 \tag{6.5}$$

Rozwiązanie:

Niżej znajdujemy największy wspólny dzielnik równania (12.3) stosując rozszerzony algorytm Euklidesa, żeby znaleść rozwiązania równania (12.3). To równanie ma rozwiązanie, gdyż spełnia warunek konieczny i wystarczający. Mianowicie, największy wspólny dzielnik $NWD(975, 690) = 15$ dzieli współczynnik $c = 360$

$$\begin{array}{cc}
a = r_0 = 975,\ b = r_1 = 690 & | \quad reszta \\
anie - - - - - - - - - - - & - - - - - - - - - - \\
\dfrac{975}{690} = 1 + \dfrac{285}{690} & | \quad r_2 = 975 - 1 * 690 = 285 \\
\dfrac{690}{285} = 2 + \dfrac{120}{285} & | \quad r_3 = 690 - 2 * 285 = 120 \\
\dfrac{285}{120} = 2 + \dfrac{45}{120} & | \quad r_4 = 285 - 2 * 120 = 45 \\
\dfrac{120}{45} = 2 + \dfrac{30}{45} & | \quad r_5 = 120 - 2 * 45 = 30 \\
\dfrac{45}{30} = 1 + \dfrac{15}{30} & | \quad r_6 = 45 - 1 * 30 = 15
\end{array}$$

Ciąg reszt

$$975 > 690 > 285 > 120 > 45 > 30 > 15$$

jest malejący.
Ostatnia reszta z dzielenia $r_6 = 15$ różna od zera jest największym wspólnym dzielnikiem liczb naturalnych $a = r_0 = 975$ i $b = r_1 = 690$. Zauważmy, że największy wspólny dzielnik $r_6 = NWD(975, 690) = 15$ jest również największym wspólnym dzielnikiem wszystkich poprzednich reszt

$$r_2 = 285,\ r_3 = 120,\ r_4 = 45,\ r_5 = 30,\ r_6 = 15.$$

Dalej stosujemy roszerzenie algorytmu Euklidesa, żeby znaleść rozwiązanie równania (12.3). W tym celu zapiszemy resztę $r_6 = NWD(975, 690) = 15$ w postaci wyrażenia Diofantosa równania (12.3).

$$\begin{aligned}
r_6 &= 45 - 1 * 30 \\
&= 45 - (120 - 2 * 45) \\
&= 45 - (120 - 2 * (285 - 2 * 120)) \\
&= 45 - (120 - 2 * (285 - 2 * (690 - 2 * 285))) \\
&= 45 - (120 - 2 * (285 - 2 * (690 - 2 * (975 - 1 * 690)))) \\
&= 975 * (17 * 24) + 690 * (-24 * 24)
\end{aligned}$$

Wyrażenie Diofantosa równania (12.3) otrzymamy zbierając współczynników przy współczynnikach równania $a = 975$ i $b = 690$

$$975 * (408) + 690(-576) = 15$$

Mnożąc obie strony powyższej równości przez stałą

$$K = \frac{c}{NWD[a, b]} = \frac{360}{15} = 24$$

otrzymamy równość Diofantosa dla równania (12.3).
Skąd rozwiązanie szczególne równania (12.3)

$$x = w_1 = 408, \quad y = w_2 = -576.$$

Sprawdzenie:

$$975 * 408 - 690 * 576 = 360.$$

Przykład 6.27 *Rozwiąż równanie Diofatosa*

$$42 * x + 36 * y = 78 \tag{6.6}$$

Największy wspólny dzielnik $NWD(42, 78) = 6$ współczynników $a = 42$ i $c = 78$ dzieli współczynnik $b = 36$. Zatem rozwiązanie tego równania istnieje.

Stosując rozszerzony algorytm Euklidesa, obliczmy największy wspólny dzielnik liczb $a = 78$ i $b = 42$ i jednocześnie znajdziemy rozwiązanie równania (6.6). W liczbie $a = 78$ liczba $b = 42$ miejści się raz i zostaje reszta 36.

Dalej wykonujemy dzielenia według schematu

$$\begin{array}{ccc} a=78,\ \ b=42 & | & reszta \\ -------- & & --- \\ \dfrac{78}{42}=1+\dfrac{36}{78} & | & 36=78-42 \\ \dfrac{42}{36}=1+\dfrac{6}{36} & | & 6=42-36 \\ \dfrac{36}{6}=6 & | & 0 \end{array}$$

Rozwiązanie ròwnania (6.6) otrzymamy wyrażając ostatnią resztę 6 przez reszty poprzednie.

Mianowucie, piszemy

$$6=42-36$$

Mnożąc obie strony przez $\dfrac{78}{6}=13$ otrzymamy wyrażenie Diofantosa

$$42*13-36*13=6*13=78$$

Skąd otrzymamy rozwiązanie szczegòlne ròwnnia (6.6)

$$x=w_1=13,\ \ |;\ y=w_2=-13.$$

Sprawdzenie:

Podstawiając do ròwnaia (6.6) $x=13,\ \ y=-13$, otrzymamy ròwność

$$42*13-36*13=78$$

6.7 Zadania

Zadanie 6.9 *Oblicz*

(i) $8+10(mod\ 4)=$

(ii) $2+5(mod\ 7)=$

(iii) $12(mod\ 7)+13(mod\ 8)=$

Zadanie 6.10 *Dodaj, odejmij i pomnòż stronami kongruencje. Sprawdź wyniki tych operacji.*

$$18\equiv 10(mod\ 4)$$

oraz

$$25\equiv 17(mod\ 4)$$

Zadanie 6.11 *Znajdź największy wspòlny dzielnik liczb $a=105$ i $b=91$*

Zadanie 6.12 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* $a = 1995$ *i* $b = 1190$

Zadanie 6.13 *Rozwiąż równanie Diofantosa*

$$25 * x + 12 * y = 1$$

Zadanie 6.14 *Rozwiąż równanie Diofantosa*

$$5 * x - 3 * y = 9$$

Chapter 7

Ogólna zasada tworzenia systemów liczbowych

Ogólna forma systemów pozycyjnych liczbowych ma postać wielomianu

$$\alpha_{n-1}\rho^{n-1} + \alpha_{n-2}\rho^{n-2} + \cdots + \alpha_2\rho^2 + \alpha_1\rho + \alpha_0, \tag{7.1}$$

gdzie liczbę naturalną $\rho \geq 2$ nazywamy podstawą systemu liczbowego. Natomiast współczynniki $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, ..., \alpha_1, \alpha_0$ nazywamy cyframi systemu liczbowego. Cyfry systemu liczbowego o podstawie ρ są to liczby jednocyfrowe:

$$0, 1, 2, 3, ..., \rho - 1$$

z których tworzone są liczby systemu. Ilość cyfr zależy od podstawy ρ i jest równa ρ.
Samą liczbę x piszemy umownie jako następujący ciąg cyfr

$$x = (\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0)_\rho$$

W przypadku systemu dziesiętnego, który jest powszechnie używany, nawias z indeksem ρ opuszczamy

$$(\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0)_\rho.$$

Wtedy liczbę dziesiętną piszemy bez nawiasu

$$x = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0$$

jako ciąg współczynników wielomianu (7.1).

7.1 Przykłady zapisu liczb w różnych systemach

Przykład 7.1 *W systemie dziesiętnym $\rho = 10$. Liczbę*

$$x = 2 * 10 + 4 = 24$$

piszemy bez nawiasu $x = 24$

Przykład 7.2 *W systemie binarnym $\rho = 2$. Tą samą liczbę*

$$x = 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 = 24$$

piszemy z nawiasem $x = (10000)_2$

Przykład 7.3 *W systemie oktalnym $\rho = 8$. Tą samą liczbę*

$$x = 3 * 8 + 0 = 24$$

piszemy z nawiasem $x = (30)_8$

7.2 System dziesiętny. Decymalny

W systemie dziesiętnym podstawa $\rho = 10$. Wtedy dla $\rho = 10$ wielomian jest wyrażeniem algebraicznym

$$a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \cdots + a_1 10 + a_0 = a_{n-1}a_{n-2}...a_1 a_0$$

Współczynniki tego wyrażenia są cyframi $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$, gdzie
α_0 oznacza ilość jedności liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^0 = 10^0$.
α_1 oznacza ilość dziesiątek liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^1 = 10$.
α_2 oznacza ilość setek liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^2 = 10^2$.
α_3 oznacza ilość tysięcy liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^3 = 10^3$.
....
α_{n-1} oznacza współczynnik przy potędze $\rho^{n-1} = 10^{n-1}$.
Najbardziej znacząca cyfra jest zawsze większa lub równa 1, $\alpha_{n-1} \geq 1$.
Cyfry systemu dziesiętnego

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

są jednocześnie liczbami jednocyfrowymi
Liczby dwucyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_1 * 10 + a_0 = a_1 a_0$$

gdzie cyfrą dziesiątek jest współczynnik a_1, cyfrą jedności jest współczynnik a_0

Przykład 7.4 *Liczba* $\quad x = 57$

*5*10+7= 57*

Tytaj cyfra dziesiątek $a_1 = 5$, cyfra jedności $a_0 = 7$.

Liczby trzycyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_2 * 100 + a_1 * 10 + a_0 = a_2 a_1 a_0$$

lub w zapisie potęgi podstawy 10, piszemy

$$100 = 10 * 10 = 10^2, \quad 10^1 = 10, \quad 10^0 = 1$$

wtedy liczba trzycyfrowa ma ogólną postać

$$a_2 * 10^2 + a_1 * 10^1 + a_0 * 10^0 = a_2a_1a_0$$

Przykład 7.5 $x = 348$

$$3 * 10^2 + 4 * 10^1 + 8 * 10^0 = 348$$

gdzie cyfra setek $a_2 = 3$, *cyfra dziesiątek* $a_1 = 4$, *cyfra jedności* $a_0 = 8$.

Ogólnie liczby n-cyfrowe w pozycyjnym systemie dziesiętnym zapisujemy jako współczynniki wyrażenia algebraicznego

$$a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + a_{n-3}10^{n-3} + \cdots + a_1 10 + a_0 = a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0$$

gdzie potęga podstawy 10

$$\begin{aligned}
10^1 &= \underbrace{10}_{1} \\
10^2 &= \underbrace{10 * 10}_{2} \\
10^3 &= \underbrace{10 * 10 * 10}_{3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
10^{n-3} &= \underbrace{10 * 10 * 10 * \ldots * 10}_{n-3} \\
10^{n-2} &= \underbrace{10 * 10 * 10 * \ldots * 10}_{n-2} \\
10^{n-1} &= \underbrace{10 * 10 * 10 * \ldots * 10}_{n-1}
\end{aligned}$$

oznacza liczbę 10 pomnożoną przez siebie 1 raz lub 2 razy lub 3 razy itd...$n-3$ razy $n-2$ razy i $n-1$ razy. Liczba 10 pomnożona przez siebie zero razy $10^0 = 1$.

Przykład 7.6 *Niech* $n = 4$, *wtedy liczbę czterocyfrowa x=7831. piszemy w postaci wyrażenia arytmetycznego*

$$7 * 1000 + 8 * 100 + 3 * 10 + 1 = 7831$$

lub w symbolach potegi $1000 = 10 * 10 * 10 = 10^3, \quad 100 = 10 * 10 = 10^2, \quad 10 = 10^1, \quad 10^0 = 1$

$$7 * 10^3 + 8 * 10^2 + 3 * 10^1 + 1 = 7831$$

gdzie cyfra tysięcy $a_3 = 7$, *cyfra setek* $a_2 = 8$, *cyfra dziesiątek* $a_1 = 3$, *cyfra jedności* $a_0 = 1$.

7.2.1 Operacje arytmetyczne w systemie dziesiętnym

Operacje arytmetyczne w systemie dziesiętnym wykonujemy w kolejności:
mnożenie, dzielenie, dodawanie i odejmowanie.
Ten porządek wykonywania operacji arytmetycznych może być zmieniony przez nawiasy.

7.2.2 Dodawanie

Tabliczka dziesiętnego dodawania

	Dodawanie				dziesiętne					
+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Dodawanie dziesiętne pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 7.7 *Wykonaj dodawanie liczb dziesiętnych* 25 *i* 13

Wykonujemy pisemne dodawanie $25 + 13$, stosując tabliczkę dziesiętnego dodawania.

$$\begin{array}{rr} & 25 \\ + & 13 \\ & -- \\ & 38 \end{array}$$

Przykład 7.8 *Wykonaj dodawanie liczb dziesiętnych* 89 *i* 56

Wykonujemy pisemne dodawanie $25 + 13$, stosując tabliczkę dziesiętnego dodawania.

$$\begin{array}{rr} & 89 \\ + & 56 \\ & -- \\ & 145 \end{array}$$

7.2.3 Odejmowanie

Tabliczka dziesiętnego odejmowania

	Odejmowanie				dziesiętne					
-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Odejmowanie pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 7.9 *Wykonaj odejmowanie liczb dziesiętnych* 29 *i* 18

Wykonujemy pisemne oktalne odejmowanie $29 - 18$, stosując tabliczkę odejmowania.

$$\begin{array}{rr} & 29 \\ - & 18 \\ & -- \\ & 11 \end{array}$$

Przykład 7.10 *Wykonaj odejmowanie liczb dziesiętnych* 629 *i* 354

Wykonujemy pisemne oktalne odejmowanie $629 - 354$, stosując tabliczkę odejmowania.

$$\begin{array}{rr} & 629 \\ - & 354 \\ & -- \\ & 275 \end{array}$$

7.2.4 Mnożenie

Tabliczka mnożenia

	Mnożenie				dziesiętne					
*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Mnożenie pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 7.11 *Wykonaj mnożenie pisemne liczb dziesiętnych* 49 *i* 15

Wykonujemy pisemne binarne mnożenie $49 * 15$, stosując tabliczkę mnożenia i dodawania.

$$
\begin{array}{r}
49 \\
*\ 15 \\
- - - \\
245 \\
49 \\
- - - \\
735
\end{array}
$$

Przykład 7.12 *Wykonaj mnożenie pisemne liczb dziesiętnych* 345 *i* 123

Wykonujemy pisemne mnożenie $345 * 123$, stosując tabliczkę mnożenia i dodawania.

$$
\begin{array}{r}
345 \\
*\ 123 \\
- - - \\
1035 \\
690 \\
345 \\
- - - \\
42435
\end{array}
$$

7.2.5 Dzielenie

Dzielenie pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 7.13 *Wykonaj dzielenie pisemne liczb dziesiętnych* 345 *podziel przez* 5

Wykonujemy pisemne dzielenie 345 : 5.

$$
\begin{array}{l}
\quad 69 \\
- - - \\
\ \ 345 : 5 \\
-30 \\
\ -- \\
\quad 45 \\
\quad 45 \\
\ - - - \\
\quad =
\end{array}
$$

Przykład 7.14 *Wykonaj pisemne dzielenie liczb dziesiętnych* 1659 *przez* 21

Wykonujemy pisemne dzielenie 1659 : 21.

$$
\begin{array}{l}
\quad 79 \\
- - - \\
\ \ 1659 : 21 \\
-147 \\
\ -- \\
\quad 189 \\
\quad 189 \\
- - -- \\
\quad =
\end{array}
$$

7.3 Własności liczb parzystych i nieparzystych dziesiętnych

7.3.1 Liczby parzyste dziesiętne.

Własności liczb parzystych:

1. Liczby parzyste mają cyfry jedności 0 lub 2 lub 4 lub 6 lub 8.
   Na przkład liczby
   $$120,\ 132,\ 134,\ 156,\ 178$$
   mają odpowiednio cyfry jedności
   $$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$$
2. Liczby parzyste są podzielne przez 2, zatem mają ogólną postać
   $$n = 2 * k, \quad \text{dla} \ \ k = 0, 1, 2, 3, ...;$$
   Na przykład
   $$
   \begin{array}{ll}
   k = 0, & n = 2 * 0 = 0, \\
   k = 1, & n = 2 * 1 = 2, \\
   k = 2, & n = 2 * 2 = 4, \\
   .... & ..... \\
   k = 8, & n = 2 * 8 = 16, \\
   k = 26, & n = 2 * 26 = 52.
   \end{array}
   $$

3. Suma, rȯżnica i iloczyn liczb parzystych jest liczbą parzystą
   Na przykład:
$$a = 8, \quad b = 6,$$
$$a + b = 8 + 6 = 14, \quad a - b = 8 - 6 = 2, \quad a * b = 8 * 6 = 48$$

7.3.2 Liczby nieparzyste dziesiętne

Własności liczb nieparzystych:

1. Liczby nieparzyste mają cyfry jedności 1 lub 3 lub 5 lub 7 lub 9.
   Na przkład liczby
$$121, \ 133, \ 135, \ 157, \ 179$$
   mają odpowiednio cyfry jedności
$$1, \ 3, \ 5, \ 7, \ 9$$

2. Liczby nieparzyste mają ogȯlną postać
$$n = 2 * k + 1, \quad \text{lub} \ \ n = 2 * k - 1, \quad \text{dla} \ \ k = 0, 1, 2, 3, ...;$$
   Na przykład
$$\begin{array}{llll} k = 0, & n = 2 * 0 + 1 = 1, & lub & n = 2 * 0 - 1 = -1 \\ k = 1, & n = 2 * 1 + 1 = 3, & lub & n = 2 * 1 - 1 = 1 \\ k = 2, & n = 2 * 2 + 1 = 5, & lub & n = 2 * 2 - 1 = 3 \\ .... & ..... & & \\ k = 8, & n = 2 * 8 + 1 = 17, & lub & n = 2 * 8 - 1 = 15 \\ k = 26, & n = 2 * 26 + 1 = 53 & lub & n = 2 * 26 - 1 = 51 \\ . & & & \end{array}$$

3. Iloczyn liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą
   Na przykład:
$$5 * 7 = 35, \quad 7 * 11 = 77, \quad 9 * 15 = 105$$

4. Suma lub rȯżnica dwȯch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą. Podaj przykład.

5. Natomiast suma lub rȯżnica liczby nieparzystej i liczby parzystej jest liczbą nieparzysta. Podaj przykład.

7.3.3 Przykłady

Zadanie 7.1 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych rȯwna jest 51. Znajdz te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne liczby nieparzyste to

$$2n+1, \quad 2n+3, \quad 2n+5.$$

Ich suma

$$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)=6n+9=51$$

Obliczamy n:

$$6n+9=51, \qquad 6n=42, \qquad n=42:6=7$$

Obliczmy trzy kolejne liczby parzyste

$$2n+1=2*7+1=15, \quad 2n+3=2*7+3=17, \quad 2n+5=2*7+5=19.$$

Sprawdzenie:

$$15+17+19=51$$

Zadanie 7.2 *Suma pięciu kolejnych liczb parzystych równa jest 200. Znajdz te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne liczby parzyste to

$$2n-4, \quad 2n-2, \quad 2n, \quad 2n+2, \quad 2n+4.$$

Ich suma

$$(2n-4)+(2n-2)+2n+(2n+2+(2n+4)=10n=200$$

Obliczamy n:

$$10n=200, \qquad n=200:10=20$$

Obliczmy pięć kolejnych liczb parzystych

$$2n-4=2*20-4=36, \quad 2n-2=2*20-2=38, \quad 2n=2*20=40,$$
$$2n+2=2*20+2=42, \quad 2n+4=2*20+4=44.$$

Sprawdzenie:

$$36+38+40+42+44=200.$$

Zadanie 7.3 *Suma czterech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 160. Znajdz te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne cztery liczby nieparzyste to

$$2n-3, \quad 2n-1, \quad 2n+1 \quad 2n+3.$$

Ich suma

$$(2n-3)+(2n-3)+(2n+1)+(2n+3)=8n=160$$

Obliczamy n:

$$8n=160, \quad \text{to} \quad n=160:8=20$$

Obliczmy cztery kolejne liczby nieparzyste

$$2n-3=2*20-3=37, \quad 2n-1=2*20-1=39,$$

$$2n+1=2*20+1=41, \quad 2n+3=2*20+3=43.$$

Sprawdzenie:

$$37+39+41+43=160$$

7.3.4 Zadania

Zadanie 7.4 *Wykonaj dodawanie pisemne liczb dziesiętnych* 1659 *i* 421

Zadanie 7.5 *Wykonaj odejmowanie pisemne liczb* $1659-421$

Zadanie 7.6 *Wykonaj mnożenie pisemne liczb dziesiętnych* $345*21$

Zadanie 7.7 *Wykonaj dzielenie pisemne liczb dziesiętnych* 1722 *przez* 21

Zadanie 7.8 *Dopisz do liczby czterocyfrowej* 3058 *cyfrę* 7 *na pozycji pomiędzy jej cyfry albo na początku albo na końcu, żeby otrzymać najmniejszą liczbę pięciocyfrową.*

Zadanie 7.9 *Ile róznych liczb dwucyfrowych parzystych można utworzyć z cyfr 1,2,3,4,5 ??*

Zadanie 7.10 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 51. Znajdz te liczby.*

Zadanie 7.11 *Udowodnij, ze wyrażenie algebraiczne*

$$a^2+(a+2)(a+2)+(a+4)(a+4)+1$$

jest podzielne przez 12 dla każdej liczby naturalnej i nieparzystej a.

Zadanie 7.12 *Pomiędzy cyfry liczby 18519 wstaw cyfre 2, żeby otrzymać*

(a) liczbę największą

(b) liczbę najmiejszą

Zadanie 7.13 *Suma trzech kolejnych liczb parzystych równa jest 36. Znajdz te liczby.*

Zadanie 7.14 *Suma czterech kolejnych liczb nieparzystych ròwna jest 180. Znajdz te liczby.*

Zadanie 7.15 *Suma pięciu kolejnych liczb parzystych ròwna jest 180. Znajdz te liczby.*

Zadanie 7.16 *Oblicz sumę*

$$S_{15} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$$

używając jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Zadanie 7.17 *Oblicz sumę*

$$S_{16} = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16$$

używając jednei operacji mnożenia.

Zadanie 7.18 *Oblicz sumę*

$$S_{21} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21$$

używając jednej opercji mnożenia.

Zadanie 7.19 .

(a) *Oblicz sumę 20-stu wyrazòw ciągu*

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60.$$

(b) *Podaj wzòr ogòlny na sumę n-wyrazòw ciągu*

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \cdots, 3n.$$

(c) *Stosując ten wzòr oblicz sumę 15-stu wyrazòw tego ciągu.*

Zadanie 7.20 *Udowodnij, że wyrażenie algebraiczne*

$$(a + 1)(a + 1) + 4$$

jest podzielne przez 4 *dla każdej liczby parzystej* a.

7.4 System dwòjkowy. Binarny

W systemie pozycyjnym binarnym podstawa $\rho = 2$. Wielomian jest wyrażeniem algebraicznym

$$a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \cdots + a_1 2 + a_0 = (a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0)_2$$

Wtedy mamy tylko dwie cyfry $0, 1$ a współczynniki

$$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$$

przyjmuj wartoci 0 lub 1.
Na przykład, liczba binarna czterocyfrowa

$$x = \alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0 = 1010$$

ma
ilość jedności $2^0 = 1,\ \alpha_0 = 0,$
ilość dwòjek $2^1,\ \alpha_1 = 1,$
ilość kwadratòw dwòjek $2^2,\ \alpha_2 = 1$
ilość kubikòw dwòjek $2^3,\ \alpha_3 = 1.$
Zauważmy, że w systemie dziesiętnym podstawą jest liczba 10. W systemie dziesiętnym piszemy liczby używając 10-ciu cyfr

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Natomiast w systemie binarnym podstawą jest liczba 2. W binarnym systemie jest dwie cyfry

$$0, 1,$$

ktòre są jednocześnie liczbami jednocyfowymi binarnymi.
Liczby binarne dwucyfrowe piszemy w ogòlnej postaci

$$a_1 * 2 + a_0 = (a_1a_0)_2$$

gdzie cyfrą dwòjek jest współczynnik a_1, cyfrą jedności jest współczynnik a_0

Przykład 7.15 *Liczba binarna* $\qquad x = (11)_2$

$$1 * 2 + 1 = (11)_2.$$

Tytaj cyfrą dwòjek jest współczynnik $a_1 = 1,$ *cyfra jedności współczynnik* $a_0 = 1.$ *Wartość tej liczby binarnej w zapisie dziesiętnym jest ròwna* 3.

Liczby binarne trzycyfrowe piszemy w ogòlnej postaci

$$a_2 * 2^2 + a_1 * 2^1 + a_0 * 2^0 = (a_2a_1a_0)_2$$

gdzie kolejne potęgi dwòjki

$$2 * 2 = 2^2, \quad 2^1 = 2, \quad 2^0 = 1.$$

Przykład 7.16 *Na przykład liczbę binarną* $x = (101)_2$ *w ogòlnym zapisie piszemy*

$$a_2 * 2^2 + a_1 * 2^1 + a_0 * 2^0 = (a_2a_1a_0)_2,$$

$$1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = (101)_2,$$

gdzie cyfra binarna $a_2 = 1$ *jest wpółczynnikiem przy* 2^2*,*
cyfra binarna $a_1 = 0$ *jest wpółczynnikiem przy* 2*,*
cyfra binarna jedności $a_0 = 1$.
Wartość tej liczby binarnej

$$(101)_2 = 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 5$$

w zapisie dziesiętnym jest równa 5*.*

Ogólnie liczby n-cyfrowe w pozycyjnym systemie binarnym zapisujemy jako współczynniki wyrażenia algebraicznego

$$a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + a_{n-3}2^{n-3} + \cdots + a_1 2 + a_0 = (a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0)_2$$

gdzie kolejne potęgi podstawy 2 są:

$$2^1 = \underbrace{2}_{1}$$
$$2^2 = \underbrace{2 * 2}_{2}$$
$$2^3 = \underbrace{2 * 2 * 2}_{3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2^{n-3} = \underbrace{2 * 2 * 2 * ... * 2}_{n-3}$$
$$2^{n-2} = \underbrace{2 * 2 * 2 * ... * 2}_{n-2}$$
$$2^{n-1} = \underbrace{2 * 2 * 2 * ... * 2}_{n-1}$$

Tutaj 2^1, 2^2, 2^3 ,,, 2^{n-1} oznacza liczbę 2 pomnożoną przez siebie 1 raz lub 2 razy lub 3 razy itd...$n-3$ razy $n-2$ razy i $n-1$ razy. Liczba 2 pomnożona przez siebie zero razy $2^0 = 1$.

Przykład 7.17 *Niech* $n = 5$*, wtedy liczbę binarną pięciocyfrową* $x = (10101)_2$. *piszemy w postaci wyrażenia arytmetycznego*

$$1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = (10001)_2$$

gdzie wpsółczynnik przy 2^4 *jest równy* $a_4 = 1$*,*
wpsółczynnik przy 2^3 *jest równy* $a_3 = 0$*,*
wpsółczynnik przy 2^2 *jest równy* $a_2 = 0$*,*
wpsółczynnik przy 2^1 *jest równy* $a_1 = 0$*,*
i wpsółczynnik jedności binarnych, przy 2^0 *jest równy* $a_0 = 1$.

7.4.1 Przeliczanie liczb dziesiętnym na liczby binarnym

Każdą liczbę dziesiętną można przeliczyć na liczbę binarną. To przeliczanie jest proste. Mianowicie, dzielimy liczbę dziesiętną przez 2 i zapisujemy resztę. Następnie część całkowitą tego dzielenia dzielimy przez 2 i zapisujemy resztę. Dalej kontynuujemy dzielenie części całkowitych przez 2 zapisując ich reszty tak długo aż w wyniku dzielenia przez 2 otrzymamy część całkowitą równą 0. Liczbę binarną otrzymujemy pisząc reszty z dzielenia w kolejności zaczynają od ostatniej reszty i kończąc na pierwszej reszcie jako cyfrze binarnej jedności. Zobaczmy przeliczanie liczb dziesiętnych na binarne na przykładach.

Przykład 7.18 *Przelicz liczbę dziesiętną $x = 9$ na liczbę binarną*
Wykonujemy dzielenia liczby dziesiętnej $x = 9$ przez 2

$$\begin{array}{llll}
\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2} & reszta\ r_0 = 1 & bo & 9 = 2 * 4 + 1 \\
\frac{4}{2} = 2 & reszta\ r_1 = 0 & bo & 4 = 2 * 2 + 0 \\
\frac{2}{2} = 1 & reszta\ r_2 = 0 & bo & 2 = 2 * 1 + 0 \\
\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} & reszta\ r_3 = 1 & bo & 1 = 2 * 0 + 1
\end{array}$$

Pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej otrzymamy liczbę binarną

$$(r_3 r_2 r_1 r_0)_2 = (1001)_2$$

Powtórzmy kolejne dzielenia liczby 9 przez 2 według innego stosowanego schematu

Liczba $x/2$	*Reszta z dzielenia przez 2*
$9/2 = 4$	1
$4/2 = 2$	0
$2/2 = 1$	0
$1/2 = 0$	1

W wyniku otrzymujemy liczbę binarną pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$(1001)_2$$

Sprawdzenie:

$$(1001)_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 8 + 1 = 9.$$

Przykład 7.19 *Przelicz liczbę dziesiętną $x = 15$ na liczbę binarną*

Wykonujemy dzielenia liczby dziesiętnej $x = 15$ przez 2

$$\begin{array}{lll} \frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2} & reszta\ r_0 = 1 & bo \quad 15 = 2 * 7 + 1 \\ \frac{7}{2} = 3 & reszta\ r_1 = 1 & bo \quad 7 = 2 * 3 + 1 \\ \frac{3}{2} = 1 & reszta\ r_2 = 1 & bo \quad 2 = 2 * 1 + 1 \\ \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} & reszta\ r_3 = 1 & bo \quad 1 = 2 * 0 + 1 \end{array}$$

Pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej otrzymamy liczbę binarną

$$(r_3 r_2 r_1 r_0)_2 = (1111)_2$$

Powtórzmy kolejne dzielenia liczby 15 przez 2 według stosowanego innego schematu

Liczba x/2	*Reszta z dzielenia przez 2*
15/2 = 7	1
7/2 = 3	1
3/2 = 1	1
1/2 = 0	1

W wyniku otrzymujemy liczbę binarną pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$(1111)_2$$

Sprawdzenie:

$$(1111)_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15.$$

7.4.2 Schemat ogólny przeliczania liczb z sytemu dziesiętnego na binarny

Podobnie jak w wyżej w podanych przykładach, w schemacie ogólnym dzielimy liczbę dziesiętną x przez 2.

$$\frac{x}{2} = k_0 + \frac{r_0}{2}, \quad x = 2 * k_0 + r_0$$

gdzie k_0 to całość i r_0 to reszta z dzielenia x przez 2
Ogólnie

$$\frac{k_i}{2} = k_{i+1} + \frac{r_{i+1}}{2}, \quad k_i = 2 * k_{i+1} + r_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, ..., m.$$

gdzie k_{i+1} to całość i r_{i+1} to reszta z dzielenia k_i przez 2 dla $i = 0, 1, 2, ..., m$

7.4.3 Algorytm

Zapiszmy powyższe kolejne dzielenia w następującym schemacie

Liczba x	*Reszta*
$x/2 = k_0 + r_0/2$	r_0
$k_0/2 = k_1 + r_1/2$	r_1
$k_1/2 = k_2 + r_2/2$	r_2
$k_2/2 = k_3 + r_3/2$	r_3
$\cdots$	$\cdots$
$k_{m-2}/2 = k_{m-1} + r_{m-1}/2$	r_{m-1}
$k_{m-1}/2 = 0 + r_m/2$	r_m

W wyniku otrzymujemy liczbę binarną pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = (r_m r_{m-1} r_{m-2} ... r_1 r_0)_2$$

7.4.4 Dowòd Alegorytmu

[1] Zauważmy, że wyżej podany algorytm prowadzi do przeliczenia liczby dziesiętnej x na liczbę binarną.
Z tego algorytmu znajdujemy

$$\begin{array}{lll|l}
x & = & 2k_0 + r_0 & k_0 = 2k_1 + r_1 \\
 & = & 2^3 k_2 + 2^2 r_2 + 2r_1 + r_0 & k_2 = 2k_3 + r_3 \\
 & = & 2^4 k_3 + 2^3 r_3 + 2^2 r_2 + 2r_1 + r_0 & k_3 = 2k_4 + r_4 \\
 & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
 & = & 2^{m-1} k_{m-2} + 2^{m-2} r_{m-2} + \cdots + 2^2 r_2 + 2r_1 + r_0 & k_{m-2} = 2k_{m-1} + r_{m-1} \\
 & = & 2^m k_m + 2^{m-1} r_{m-1} + \cdots + 2^2 r_2 + 2r_1 + r_0 & k_{m-1} = 2k_m + r_m \\
 & = & 2^m r_m + 2^{m-1} r_{m-1} + \cdots + 2^2 r_2 + 2r_1 + r_0 & k_m = r_m \\
 & = & (r_m r_{m-1} r_{m-2} ... r_2 r_1 r_0)_2 &
\end{array}$$

Zastosujmy powyższy algorytm przeliczając liczbę dziesiętną $x = 256$ na binarną.

Liczba x/2	*Reszta z dzielenia przez 2*
$256/2 = 128$	0
$128/2 = 64$	0
$64/2 = 32$	0
$32/2 = 16$	0
$16/2 = 8$	0
$8/2 = 4$	0
$4/2 = 2$	0
$2/2 = 1$	0
$1/2 = 0$	1

[1] Dowòd można pominąć. Zanajomość dowodu algorytmu jest nie konieczna w przeliczaniu

W wyniku otrzymujemy liczbę binarną pisząc reszty z powyższej tabeli w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = 256 = (100000000)_2$$

Sprawdzenie:

$$(100000000)_2 = 1*2^8+0*2^7+0*2^6+0*2^5+0*2^4+0*2^3+0*2^2+0*2^1+0*2^0 = 256.$$

7.4.5 Operacje arytmetyczne w systemie binarnym

Operacje arytmetyczne w systemie binarnym dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wykonujemy w podobny sposòb jak w systemie dziesiętnym. Przypominamy, że w systemie dziesiętnym uzupełniamy do podstawy $\rho = 10$ wykonując operacje na liczbach (cyfrach dziesiętnych),$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Natomiast w systemie binarnym uzupełniamy do podstawy $\rho = 2$ wykonując operacje na liczbach (cyfrach binarnych) $0, 1$.

7.4.6 Binarne dodawanie

Tabliczka binarnego dodawania

+	0	1
0	0	1
1	1	$(10)_2$

Binarna suma

$$\begin{aligned} &0+0=0\\ &0+1=1\\ &1+0=1\\ &1+1=(10)_2 = 1*2^1+0*2^0 \end{aligned}$$

Dodawanie binarne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 7.20 *Wykonaj dodawanie binarne liczb dziesiętnych* 5 *i* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $5 = (101)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne dodawanie $101 + 11$, stosując tabliczkę binarnego dodawania.

$$\begin{array}{cr} & 101\\ + & 11\\ & ---\\ & 1000 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5+3 = (101)_2 + (11)_2 = (1000)_2 = 1*2^3+0*2^2+0*2^1+0*2^0 = 8.$$

Przykład 7.21 *Wykonaj dodawanie binarne liczb dziesiętnych* 5 *i* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $5 = (101)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne dodawanie 101 + 11, stosując tabliczkę binarnego dodawania.

$$\begin{array}{cr} & 101 \\ + & 11 \\ & --- \\ & 1000 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5 + 3 = (101)_2 + (11)_2 = (1000)_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 = 8.$$

7.4.7 Binarne odejmowanie

Tabliczka binarnego odejmowania

-	0	1
1	0	-1
1	1	0

Binarna różnica

$$\begin{array}{l} 0 - 0 = 0 \\ 0 - 1 = -1 \\ 1 - 0 = 1 \\ 1 - 1 = 0 \end{array}$$

Odejmowanie binarne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 7.22 *Wykonaj dodawanie binarne liczb dziesiętnych* 5 *i* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $5 = 101)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne odejmowanie $(101)_2 - (11)_2$, stosując tabliczkę binarnego odejmowania.

$$\begin{array}{cr} & 101 \\ - & 11 \\ & --- \\ & 10 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5 - 3 = (101)_2 - (11)_2 = (10)_2 = 1 * 2^1 + 0 * 2^0 = 2.$$

7.4.8 Binarne mnożenie

Tabliczka binarnego mnożenia

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Binarny iloczyn

$$\begin{aligned} 0*0&=0\\ 0*1&=0\\ 1*0&=0\\ 1*1&=1 \end{aligned}$$

Mnożenie binarne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 7.23 *Wykonaj mnożenie binarne liczb dziesiętnych* 5 *i* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $5 = (101)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne mnożenie $(101)_2 * (11)_2$, stosując tabliczkę binarnego mnożenia i dodawania.

$$\begin{array}{r} 101\\ *\quad 11\\ ---\\ 101\\ 101\\ ---\\ 1111 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5*3 = (101)_2 * (11)_2 = (1111)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = 15.$$

7.4.9 Binarne dzielenie

Dzielenie binarne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 7.24 *Wykonaj dzielenie binarne liczb dziesiętnych* 15 *podziel przez* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $15 = (1111)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.

Wykonujemy pisemne binarne dzielenie $(101)_2 : (11)_2$, stosując tabliczkę binarnego dzielenia i dodawania.

$$\begin{array}{l} \ \ 101 \\ ------- \\ \ \ 1111 : 11 \\ \ \ 11 \\ -- \\ \ \ = 11 \\ \ \ \ \ 11 \\ --- \\ \ \ \ \ \ \ = \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5 : 3 = (101)_2 : (11)_2 = (101)_2 = 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 5.$$

7.5 Liczby binarne parzyste i nieparzyste

Podobnie jak w systemie dziesiętnym, liczby binarne parzyste i nie parzyste poznajemy po cyfrze jedności. Mianowicie, jeżeli cyfra jedności liczby binarnej jest równa 0 to liczba binarna jest parzysta, w przeciwnym przypadku, jeżeli cyfra jedności liczby binarnej jest 1 to liczba binarna jest nieparzysta.

7.5.1 Liczby binarne parzyste

1. Liczby binarne parzyste mają cyfry jedności 0.
   Na przkład liczby binarne

   $$10,\ 110,\ 1010,\ 110110,\ 111110110$$

   mają cyfrę jedności 0, dlatego są parzyste.

2. Liczby binarne parzyste są podzielne przez binarne 10, zatem mają ogólną postać [2]

   $$n = 10 * k, \quad \text{dla}\ \ k = 0, 10, 100, 110, 1000, ...;$$

   Na przykład

   $$\begin{array}{ll} k = 0, & n = 10 * 0 = 0, \\ k = 1, & n = 10 * 1 = 10, \\ k = 10, & n = 10 * 10 = 100, \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k = 1000, & n = 1000 * 100 = 10000, \end{array}$$

[2] Tutaj binarne liczby $(10)_2 = 10,\ 110 = (110)_2,\ 1010 = (1010)_2$ itd...; piszemy bez nawiasów

3. Suma, różnica i iloczyn liczb binarnych parzystych jest liczbą binarną parzystą
   Na przykład:
$$a = 1000, \quad b = 110,$$
$$a + b = 1000 + 110 = 1110,$$
$$a - b = 1000 - 110 = 10,$$
$$a * b = 1000 * 110 = 110000$$

7.5.2 Liczby binarne nieparzyste

Własności liczb binarnych nieparzystych

1. Liczby binarne nieparzyste mają cyfrę jedności 1.
   Na przkład liczby binarne
$$1\ 11,\ 111,\ 1011,\ 110111,\ 111110111$$
   mają odpowiednio cyfrę jedności 1.

2. Liczby binarne nieparzyste mają ogólną postać
$$n = (10)_2 * k + 1, \quad \text{lub } n = (10)_2 * k - 1, \ \text{ dla } \ k = 0, 10, 100, 110, 1000, ...;$$
   Na przykład

$k = 0,$	$n = 10 * 0 + 1 = 1,$	*lub*	$n = 10 * 0 - 1 = -1$
$k = 1,$	$n = 10 * 1 + 1 = 11,$	*lub*	$n = 10 * 1 - 1 = 1$
$k = 10,$	$n = 10 * 10 + 1 = 101,$	*lub*	$n = 10 * 10 - 1 = 11$
$k = 1000,$	$n = 10 * 1000 + 1 = 10001,$	*lub*	$n = 10 * 1000 - 1 = 1111$
...	......	......	......

3. Suma lub różnica dwóch liczb binarnych nieparzystych jest liczbą parzystą.
$$101 + 11 = 1000, \quad 101 - 11 = 10$$
   Podaj inny przykład.

4. Iloczyn liczb binarnych nieparzystych jest liczbą nieparzystą
   Na przykład:
$$101 * 11 = 1111, \quad 111 * 101 = 100011$$
   Podaj inny przykład.

5. Natomiast suma liczby binarnej nieparzystej i liczby binarnej parzystej jest liczbą nieparzysta.

   Na przykład

6. $$101 + 110 = 1011.$$

   Podaj inny przykład

7. Podobnie, różnica liczby binarnej nieparzystej i liczby binarnej parzystej jest licbąnieparzystą. Na przykład

8. $$111 - 100 = 11$$

   Podaj inny przykład.

7.5.3 Przykłady

Zadanie 7.21 *Suma dwóch kolejnych liczb binarnych nieparzystych równa jest* $(100000)_2$*. Znajdź te liczby binarne.*

Rozwiązanie:
Dwie kolejne liczby binarne nieparzyste to

$$(10)_2 * n - 1, \quad (10)_2 * n + 1$$

Ich suma [3]

$$(10 * n - 1) + (10 * n + 1) = 100 * n = 100000$$

Obliczamy n:

$$100 * n = 100000, \quad \text{to} \quad n = 100000 : 100 = 1000$$

Obliczmy dwie kolejne liczby nieparzyste

$$10 * n - 1 = 10 * 1000 - 1 = 1111, \quad 10 * n + 1 = 10 * 1000 + 1 = 1001.$$

Sprawdzenie w systemie binarnym:

$$(10 * n - 1) + (10 * n + 1) = 10 * 1111 + 10 * 1001 = 11110 + 10010 = 100000$$

Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

Zadanie 7.22 *Suma trzech kolejnych liczb binarnych parzystych równa jest* $(11000)_2$*. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne trzy liczby binarne parzyste to

$$10 * n - 10, \quad 10 * n, \quad 10 * n + 10.$$

Ich suma

$$(10 * n - 10) + (10 * n) + (10 * n + 10) = 110 * n = (11000)_2.$$

[3] Tutaj pomijamy nawias $10 \equiv (10_2$

Obliczamy n:

$$110 * n = 11000, \quad n = 11000 : 110 = 100.$$

Obliczmy trzy kolejnych liczb binarne parzyste

$$10 * n - 10 = 10 * 100 - 10 = 110,$$

$$10 * n = 10 * 100 = 1000,$$

$$10 * n + 10 = 10 * 100 + 10 = 1010,$$

Sprawdzenie:

$$(110)_2 + (1000)_2 + (1110)_2 + (1010)_2 = (11000)_2.$$

Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

Zadanie 7.23 *Oblicz sumę liczb binarnych*

$$S_{1010} = 1 + 10 + 11 + 110 + 101 + 110 + 111 + 1000 + 1001 + 1010$$

używając tylko jednej operacji mnożenia binarnego i jednej operacji dzielenia binarnego.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami rȯwności, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc}
S_{1010} & = & 1 + 10 + 11 + 110 + 101 + 110 + 111 + 1000 + 1001 + 1010 \\
S_{10} & = & 1010 + 1001 + 1000 + 111 + 110 + 101 + 100 + 11 + 10 + 1 \\
--- & \ldots & ------------------- \\
10 * S_{1010} & = & \underbrace{1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011}_{1010\ skladnikow\ sumy}
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{1010} używając jednej operacji binarnego mnożenia i jednej operacji binarnego dzielenia.

$$(10)_2 * S_{1010} = (1010)_2 * (1011)_2 = (1101110)_2$$

$$S_{1010} = (1101110)_2 : (10)_2 = (11111)_2$$

Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

7.5.4 Zadania

Zadanie 7.24 *Przelicz liczby dziesiętne na liczby binarne stosując algorytm przeliczania.*

(a) $x = 53$

(b) $x = 1025$

Sprawdź otrzymane wyniki przeliczenia.

Zadanie 7.25 .
(a) *Przelicz liczby dziesiętne* 513 *i* 25 *na liczby binarne. Sprawdź wynik przeliczenia.*
(b) *Dodaj liczby binarne*

$$(1000000001)_2 + (100001)_2$$

Zadanie 7.26 .
(a) *Przelicz liczby dziesiętne* 256 *i* 16 *na liczby binarne. Sprawdź wynik przeliczenia.*
(b) *Odejmij liczby binarnych*

$$(100000000)_2 - (1000)_2$$

Sprawdź wynik odejmowanie.

Zadanie 7.27 .
(a) *Przelicz liczby dziesiętne* 129 *i* 3 *na liczby binarne. Sprawdż wynik przeliczenia.*
(b) *Pomnóż liczby* 129 *i* 3 *w systemie binarnym Sprawdź wynik mnożenia.*

Zadanie 7.28 .
(a) *Przelicz liczby dziesiętne* 63 *i* 3 *na liczby binarne. Sprawdź wynik przeliczenia.*
(b) *Podziel liczbę* 63 *przez liczbę* 3 *w systemie binarnym Sprawdź wynik dzielenia.*

Zadanie 7.29 *Ile jest różnych liczb binarnych trzycyfrowych?*

Zadanie 7.30 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność operacji dodawania,odejmowania, mnożenia i dzielenia.*

$$(10)_2 * (101)_2 + (11)_2 * (101)_2 - (110)_2 : (10)_2$$

Zadanie 7.31 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność operacji arytmetycznych z nawiasami.*

(a)

$$(100)_2 * ((10)_2 * (101)_2 + (11)_2 * (101)_2).$$

(b)

$$(10)_2 * ((110)_2 : (10)_2 - (1000)_2 : (100)_2)$$

Zadanie 7.32 *Suma pięciu kolejnych liczb binarnych parzystych równa jest* $(100100)_2$. *Znajdź te liczby.*

Zadanie 7.33 *Oblicz sumę liczb binarnych parzystych*

$$\begin{aligned} S_{10100} &= (10)_2 + (100)_2 + (110)_2 + (1000)_2 + (1010)_2 + (1100)_2 + \\ &+ (1110)_2 + (10000)_2 + (10010)_2 + (10100)_2 \end{aligned}$$

używając tylko jednej operacji mnożenia binarnego.

7.6 System ósemkowy. Octalny

W systemie pozycyjnym ósemkowym podstawa $\rho = 8$. Wielomian jest wyrażeniem algebraicznym

$$a_{n-1}8^{n-1} + a_{n-2}8^{n-2} + \cdots + a_1 8^1 + a_0 8^0 = (a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0)_8$$

Cyfry systemu ósemkowego to liczby

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Zatem, współczynniki systemu ósemkowego [4]

$$(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})_8$$

przyjmują wartoći $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
Na przykład, liczba ósemkowa $x = (\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0)_8 = (1257)_8$ ma
ilość jedności $8^0 = 1,\ \alpha_0 = 7$,
ilość ósemek $8^1,\ \alpha_1 = 5$,
ilość kwadratów ósemek $8^2,\ \alpha_2 = 2$
ilość kubików ósemek $8^3,\ \alpha_3 = 1$.
Zauważmy, że w systemie dziesiętnym podstawą jest liczba 10. W systemie dziesiętnym piszemy liczby używając 10-ciu cyfr

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Natomiast w systemie ósemkowym podstawą jest liczba 8. W ósemkowym systemie jest osiem cyfr

$$0, 1, 3, 4, 5, 6, 7$$

które są jednocześnie liczbami jednocyfowymi ósemkowymi.
Liczby ósemkowe dwucyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_1 * 8 + a_0 = (a_1a_0)_8$$

gdzie cyfrą ósemek jest współczynnik a_1, cyfrą jedności jest współczynnik a_0

[4]Liczby oktalne piszemy $(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})_8$ w nawiasie z ideksem na dole 8

Przykład 7.25 *Liczba ósemkowa* $x = (65)_8$

$$6 * 8 + 5 * 8^0 = (65)_8.$$

Tytaj cyfrą ósemek jest współczynnik $a_1 = 6$, *cyfra jedności współczynnik* $a_0 = 5$. *Wartość tej liczby ósemkowej w zapisie dziesiętnym jest równa* 53. *Rzeczywiście, obliczmy wartość dziesiętną liczby ósemkowej* $(65)_8$

$$(65)_8 = 6 * 8 + 5 * 1 = 53$$

Liczby ósemkowe trzycyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_2 * 8^2 + a_1 * 8^1 + a_0 * 8^0 = (a_2 a_1 a_0)_2$$

gdzie kolejne potęgi ósemki

$$8 * 8 = 8^2, \ \ 8^1 = 8, \ \ 8^0 = 1.$$

Przykład 7.26 *Na przykład liczbę ósemkową* $x = (256)_8$ *w ogólnym zapisie piszemy*

$$a_2 * 8^2 + a_1 * 8^1 + a_0 * 8^0 = (a_2 a_1 a_0)_2,$$
$$2 * 8^2 + 5 * 8^1 + 6 * 8^0 = (256)_8,$$

gdzie cyfra ósemkowa $a_2 = 2$ *jest wpółczynnikiem przy* 8^2,
cyfra ósemkowa $a_1 = 5$ *jest wpółczynnikiem przy* 8,
cyfra ósemkowa jedności $a_0 = 6$.
Wartość tej liczby w systemie dziesięnym

$$(256)_8 = 2 * 2^2 + 5 * 8^1 + 6 * 8^0 = 174$$

Ogólnie liczby n-cyfrowe w pozycyjnym systemie ósemkowym zapisujemy jako współczynniki wyrażenia algebraicznego

$$a_{n-1}8^{n-1} + a_{n-2}8^{n-2} + \cdots + a_1 8^1 + a_0 * 8^0 = (a_{n-1}a_{n-2}...a_1 a_0)_8$$

Przykład 7.27 *Niech* $n = 5$, *wtedy liczbę ósemkową czterocyfową* $x = (1024)_8$. *piszemy w postaci wyrażenia arytmetycznego*

$$1 * 8^3 + 0 * 8^2 + 2 * 8^1 + 4 * 8^0 = (1024)_8$$

gdzie wpsółczynnik przy 8^3 *jest równy* $a_3 = 1$,
wpsółczynnik przy 8^2 *jest równy* $a_2 = 0$,
wpsółczynnik przy 8^1 *jest równy* $a_1 = 2$,
wpsółczynnik jedności przy 8^0 *jest równy* $a_0 = 4$,
Obliczmy wartość dziesiętną tej liczby

$$1 * 8^3 + 0 * 8^2 + 2 * 8^1 + 4 * 8^0 = 512 + 16 + 4 = 536$$

7.6.1 Przeliczanie liczb dziesiętnym na liczby ósemkow

Każdą liczbę dziesiętną można przeliczyć na liczbę ósemkową, oktalną. Tak jak dla systemu binarnego to przeliczanie jest proste. Mianowicie, dzielimy liczbę dziesiętną przez 8 i zapisujemy resztę. Następnie część całkowitą tego dzielenia dzielimy przez 8 i zapisujemy resztę. Dalej kontynuujemy dzielenie części całkowitych przez 8 zapisując ich reszty tak długo aż w wyniku dzielenia przez 8 otrzymamy część całkowitą równą 0.
Liczbę ósemkową otrzymujemy pisząc reszty z dzielenia w kolejności zaczynając od ostatniej reszty i kończąc na pierwszej reszcie jako cyfrze ósemkowej jedności. Zobaczmy przeliczanie liczb dziesiętnych na ósemkowe na przykładach.

Przykład 7.28 *Przelicz liczbę dziesiętną $x = 38$ na liczbę ósemkową*

Wykonujemy dzielenia liczby dziesiętnej $x = 38$ przez 8

$$\frac{38}{8} = 4 + \frac{6}{8} \quad reszta\, r_0 = 6 \quad bo \quad 38 = 8 * 4 + 6$$
$$\frac{4}{8} = 0 \qquad\qquad reszta\, r_1 = 4 \quad bo \quad 4 = 0 + 4 * 1$$

Pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej otrzymamy liczbę ósemkową

$$x = (r_1 r_0)_8 = (46)_8$$

Powtórzmy kolejne dzielenia liczby 38 przez 8 według innego stosowanego schematu

Liczba $x/2$	*Reszta z dzielenia przez 2*
$38/8 = 4$	6
$4/8 = 0$	4

W wyniku otrzymujemy liczbę ósemkową pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = (46)_8$$

Sprawdzenie:

$$x = (46)_8 = 4 * 8 + 6 * 8^0 = 8 + 1 = 38.$$

7.6.2 Schemat ogólny przeliczania liczb z sytemu dziesiętnego na ósemkowy

Podobnie jak w wyżej w podanych przykładach, w schemacie ogólnym dzielimy liczbę dziesiętną x przez 8.

$$\frac{x}{2} = k_0 + \frac{r_0}{2}, \quad x = 2 * k_0 + r_0$$

gdzie k_0 to całość i r_0 to reszta z dzielenia x przez 8

7.6.3 Algorytm

Zapiszmy powyższe kolejne dzielenia przez 8 w następującym schemacie

Liczba x	*Reszta*
==========	====
$x/8 = k_0 + r_0/8$	r_0
$k_0/8 = k_1 + r_1/8$	r_1
$k_1/8 = k_2 + r_2/8$	r_2
$k_2/8 = k_3 + r_3/8$	r_3
$\cdots$	$\cdots$
$k_{m-2}/8 = k_{m-1} + r_{m-1}/8$	r_{m-1}
$k_{m-1}/8 = 0 + r_m/8$	r_m

W wyniku otrzymujemy liczbę ósemkową pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = (r_m r_{m-1} r_{m-2} ... r_1 r_0)_8$$

7.6.4 Dowód Alegorytmu

[5] Zauważmy, że wyżej podany algorytm prowadzi do przeliczenia liczby dziesiętnej x na liczbę ósmkową.
Z tego algorytmu znajdujemy

$$\begin{array}{rcll}
x & = & 8k_0 + r_0 & | \ k_0 = 8k_1 + r_1 \\
 & = & 8^3 k_2 + 8^2 r_2 + 8r_1 + r_0 & | \ k_2 = 8k_3 + r_3 \\
 & = & 8^4 k_3 + 8^3 r_3 + 8^2 r_2 + 8r_1 + r_0 & | \ k_3 = 8k_4 + r_4 \\
 & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & | \ \cdots\cdots\cdots \\
 & = & 8^{m-1} k_{m-2} + 8^{m-2} r_{m-2} + \cdots + 8^2 r_2 + 8r_1 + r_0 & | \ k_{m-2} = 8k_{m-1} + r_{m-1} \\
 & = & 8^m k_m + 8^{m-1} r_{m-1} + \cdots + 8^2 r_2 + 8r_1 + r_0 & | \ k_{m-1} = 8k_m + r_m \\
 & = & 8^m r_m + 8^{m-1} r_{m-1} + \cdots + 8^2 r_2 + 8r_1 + r_0 & | \ k_m = r_m \\
 & = & (r_m r_{m-1} r_{m-2} ... r_2 r_1 r_0)_8 & |
\end{array}$$

Zastosujmy powyższy algorytm przeliczając liczbę dziesiętną $x = 256$ na ósemkową.

Liczba x/8	*Reszta z dzielenia przez 8*
======	================
$256/8 = 32$	0
$32/8 = 4$	0
$4/8 = 0$	4

W wyniku otrzymujemy liczbę ósemkową pisząc reszty z powyższej tabeli w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = 256 = (400)_8$$

[5] Dowód można pominąć. Zanajomość dowodu algorytmu jest nie konieczna w przeliczaniu

Sprawdzenie:

$$x = (400)_8 = 4 * 8^2 + 0 * 8^1 + 0 * 8^0 = 256.$$

7.6.5 Operacje arytmetyczne w systemie ósemkowym

Operacje arytmetyczne w systemie ósemkowym dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wykonujemy w podobny sposób jak w systemie dziesiętnym. Przypominamy, że w systemie dziesiętnym uzupełniamy do podstawy $\rho = 10$ wykonując operacje na liczbach (cyfrach dziesiętnych),$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Podobnie w systemie binarnym uzupełniamy do podstawy $\rho = 2$ wykonując operacje na liczbach (cyfrach binarnych) $0, 1$.

7.6.6 Oktalne dodawanie

Tabliczka oktalnego dodawania

	Dodawanie				oktalnego			
+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	10	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Dodawanie ósemkowe wyjaśniamy na przykładach

Przykład 7.29 *Wykonaj dodawanie ósemkowe liczb dziesiętnych* 25 *i* 13

Liczba dziesiętna 25 w zapisie oktalnym $25 = (31)_8$, liczba dziesiętna 13 w zapisie oktalnym $13 = (15)_8$.
Wykonujemy pisemne ósemkowe dodawanie $(31)_8 + (13)_8$, stosując tabliczkę ósemkowego dodawania.

$$\begin{array}{cc} & 31 \\ + & 15 \\ & -- \\ & 46 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$(46)_8 = 4 * 8 + 6 * 8^0 = 38.$$

7.6.7 Oktalne odejmowanie

Tabliczka oktalnego odejmowania

	Odejmowanie				oktalne			
-	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
1	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
2	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
3	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
4	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
5	5	4	3	2	1	0	-1	-2
6	6	5	4	3	2	1	0	-1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

Odejmowanie oktalne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 7.30 *Wykonaj odejmowanie oktalne liczb dziesiętnych* 9 *i* 8

Liczba dziesiętna 9 w zapisie oktalnym $8 = (11)_8$, liczba dziesiętna 8 w zapisie oktalnym $8 = (10)_8$.
Wykonujemy pisemne oktalne odejmowanie $(11)_8 - (10)_8$, stosując tabliczkę oktalnego odejmowania.

$$\begin{array}{rr} & 11 \\ - & 10 \\ & --- \\ & 1 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$9 - 8 = (11)_8 - (10)_8 = (1)_8 = 1.$$

7.6.8 Oktalne mnożenie

Tabliczka oktalnego mnożenia

	Mnożenie				oktalne		
*	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	20	31	36	43
6	6	14	22	24	31	36	52
7	7	16	25	34	43	52	61

Mnożenie oktalne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 7.31 *Wykonaj mnożenie oktalne liczb dziesiętnych* 9 *i* 15

Liczba dziesiętna 9 w zapisie oktalnym $9 = (11)_8$, liczba dziesiętna 15 w zapisie oktalnym $15 = (17)_8$.
Wykonujemy pisemne binarne mnożenie $(11)_8 * (17)_8$, stosując tabliczkę oktalnego mnożenia i dodawania.

$$\begin{array}{r} 17 \\ *\ 11 \\ ---\\ 17 \\ 17\ \ \\ ---\\ 207 \end{array}$$

Sprawdzenie:
Mnożenie liczb dziesiętnych

$$9 * 15 = 135$$

Mnożenie liczb oktalnych

$$\begin{array}{l} (11)_8 * (17)_8 = (207)_8 \\ (207)_8 = 2 * 8^2 + 0 * 8^1 + 7 * 8^0 = 2 * 64 + 7 = 135 \end{array}$$

7.6.9 Oktalne dzielenie

Dzielenie oktalne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 7.32 *Wykonaj dzielenie oktalne liczb dziesiętnych* 45 *podziel przez* 3

Liczba dziesiętna 45 w zapisie oktalnym $45 = (55)_8$, liczba dziesiętna 3 w zapisie oktalnym $3 = (3)_3$.
Wykonujemy pisemne oktalne dzielenie $(17)_8 : (3)_8$.

$$\begin{array}{l} \ \ 17 \\ ---\\ \ \ 55 : 3 \\ -3 \\ -- \\ \ \ 25 \\ \ \ 25 \\ ----\\ \ \ = \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{array}{l} 45 : 3 = 15 \\ (55)_8 : (3)_8 = (17)_8 = 1 * 8 + 7 = 15. \end{array}$$

7.7 Liczby oktalne parzyste i nieparzyste

Podobnie jak w systemie dziesiętnym, liczby oktalne parzyste i nie parzyste poznajemy po cyfrze jedności. Mianowicie, jeżeli cyfra jedności liczby oktalnej jest równa 0 lub 2 lub 4 lub 6 to liczba oktalna jest parzysta, w przeciwnym przypadku, jeżeli cyfra jedności liczby oktalnej jest 1 lub 3 lub 5 lub 7 to liczba oktalna jest nieparzysta.

7.7.1 Liczby oktalne parzyste

1. Liczby oktalne parzyste mają cyfry jedności 0.
   Na przkład liczby oktalne
   $$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 20,\ 22,\ 24$$
   mają cyfrę jedności 0, 2 4, 6, dlatego są parzyste.

2. Liczby oktalne parzyste są podzielne przez oktalną 2, zatem mają ogólną postać [6]
   $$n = 2 * k, \quad \text{dla } \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, ...;$$
   Na przykład
   $$\begin{array}{ll} k = 0, & n = 2 * 0 = 0, \\ k = 1, & n = 2 * 1 = 2, \\ k = 2, & n = 2 * 2 = 4, \\ k = 3, & n = 2 * 3 = 6, \\ k = 4, & n = 2 * 4 = 10, \\ k = 5, & n = 2 * 5 = 12, \\ \dots & \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

3. Suma, różnica i iloczyn liczb oktalnych parzystych jest liczbą oktalną parzystą
   Na przykład:
   $$a = (12)_8, \quad b = (36)_8,$$
   $$a + b = (12)_8 + (36)_8 = (50)_8,$$
   $$a - b = (12)_8 - (50)_8 = -(24)_8,$$
   $$a * b = (12)_8 * (36)_8 = (454)_8$$

[6] Tutaj oktalne liczby $(1)_8 = 1,\ (2)_8 = 2,\ (3)_8$ itd...; piszemy bez nawiasów

7.7.2 Liczby oktalne nieparzyste

Własności liczb oktalnych nieparzystych

1. Liczby oktalne nieparzyste mają cyfry jedności 1 lub 3 lub 5 lub 7.
   Na przkład liczby binarne
   $$1\ 23,\ 35,\ 47,\ 121,\ 123,\ 125,\ 127$$
   mają odpowiednio cyfry jedności 1, 3 5 7 1, 3 5 7..

2. Liczby pktalne nieparzyste mają ogòlną postać
   $$n = (2)_8 * k + 1, \quad \text{lub } n = (2)_8 * k - 1, \ \text{ dla } \ k = 0, 1, 2, 3, 4, ...;$$
   Na przykład
   $$\begin{array}{llll} k = 0, & n = 2*0+1 = 1, & lub & n = 2*0-1 = -1 \\ k = 1, & n = 2*1+1 = 3, & lub & n = 2*1-1 = 1 \\ k = 2, & n = 2*2+1 = 5, & lub & n = 2*2-1 = 3 \\ k = 3, & n = 2*3+1 = 7, & lub & n = 2*3-1 = 5 \\ k = 4, & n = 2*4+1 = 11, & lub & n = 2*4-1 = 7 \\ k = 5, & n = 2*5+1 = 13, & lub & n = 2*5-1 = 11 \\ k = 6, & n = 2*6+1 = 15, & lub & n = 2*6-1 = 13 \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

3. Suma lub ròżnica dwòch liczb oktalnych nieparzystych jest liczbą parzystą.
   $$(13)_8 + (11)_8 = (24)_8, \quad (13)_8 - (11)_8 = 2$$
   Podaj inny przykład.

4. Iloczyn liczb oktalnych nieparzystych jest liczbą nieparzystą
   Na przykład:
   $$(13)_8 * (11)_8 = (143)_8,$$
   Podaj inny przykład.

5. Natomiast suma liczby oktalnej nieparzystej i liczby oktalnej parzystej jest liczbą nieparzysta.

   Na przykład

6. $$(26)_8 + (15)_8 = (43)_8.$$
   Podaj inny przykład

7. Podobnie, ròżnica liczby binarnej nieparzystej i liczby binarnej parzystej jest licbąnieparzystą. Na przykład

8. $$(26)_8 - (15)_8 = (11)_8$$
   Podaj inny przykład.

7.7.3 Przykłady

Zadanie 7.34 *Przelicz liczby dziesiętne na liczby oktalne*

(a) x=100

(b) y=500

Rozwiązanie (a):
Dzielimy liczbę dziesiętną 100 przez 8 według schematu

Liczba $x/8$	|	*Reszta z dzielenia przez 8*
======	=	================
$100/8 = 12$	|	4
$12/8 = 1$	|	4
$1/8 = 0$	|	1

Zapis oktalny liczby dziesiętnej $x = 100$ otrzymamy pisząc reszty tego dzielenie od ostatniej do pierwszej

$$x = (144)_8$$

Sprawdzenie:

$$x = (144)_8 = 1 * 8^2 + 4 * 8 + 4 = 64 + 32 + 4 = 100$$

Rozwiązanie (b):
Dzielimy liczbę dziesiętną 500 przez 8 według schemtatu

Liczba $x/8$	|	*Reszta z dzielenia przez 8*
======	=	================
$500/8 = 62$	|	4
$62/8 = 7$	|	6
$7/8 = 0$	|	7

Zapis oktalny liczby dziesiętnej $x = 500$ otrzymamy pisząc reszty tego dzielenie od ostatniej do pierwszej

$$x = (764)_8$$

Sprawdzenie:

$$x = (764)_8 = 7 * 8^2 + 6 * 8 + 4 = 64 + 32 + 4 = 448 + 48 + 4 = 500$$

Zadanie 7.35 *Suma dwóch kolejnych liczb oktalnych nieparzystych równa jest* $(500)_8$. *Znajdź te liczby binarne.*

Rozwiązanie:
Dwie kolejne liczby oktalne nieparzyste to

$$(2)_8 * n - 1, \quad (2)_8 * n + 1$$

Ich suma [7]

$$(2*n-1)+(2*n+1)=4*n=500$$

Obliczamy n:

$$4*n=500, \quad \text{to} \quad n=500:4=120$$

Obliczmy dwie kolejne liczby nieparzyste oktalne

$$(2)_8*n-1=(2)_8*(120)_8-1=(237)_8,$$

$$(2)_8*n+1=(2)_8*(120_8+1=(241)_8.$$

Sprawdzenie w systemie oktalnym:

$$(2)_8*n-1)+((2)_8*n+1)=(237)_8+(241)_8=(500)_8$$

Sprawdż rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

Zadanie 7.36 *Suma trzech kolejnych liczb oktalnych parzystych równa jest* $(52)_8$*. Znajdż te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne trzy liczby oktalne parzyste to

$$(2)_8*n-(2)_8, \quad (2)_8*n, \quad (2)_8*n+(2)_8.$$

Ich suma

$$[(2)_8*n-(2)_8]+(2)_8*n+[(2)_8*n+(2)_8]=(6)_8*n=(52)_8.$$

Obliczamy n:

$$(6)_8*n=(52)_8, \qquad n=(52)_8:(6)_8=(7)_8.$$

Obliczmy trzy kolejnych liczb binarne parzyste

$$(2)_8*n-(2)_8=(2)_8*(7)_8-(2)_8=(14)_8,$$

$$(2)_8*n=(2)_8*(7)_8=(16)_8,$$

$$(2)_8*n+(2)_8=(2)_8*(7)_8+(2)_8=(20)_8.$$

Sprawdzenie:

$$(14)_8+(16)_8+(20)_8=(52)_8.$$

Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

Zadanie 7.37 *Oblicz sumę liczb oktalnych*

$$S_{20}=10+11+12+13+14+15+20$$

używając tylko jednej operacji mnożenia oktalnego i jednej operacji dzielenia oktalnego.

[7] Tutaj pomijamy nawias $2\equiv(2)_8$ wykonując operacje na liczbach oktalnych

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami składniki sumy wykonując dodawanie oktalne na liczbach oktalnych, jak niżej:

$$
\begin{array}{ccc}
S_{20} & = & 10+11+12+13+14+15+16+17+20 \\
S_{20} & = & 20+17+16+15+14+13+12+11+10 \\
--- & . & ------------------ \\
2*S_{20} & = & \underbrace{30+30+30+30+30+30+30+30+30}_{(11)_8\ oktalnych\ skladnikow\ sumy}
\end{array}
$$

Skąd obliczmy sumę S_{20} używając jednej operacji oktalnego mnożenia i jednej operacji oktalnego dzielenia.

$$(2)_8 * S_{20} = (11)_8 * (36)_8 = (416)_8$$

$$S_{20} = (416)_8 : (2)_8 = (207)_8$$

Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

7.7.4 Zadania

Zadanie 7.38 *Przelicz liczby dziesiętne na liczby oktalne stosując algorytm oktalnego przeliczania.*

(a) $x = 53$

(b) $x = 1025$

Sprawdź otrzymane wyniki przeliczenia w systemie oktalnym i systemie dziesiętnym.

Zadanie 7.39 .
(a) Przelicz liczby dziesiętne 513 *i* 25 *na liczby oktalne.*
(b) Dodaj liczby oktalne

$$(1003)_8 + (10005)_8$$

Sprawdź wynik dodawania w systemie oktalnym i dziesiętnym

Zadanie 7.40 .
(a) Przelicz liczby dziesiętne 256 *i* 16 *na liczby oktalne.*
(b) Odejmij liczby oktalnych

$$(10005)_8 - (1003)_8$$

Sprawdź wynik odejmowanie w systemie oktalnym i dziesiętnym.

Zadanie 7.41 .
(a) Przelicz liczby dziesiętne 129 *i* 3 *na liczby binarne.*
(b) Pomnóż liczby 129 *i* 3 *w systemie oktalnym Sprawdź wynik mnożenia w systemie oktalnym i dziesieętnym.*

Zadanie 7.42 *Ile jest różnych liczb oktalnych dwucyfrywych?*

Zadanie 7.43 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego liczb oktalnych zachowując kolejność operacji dodawania,odejmowania, mnożenia i dzielenia.*

$$(10)_8 * (11)_8 + (12)_8 * (13)_8 - (14)_8 : (4)_8$$

Zadanie 7.44 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność operacji arytmetycznych z nawiasami.*

(a)
$$(2)_8 * [(10)_8 * (11)_8 + (11)_8 * (12)_8].$$

(b)
$$(3)_8 * [(160)_8 : (10)_8 - (20)_8 : (100)_8]$$

Sprawdź wynik oktalnych obliczeń w systemie dziesiętnym.

Zadanie 7.45 *Suma trzech kolejnych liczb oktalnych parzystych równa jest* $(14)_8$*. Znajdż te liczby.*

Zadanie 7.46 *Oblicz sumę liczb oktalnych nieparzystych*

$$S_{23} = (11)_8 + (13)_8 + (15)_8 + (17)_8 + (21)_8 + (23)_8$$

używając tylko jednej operacji mnożenia oktalnego.

Chapter 8

Wielomiany

Pod pojęciem *wielomiany* rozumiemy najprostrzą klasę funkcji o bardzo szerokim zakresie zastosowań. W tym wielomiany stopnia $n = 0, 1, 2, 3, ..., n$, jednej i wielu zmiennych, wielomiany interpolacyjne, wielomiany jako funkcje specjalne i dwumian Newtona.
Jasne, że w programie szkoły podstawowej nie wszystkie rodzaje wielomianów występują, a jeżeli występują to w bardzo elementarnej formie. Zatem w tym rozdziale wielomiany wprowadzone są w najprostrzej formie wsparte licznymi przykładmi i zadaniami.

8.1 Jednomiany, dwumiany i trójmiany

Jednomianem nazywamy ciąg liczb lub ciąg liczb i liter lub ciąg tylko liter połączonych operacją mnożenia.
Wymieńmy kilka jednomianów

$$\begin{array}{lll}
125 & 247, & \textit{jedna liczba jest jednomianem} \\
2*5*7, & 3*4*5*6*7, & \\
3*a*b & a*b*c, & \\
4**5*x*y*z, & 5*a^2*b^3*c^4, & \\
15*x^3*y^2*z^3 & 7*9*a^4*b^5*x^6*y^7. &
\end{array}$$

Każdy jedomian jest szczególnym wyrażeniem arytmetycznym lub algebraicznym, gdyż występują w ich określeniu liczby lub litery połączone tylko operacją mnożenia.
Dwumianem nazywamy sumę dwóch jednomianów.
Na przykład

$$a + b, \quad a - b, \quad a^2 + b^2, \quad 3x^3 + 5y^3.$$

Podobnie trójmianem nazywamy sumę trzech jednomianów.
Na przykład

$$\begin{array}{ll}
a + b + c, & 2*x_3 + 4*y^3 + 5*x*y, \\
a^2 + 2*a*b + b^2, & x^2 - 2*x*y + y^2.
\end{array}$$

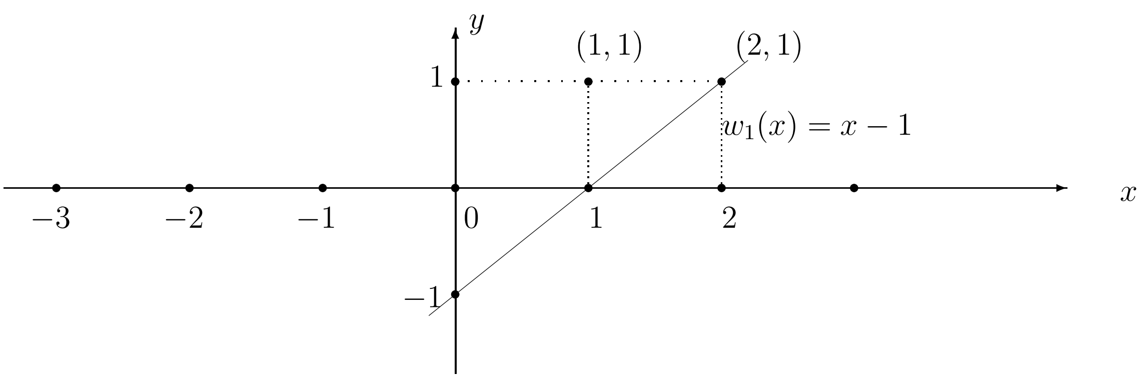
8.2 Funkcja liniowa.

Funkcja liniowa, czyli wielomian stopnia $n = 1$ jest dwumianem szczególnej postaci:

$$w_1(x) = a\,x + b \tag{8.1}$$

o współczynnikach a i b oraz zmiennej x.
Dwumian $w_1(x) = a\,x + b$ nazywamy funckcją liniową, gdyż jej wykresem jest linia prosta. Jeżeli współczynnik $a = 0$ to funkcja liniowa jest stała, której wykresem jest prosta równoległa do osi x. Funkcja liniowa ustala zależność pomiędzy współrzędnymi x i y, którą piszemy

$$w_1(x) = ax + b, \qquad \textit{lub} \qquad y = ax + b$$



Wykres funkcji liniowej $y = x - 1$, w układzie wspołrzędnydnych x, y

Zauważmy, że linia prosta o równaniu $y = x - 1$ przechodzi przez punkty $(0, -1)$, $(1, 0)$ i przez punkt $(2, 1)$. Wartości tej funkcji liniowej obliczamy niżej dla argumentu $x = 0,\ 1,\ 2$

$$w_1(0) = 0 - 1 = -1, \quad w_1(1) = 1 - 1 = 0, \quad w_1(2) = 2 - 1 = 1.$$

Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.
Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współrzędnych

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1)$$

piszemy jako następującą zależność współrzędnej y od współrzędnej x:

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \tag{8.2}$$

Istotnie, gdy $x = x_0$ to $y = y_0$ lub gdy $x = x_1$ to $y = y_1$. To znaczy, że punkty (x_0, y_0), (x_1, y_1) leżą na prostej, gdyż ich współrzędne spełniają równanie prostej.

Przykład 8.1 *Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty* $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ *i* $(x_1, y_1) = (0, 1)$. *Sprawdź który z punktów* $(1, 1)$, $(1, 2)$ *leży na prostej.*

Rozwiązanie:
Piszemy równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$(x_0, y_0) = (-1, 0) \quad i \quad (x_1, y_1) = (0, 1)$$

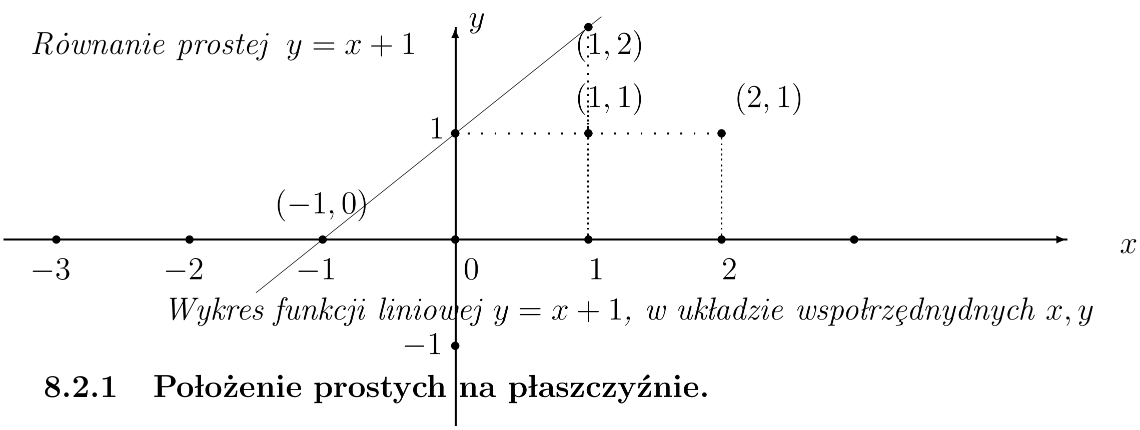
podstwiając do wzoru (12.2) ich współrzędne

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 = \frac{x - 0}{-1 - 0} * 0 + \frac{x + 1}{0 + 1} * 1 = x + 1$$

Odpowiedź: Rówanie prostej przechodzącej przez punkty $(-1, 0)$ i $(0, 1)$

$$y = x + 1$$

Punkt $(1, 1)$ nie leży na prostej $y = x + 1$ ponieważ jego współrzędne nie spełniają równania $1 \neq 1+1$. Natomiast punkt $(1, 2)$ leży na prostej $y = x+1$ ponieważ jego współrzędne spełniają $2 = 1 + 1$ (zobacz rysunek, niżej).



Wykres funkcji liniowej $y = x + 1$, w układzie wspołrzędnydnych x, y

8.2.1 Położenie prostych na płaszczyźnie.

Funkcja liniowa

$$y = ax + b$$

określa położenie prostej na płaszczyźnie (x, y). To znaczy punkt o wspórzędnych (x, y) leży na prostej, jeżeli $y = ax + b$.

Funkcja liniowa $y = ax + b$ przecina oś x w punkcie $(\frac{-b}{a}, 0)$ i przecina oś y w punkcie $(0, b)$.

Mówimy, że liczba x jest proporcjonalna do liczby y, jeżeli $y = ax$ lub $\frac{y}{x} = a$. Zatem proporcjonalność dwóch wielkości wyraża funkcja liniowa. Wtedy $a \neq 0$ jest współczynnikiem proporcjonalności.

Zauważmy, że prosta $y = ax + b$

- przecina oś y, w punkcie $(0, b)$, gdy $x = 0$, wtedy

$$y = ax + b = a * 0 + b = b$$

- przecina oś x, w punkcie $(-\frac{b}{a}, 0)$, gdy $x = -\frac{b}{a}$, wtedy

$$y = ax + b = a(-\frac{b}{a}) + b = 0.$$

- jeżeli $a = 0$ to $y = b$ wtedy prosta jest równoległa do osi x
- dwie proste o równaniach

$$y = a_1x + b_1, \qquad y = a_2x + b_2$$

  przecinają się w punkcie (x_0, y_0), jeżeli ten punkt spełnia rónania tych prostych

$$y_0 = a_1x_0 + b_1, \qquad i \qquad y_0 = a_2x_0 + b_2$$

- dwie proste są równoległe, jeżeli $a_1 = a_2$. Wtedy proste nie mają punktu wspólnego lub pokrywają się.

Przykład 8.2 *Podaj położenie na płaszczyŃnie (x, y) dwóch prostych o rónaniach*

$$y = x, \qquad y = 1 - x$$

Znajdź ich punkty przecięcia z osiami x i y oraz punkt przecięcia tych prostych.

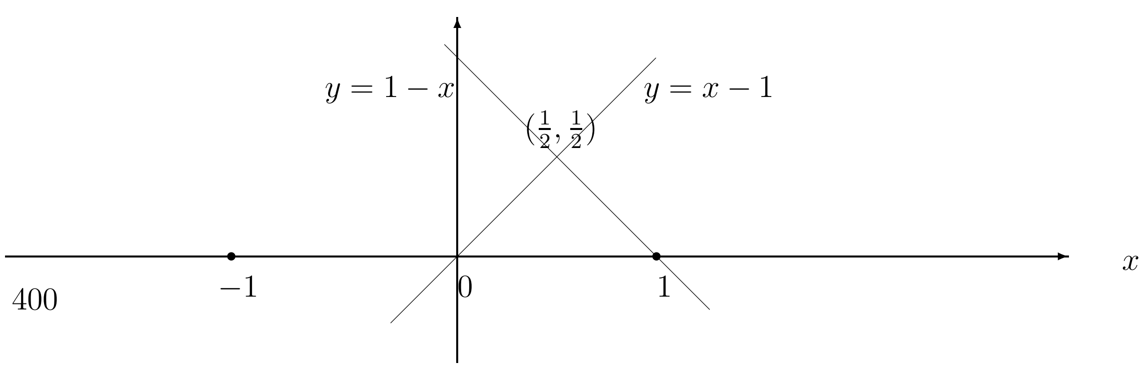
Rozwiązanie. Prosta o równaniu $y = x$ przecina oś x i oś y w początku układu współrzędnych $(0, 0)$, wtedy $x = 0$ i $y = 0$.
Podobnie, prosta o równaniu $y = 1 - x$ przecina oś x, gdy $y = 0$, to znaczy $1 - x = 0$, dla $x = 1$, w punkcie $(1, 0)$. Ta prosta przecina oś y gdy $x = 0$, wtedy $y = 1 - 0 = 1$ to jest w punkcie $(0, 1)$.
Dwie proste przecinają się w punkcie (x, y) gdy współrzędne tego punktu spełnia ją oba równania, to znaczy

$$y = x, \qquad \text{oraz} \quad y = 1 - x$$

Skąd przez podstawien $y = x$ do drugiego równania znajdujemy

$$x = 1 - x, \qquad 2x = 1, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

Zatem proste przecinają się w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



Proste: $y = x, \quad y = 1 - x$

Zadanie 8.1 *Podaj położenie na płaszczyŃnie* (x, y) *dwóch prostych o rónaniach*

$$y = 2x - 1, \qquad y = 1 - 2x$$

Znajd'z ich punkty przecięcia z osiami x *i* y *oraz punkt przecięcia tych prostych.*

Zadanie 8.2 *Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty* $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ *i* $(x_1, y_1) = (1, 1)$. *Sprawdź który z punktów* $(0, 1)$, $(2, 2)$ *leży na prostej.*

Zadanie 8.3 *W których punktach prosta* $y = -3x+6$ *przecina osie współrzędnych. Oblicz wartość tej funkcji liniowej dla* $x = 1$. *Sprawdź który z punktów* $(0, 3)$, $(2, 0)$ *leży na prostej.*

8.3 Funkcja kwadratowa

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem

$$w_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c, \qquad \text{lub} \qquad y = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0. \tag{8.3}$$

W przypadku gdy współczynnik $a = 0$ funkcja $y = bx + c$ jest liniowa.
Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych R. Natomiast, zbiór wartości funkcji kwadratowej zależy od współczynników a, b, c i nie jest całym zbiorem liczb rzeczywistych.
Wyróżnik funkcji kwadratowej. Wyrażenie

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

nazywamy wyróżnikiem funkcji kwadratowej.

8.3.1 Równanie kwadratowe

Funkcja kwadratowa ma wartość zero w punkcie x_0, jeżeli x_0 jest rozwiązaniem równania kwadratowego

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Pierwiastki równania kwadratowego wyznaczamy metodą starożytnych uzupełnienia wyrażenia

$$ax^2 + bx + c$$

do kwadratu.
Mianowicie, wyciągając wspóczynnik $a \neq 0$ przed nawias otrzymamy

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}).$$

Następnie, dodając i jednocześnie odejmując wyrażenie $(\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ piszemy wyrażenie kwadratowe w postaci kanonicznej

$$ax^2 + bx + c = a(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}} + \underbrace{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}) = a[\underbrace{(x + \frac{b}{2a})^2} - \underbrace{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}]$$

W ten spoób otrzymaliśmy postać kanoniczną funkcji kwadratowej:
Postać kanoniczna funkcji kwadratowej.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

gdzie wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$.
Pierwiastki równania kwadratowego. Z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej łatwo znajdujemy pierwiastki równania kwadratowego. Mianowicie piszemy

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0.$$

Dla wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ możemy różnicę kwadratów napisać w postaci iloczynu

$$(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}) = 0.$$

Skąd wynikają wzory na pierwiastki równania kwadratowego

$$x_1 + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0, \qquad \text{lub} \quad x_2 + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

lub

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \text{lub} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Zauważmy, że w przypadku gdy wyróżnik $\Delta = 0$, funkcja kwadratowa jest pełnym kwadratem

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2.$$

Wtedy z powyższych wzorów otrzymujemy pierwiastek podwójny

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 = 0, \qquad x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

8.3.2 Wzory Vieta

Pierwiastki równania kwadratowego

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

spełniają następujące wzory Vieta:
Suma i iloczyn pierwiastków

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 * x_2 = \frac{c}{a}.$$

Istotnie, obliczamy

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Podobnie iloczyn

$$\begin{aligned} x_1 * x_2 &= \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) * \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \\ &= \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 \\ &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Przykład 8.3 *ZnajdĆ równanie kwadratowe którego suma pierwiastków równa 3 i iloczyn pierwiastków równy 2.*

Rozwiązanie. Stosując wzory Vieta, piszemy

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3, \qquad x_1 * x_2 = \frac{c}{a} = 2.$$

Skąd znajdujemy

$$b = -3a, \quad c = a.$$

Zatem, mamy rodzinę równań kwadratowych

$$ax^2 - 3ax + a = 0$$

z parametrem $a \neq 0$ których suma pierwiastków równa jest 3, i iloczyn pierwiastków równy jest 2.

Zadanie 8.4 *ZnajdĆ równanie kwadratowe którego suma pierwiastków równa 6 i iloczyn pierwiastków równy 5.*

8.3.3 Rozkład funkcji kwadratowej na czynniki pierwsze

Jeżeli wyróżnik $\Delta < 0$ jest ujemny to równanie kwadratowe nie ma pierwiastków rzeczywistych. Wtedy funkcja kwadratowa nie rozkłada się na czyniki liniowe.

W przypadku gdy wyróżnik $\Delta \geq 0$ funkcja kwadratowa rozkłada się na czynniki liniowe.
Istotnie, wtedy możemy przedstawić funkcje kwadratową jako różnicę kwadratów

$$ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2]$$

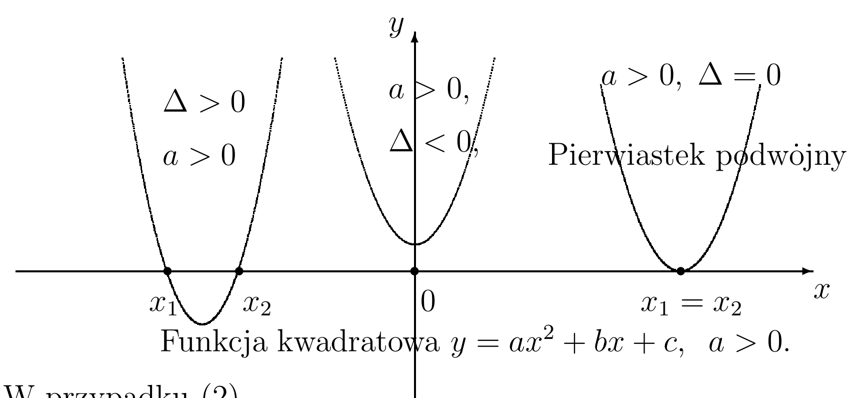
Stosując wzór na różnice kwadratów otrzymamy rozkład funkcji kwadratowej na czynniki liniowe

$$ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})] = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Położenie funkcji kwadratowej na płaszczyŹnie. Położenie wykresu funkcji kwadratowej na płaszczyŹnie we współrzędnych (x, y) wyznaczymy w następujących przypadkach:

$$(1) \quad a > 0, \quad \Delta > 0, \quad \Delta = 0, \quad \Delta < 0$$

$$(2) \quad a < 0, \quad \Delta > 0, \quad \Delta = 0, \quad \Delta =< 0.$$

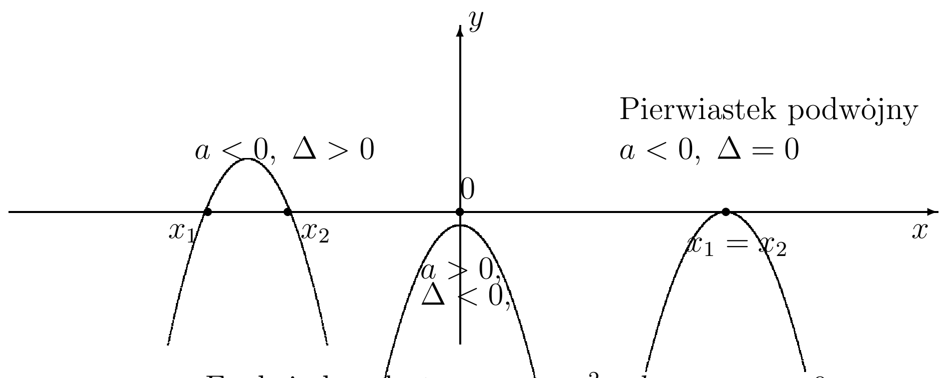


Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c, \ \ a > 0.$

W przypadku (2)

$$a < 0, \ \ \Delta > 0, \quad \Delta = 0, \quad \Delta < 0$$

położenie wykresu trójmianu kwadratowego



Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c, \quad a < 0.$

Z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej wnioskujemy, że

- funkcja kwadratowa osiąga minimum równe $-\dfrac{\Delta}{4a}$, jeżeli współczynnik $a > 0$ jest dodatni.

- funkcja kwadratowa osiąga maksimum równe $-\dfrac{\Delta}{4a}$, jeżeli współczynnik $a < 0$ jest ujemny.

Istotnie, w punkcje minimum lub maksimum $(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}$ funkcja kwadratowa osiąga minimum lub maksimum, gdyż wtedy w postaci kanonicznej

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

wyrażenie $(x + \dfrac{b}{2a})^2 = 0$ dla $x = -\dfrac{b}{2a}$, natomiast wartość funkcji $y = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Przykład 8.4 *Dla danej funkcji kwadratowej*

$$y = 2x^2 - 6x + 4$$

wykonaj następujące operacje:
(a) ZnajdQ́ mniejsca zerowe funkcji
(b) Rozłóż funkcje na czynniki liniowe
(c) ZnajQ́ minimum funkcji
(d) Podaj wykres funkcji

Rozwiązanie. Współczynniki równaia: $a = 2, \ b = -6, \ c = 4.$
Obliczmy wyróżnik równania

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 424 = 36 - 32 = 4 > 0.$$

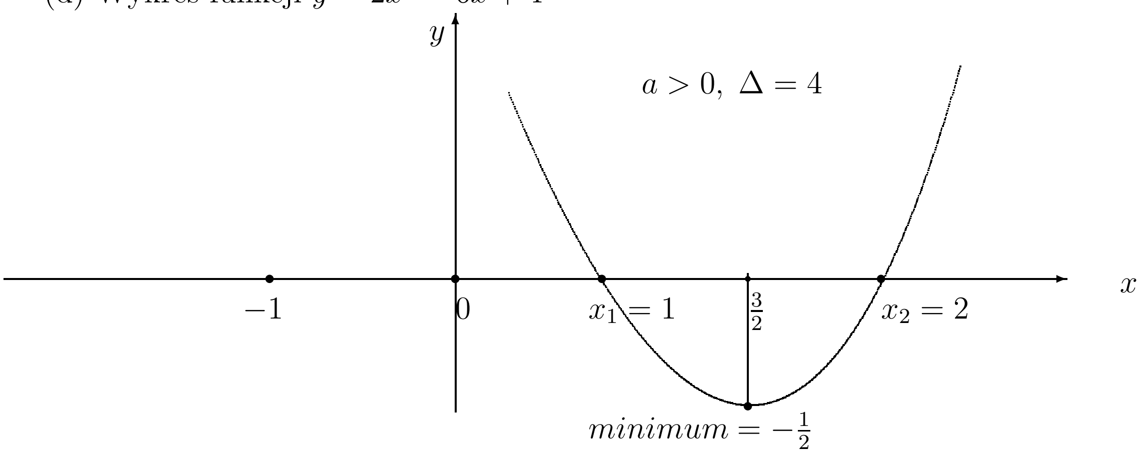
(a) Stosując wzory, obliczmy pierwiaski równia

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{4}}{4} = 1, \qquad x_2 = \frac{-b = \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{4}}{4} = 2$$

(b) Według wzoru, funkcja kwadratowa rozkłada się na czynniki liniowe

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) = 2(x - 1)(x - 2).$$

(c) Ponieważ wyróżnik $\Delta = 4 > 0$ jest dodatni to funkcja kwadratowa ma minimum $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{2}$w punkcie $(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.
Punkty w których leżą pierwiastki funkcji kwadratowej $(1, 0)$ $(2, 0)$ i punkt minimum $(\frac{3}{2}. -\frac{1}{2})$ wyznaczają położenie jej wykresu na płaszczyŃnie (x, y).
(d) Wykres funkcji $y = 2x^2 - 6x + 4$



Funkcja kwadratowa $y = 2x^2 - 6x + 4$.

8.3.4 Nierówności kwadratowe

Rozwiązanie nierówności kwadratowych odczytujemy z położenia wykresu funkcji kwadratowej. Mianowicie, mamy następujące przypadki:

1. Dla $a > 0$, $\Delta > 0$ funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c > 0$ jest dodatnia poza pierwiastkami: $x < x_1$ oraz $x > x_2$, natomiast jest ujemna $y = ax^2 + bx + c < 0$ pomiędzy pierwiastkami: $x_1 < x < x_2$.

2. Dla $a < 0$, $\Delta > 0$ funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c > 0$ jest ujemna poza pierwiastkami: $x < x_1$ oraz $x > x_2$, natomiast jest dodatnia $y = ax^2 + bx + c > 0$ pomiędzy pierwiastkami: $x_1 < x < x_2$.

3. Dla $a > 0$, $\Delta \leq 0$ funkcja kwadratowa $y = ax^2+bx+c \geq 0$ jest nieujemna na całym zbiorze liczb rzeczywistych dla $-\infty < x < \infty$.

4. Dla $a < 0,\ \Delta \leq 0$ funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c \leq 0$ jest niedodatnia na całym zbiorze liczb rzeczywistych dla $-\infty < x < \infty$.

Przykład 8.5 *Rozwiąż następujące nierówności i znajdĆ maksimum lub minimum wskazanej funkcji:*

$$\begin{array}{lll} (1) & x^2 + x + 1 > 0, & y = x^2 + x + 1. \\ (2) & -2x^2 + 2x - 1 < 0, & y = -2x^2 + 2x - 1, \\ (3) & x^2 - 5x + 6 \geq 0, & y = x^2 - 5x + 6, \\ (4) & -2x^2 + x + 1 > 0, & y = -2x^2 + x + 1. \end{array}$$

Rozwiązanie, (1). Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji

$$y = x^2 + x + 1.$$

Współczynniki:

$$a = 1,\ b = 1,\ c = 1.$$

Wyróżnik:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 * 1 * 1 = -3.$$

Ponieważ współczynnik $a = 1 > 0$ jest dodatni i wyróżnik $\Delta = -3 < 0$ jest ujemny to nierówność

$$x^2 + x + 1 > 0,$$

jest prawdziwa dla $-\infty < x < \infty$.
Funkcja

$$y = x^2 + x + 1$$

osiąga minimum równe $\frac{3}{4}$ w punkcie $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

Rozwiązanie, (2). Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji

$$y = -2x^2 + 2x - 1.$$

Współczynniki: $a = -2,\ b = 2,\ c = -1$.
Wyróżnik: $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 * (-2) * (-1) = -4$.
Ponieważ współczynnik $a = -2 < 0$ jest ujemny i wyróżnik $\Delta = -4 < 0$ jest ujemny to nierówność

$$-2x^2 + 2x - 1 < 0$$

trómia jest prawdziwa dla $-\infty < x < \infty$.
Funkcja $y = -2x^2+2x-1$ osiąga maksimum równe 1 w punkcie $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (\frac{1}{2}, 1)$

Rozwiązanie, (3). Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji

$$y = x^2 - 5x + 6.$$

Współczynniki: $a = 1,\ b = -5,\ c = 6.$
Wyróżnik: $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 * 1 * 6 = 1.$
Ponieważ wyróżnik $\Delta = 1 > 0,\ \sqrt{1} = 1$ jest dodatni to funkcja ma dwa różne pierwiastki

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{2} = 2,\ \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Zatem nierówność

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

jest prawdziwa poza pierwiastkam to znaczy dla $x < 2$ i dla $x > 3$
Funkcja $y = x^2 - 5x + 6$ osiąga minimu równe $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4}$ w punkcie $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}) = (\frac{5}{2}, \frac{-1}{4}).$

Rozwiązanie, (4). Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji

$$y = -2x^2 + x + 1,$$

Współczynniki: $a = -2,\ b = 1,\ c = 1.$
Wyróżnik: $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 * (-2) * 1 = 9.$
Ponieważ współczynnik $a = -2 < 0$ wyróżnik $\Delta = 9 > 0, \quad \sqrt{9} = 3$ jest dodatnia to funkcja

$$y = -2x^2 + 2x - 1,$$

ma dwa różne pierwiastki

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{2*(-2)} = 1,\ \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{2*(-2)} = -\frac{1}{2}.$$

Zatem nierówność jest prawdziwa pomiędzy pierwiastkami to znaczy dla $-\frac{1}{2} < x < 1.$
Funkcja $y = -2x^2 + x + 1$ osiąga maksimum równe $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{9}{8}$ w punkcie $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}) = (\frac{1}{4}, \frac{9}{8}).$

Zadanie 8.5 *Rozwiąż następujące nierówności i znajdĄ maksimum lub minimum wskazanej funkcji:*

$$\begin{array}{lll} (1) & x^2 - x + 1 > 0, & y = x^2 - x + 1. \\ (2) & -3x^2 + 6x - 3 \leq 0, & y = -3x^2 + 6x - 3. \\ (3) & x^2 - x - 2 \geq 0, & y = x^2 - x - 2. \\ (4) & -4x^2 + 3x + 1 > 0, & y = -4x^2 + 3x + 1. \end{array}$$

Zadanie 8.6 *Dla jakich wartości parametru m funkcja kwadratowa*

$$y = x^2 + 2mx + m + 1$$

jest dodatnia dla wszystkich rzeczywistych wartości $x \in R$.

Przykład 8.6 *Dla trójmianu kwadratowego*

$$y = x^3 - 5x + 6$$

(i) wyprowadź postać kanoniczną trójmianu

(ii) znajdź jego pierwiastki i oblicz minimum trójmianu

(iii) narysuj położenie trójmianu na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Rozwiązanie:
(i) Wyróżnik tr:omianu kwadratowego o współczynnikach $a = 1,\ b - -5,\ c = 6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 41 * 6 = 25 - 24 = 1.$$

Proste przekształcenie tego trójmianu prowdzi do postaci kanonicznej

$$y = x^2 - 5x + 6 = x^2 - 5x + (\frac{-5}{2})^2 + 6 - (\frac{-5}{2})^2 = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

Skąd postać kanoniczna tego trójmianu

$$y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

(ii) Obliczmy pierwiastki trójmianu z postaci kanonicznej lub bezpośrednio ze wzoró. Mianowicie postać kanoniczna jest różnią kwadratów, którą rozkładamy na czynniki

$$y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4} = y = (x - \frac{5}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 = (x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}).$$

Skąd obliczamy pierwiastki równania kwadratowego

$$(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}) = 0$$
$$(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}) = 0, \qquad lub \quad (x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}) = 0$$
$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3, \qquad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

Łatwo obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego podstawiając do wzorów

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-5}{2} - \frac{\sqrt{1}}{2} = 2, \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-5}{2} + \frac{\sqrt{1}}{2} = 3.$$

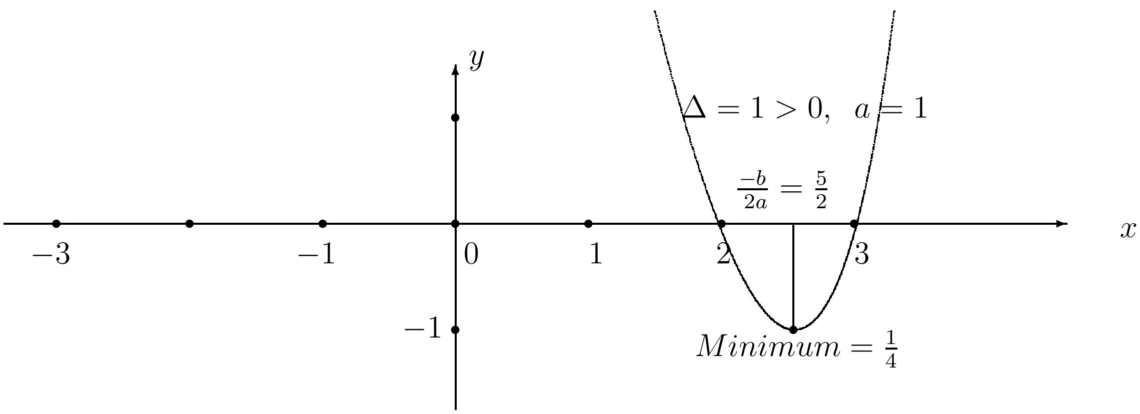
Minimum trójmianu kwadratowego obliczamy bezpośrednio z postaci kanonicznej

$$y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

Jasne, że wartość tego trójmianu jest najmniejsza, jeżeli kwadrat

$$(x-\frac{5}{2})^2=0.$$

Dla $x=\frac{5}{2}$, wartość $y=-\frac{1}{4}$. Zatem minimum trójmianu kwadratowego równe jest $\frac{1}{4}$.



8.3.5 Przykłady

Przykład 8.7 *Równanie kwadratowe*

$$x^2-4x+3=0$$

ma dwa pierwiastki rzeczywiste x_1 *i* x_2*. Korzystając ze wzirów Viete oblicz wartości wyrażeń algebraicznych*

$$(x_1+x_2)^2, \qquad x_1^2+x_2^2, \qquad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}.$$

Rozwiązanie: Współczynniki równania $a=1,\ b=-4,\ c=3$
Ze wzorów Viete obliczmy sumę i iloczyn pierwistkoów

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-(-4)}{1}=4, \quad x_1*x_2=\frac{c}{a}=\frac{3}{1}=3.$$

Skąd obliczamy wartości wyrażeń algebraicznych

$$(x_1+x_2)^2=4^2=16, \quad x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=16-2*3=10.$$

oraz

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1*x_2}=\frac{4}{3}.$$

Przykład 8.8 *Dla których wartości parametru m równanie*

$$x^2 - 2x + m = 0$$

ma dwa różne pierwiastki

Rozwiązanie: Równie

$$x^2 - 2x + m = 0$$

ma dwa różne pierwiastki, jeżeli wyróżnik tego równa jest dodatni

$$\begin{array}{l}\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4m > 0,\\ 4 - 4m > 0, \quad 4m < 4, \quad m < 1.\end{array}$$

Odpowieć: Równanie $x^2 - 2x + m$ ma dwa różne pierwiastki dla parametru $-\infty < m < 1$

Przykład 8.9 *Wyznacz współczynniki a, b, c równania kwadratowego*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

które posiada dwa rzeczywiste pierwiastki x_1 i x_2 takie, że ich suma i iloczyn są dane

$$x_1 + x_2 = 7, \qquad x_1 * x_2 = 10.$$

Rozwiązanie: Korzystając ze wzorów Viete

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 7, \qquad x_1 * x_2 = \frac{c}{a} = 10,$$

znajdujemy następujące związki

$$b = -7a, ; \qquad c = 10a.$$

Skąd równianie

$$ax^2 - 7ax + 10a = 0, \quad lub \quad a(x^2 - 7x + 10) = 0$$

spełnia warunki zadania dla każdego $a \neq 0$.

Przykład 8.10 *Wyznacz współczynniki a, b, c równania kwadratowego*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

które posiada dwa rzeczywiste pierwiastki $x_1 = 3$ i $x_2 = 8$

Rozwiązanie: Korzystając ze wzorów Viete

$$x_1 + x_2 = 3 + 8 = 11, \qquad \frac{-b}{a} = 11, \qquad x_1 * x_2 = 3 * 8 = 24, \qquad \frac{c}{a} = 24,$$

znajdujemy następujące związki

$$b = -11a, ; \qquad c = 24a.$$

Skąd otrzymujemy równianie

$$ax^2 - 11ax + 24a = 0, \quad lub \quad a(x^2 - 11x + 24) = 0$$

które posiada pierwiastki $x_1 = 3$, $x_2 = 8$ dla każdego $a \neq 0$.

8.3.6 Zadania

Zadanie 8.7 *Znajdź pierwiastki równania*

(i)) $x^2 - 3x + 6 = 0,$

(ii) $-2x^2 + 9x - 10 = 0,$

(iii) $4x^2 - 12x + 9 = 0.$

Zadanie 8.8 *Dla których wartości parametru m równanie*

$$-x^2 + 4x + m - 4 = 0$$

ma dwa różne pierwiastki

Zadanie 8.9 *Dla których wartości zmiennej x trójmian kwadratowy*

$$y = x^2 + 4x + 3$$

jest dodatni.
Oblicz najmniejszą wartość tego trójmianu kwadratowego.

Zadanie 8.10 *Dla których wartości zmiennej x trójmian kwadratowy*

$$y = -2x^2 + 5x + 3$$

jest ujemny.
Oblicz największą wartość tego trójmianu kwadratowego.

Zadanie 8.11 *Dla których wartości parametru m trójmian kwadratowy*

$$y = x^2 + 4x + m^2$$

jest dodatni dla wszystkich wartości zmiennej x.
Oblicz najmniejszą wartość tego trójmianu kwadratowego.

Zadanie 8.12 *Dla których wartości parametru m trójmian kwadratowy*

$$y = -x^2 + 3x - m,$$

jest ujemny dla wszystkich wartości zmiennej x.
Oblicz największą wartość tego trójmianu kwadratowego.

Zadanie 8.13 *ZnajdQ́ równanie kwadratowe którego suma pierwiastków równa 6 i iloczyn pierwiastków równy 5.*

8.4 Wielomiany stopia n

Wielomiany mają prostą strukturę i stanowią ważną klasę funkcji w zastosowaniach matematyki. W istocie, wielomianami można approksymować każdą funkcję ciągłą z dowolną dokładnością.

Wielomianem stopnia n z miennej x nazywamy wyrażenie algebraiczne nastepującej postaci:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0.$$

Jeżeli $a_n = 0$ to wielomian jest stopnia niższego niż n

8.4.1 Przykłady wielomianów

Wielomian stopnia $n = 0$ zmiennej x ma wartość stałą równą a_0

$$p_0(x) = a_0 \quad \textit{dla wszystkich wartosci} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian stopnia $n = 0$

$$p_0(x) = 8 \quad \textit{dla wsztstkich} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

ma wartość stałą, $a_0 = 8$ dla wsztykich wartości rzeczywistych x.
Wielomian stopnia $n = 1$ zmiennej x, funkcja liniowa

$$p_1(x) = a_1 x + a_0 \qquad \textit{dla wszystkich wartosci} \quad x(-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian stopnia $n = 1$

$$p_1(x) = 5x + 7 \quad \textit{dla} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

ma współczynniki $a_1 = 5,\ a_0 = 7$.
Wielomian stopnia $n = 2$ zmiennej x, funkcja kwadratowa

$$p_2(x) = a_2 x + a_1 x^2 + a_0 \quad dla x \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian stopnia $n = 2$

$$p_2(x) = 3x^2 + 4x + 5 \qquad \textit{dla} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

ma współczynniki $a_2 = 3,\ a_1 = 4,\ a_0 = 5$.
Wielomian stopnia $n = 3$ zmiennej x, wielomian kubiczny

$$p_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \textit{dla} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian kubiczny

$$p_3(x) = 2x^3 + 3x^3 + 4x + 5, \quad \textit{dla} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

ma współczynniki $a_3 = 2,\ a_2 = 3,\ a_1 = 4,\ a_0 = 5.$
Podobnie wielomian stopnia $n = 5$ miennej z,

$$p_5(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad dla x \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian stopnia $n = 5$

$$p_5(z) = 2z^5 - 7z^4 + 5z^2 + 2, \quad dla \quad x \in (-\infty, \infty).$$

ma współczynniki $a_5 = 2,\ a_4 = -7,\ a_3 = 0,\ a_2 = 5,\ a_1 = 0,\ a_0 = 2.$

8.4.2 Operacje arytmetyczne na wielomianach.

Następujące twierdzenie jest prawie oczywiste:

Twierdzenie 8.1 *Zbiór wielomianów stopnia nie większego niż n jest zamknięty ze względu na operacje dodawania i odejmowania.*

Istotnie, rozpatrzmy dwa następujące wielomiany

$$p_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad q_n(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0,$$

Znajdujemy sumę lub różnicę tych wielomianów przez grupowanie wyrazów przy tej samej potędze

$$p_n(x) \pm q_n(x) = (a_n \pm b_n)x^n + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 \pm b_1)x + (a_0 \pm b_0.)$$

Zauważamy, że w wyniku otrzymamy wielomian stopnia nie większego niż n o współczynnikachch

$$a_n \pm b_n,\ a_{n-1} \pm b_{n-1}, ..., a_1 \pm b_a, a_0 \pm b_0.$$

Zatem, suma lub różnica wielomianów stopnia co najwyżej n jest wielomianem stopnia co najwyżej n. To znaczy, że zbiór wielomianów stopnia co najwyżej n jest zamknięty na operacje dodawania i odejmowania wielomianów stopnia co najwyżej n.

Przykład 8.11 *Dodaj następujące wielomiany*

$$p_4(x) = 3x^4 - 2x^3 + x + 5, \quad q_3(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x + 1,$$

Wykonując dodawanie, otrzymamy wielomian

$$\begin{aligned} r_4(x) &= (3+0)x^4 + (-2+2)x^3 + (0+5)x^2 + (1+2)x + (5+1) \\ &= 3x^4 + 5x^2 + 3x + 6. \end{aligned}$$

stopnia $n = 4$ o współczynnikach $a_4 = 3,\ a_3 = 0,\ a_2 = 5,\ a_1 = 3,\ a_0 = 6.$

8.4.3 Dzielenie wielomianu $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$

Wielomian $p_n(x)$ stopnia n dzielimy przez dwumian $x - x_0$ stopnia $n = 1$ według schematu dzielenia podanego w następujących przykłady:

Przykład 8.12 *Wykonaj dzielenie:*

$$
\begin{array}{lcl}
(x^3 - 1) : (x - 1) & = & x^2 + x + 1 \\
x^3 - x^2 & & \\
- - -- & & \\
x^2 - 1 & & \\
x^2 - x & & \\
- - -- & & \\
x - 1 & & \\
x - 1 & & \\
- - -- & & \\
0 & &
\end{array}
$$

Zauważ, że wykonujemy odejmowanie pod kreską.
Zatem wielomian $x^3 - 1$ dzieli się przez dwumian $x - 1$ i wynikiem dzielenia jest trójmian $x^2 + x + 1$.
Sprawdzamy dzielenie wykonując operacje odwrotną do dzielenia, to jest operacje odwrotną, mnożenie

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 - x^2 - 1 = x^3 - 1$$

Istotnie, w wyniku mnożenia dzielnika $x - 1$ przez wynik dzielenia $x^2 + x + 1$ otrzymaliśmy dzielną $x^3 - 1$.

Przykład 8.13 *Wykonaj dzielenie:*

$$
\begin{array}{lcl}
(x^4 - x^3 - x^2 - x - 2) : (x - 2) & = & x^3 + x^2 + x + 1 \\
x^4 - 2x^3 & & \\
- - -- & & \\
x^3 - x^2 & & \\
x^3 - 2x^2 & & \\
- - -- & & \\
x^2 - x & & \\
x^2 - 2x & & \\
- - -- & & \\
x - 2 & & \\
x - 2 & & \\
- - -- & & \\
0 & &
\end{array}
$$

Zauważ, że wykonujemy odejmowanie pod kreską.
Zatem wielomian $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ dzieli się przez dwumian $x - 2$ i wynikiem

dzielenia, którym jest wielomian x^3+x^2+x+1.
Sprawdzamy, że

$$(x-2)(x^3+x^2+x+1) = x^4+x^3+x^2+x-2x^3-2x^2-2x-2 = x^4-x^3-x^2-x-2.$$

Zadanie 8.14 *Wykonaj dzielenie według powyższego schematu:*

$$(x^4-1):(x-1)$$

8.4.4 Dzielenie wielomianu $p_n(x)$ przez dwumian $x-x_0$ z resztą.

Dzielenie wielomianów jest rozszerzeniem algorytmu dzielenia liczb całkowitych. W powyższych przykładach wykonaliśmy dzielenie wielomianu 3-go i 4-go stopnia przez dwumian $x-x_0$ bez reszty, czyli reszta $r=0$. Jednak nie zawsze tak jest. Naogół wielomiany dzielą się przez dwumian z resztą r.
Ponieważ rozpatrujemy dzielenie wielomianu

$$p_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

tylko przez dwumian $x-x_0$ to reszta r jest liczbą, wielomianem stałym stopnia zero.
Podobnie jak przy dzieleniu liczb całkowitych piszemy

$$\frac{p_n(x)}{x-x_0} = q_{n-1}(x) + \frac{r}{x-x_0}, \qquad n \geq 1,$$

gdzie $q_{n-1}(x)$ jest wielomianem stopnia $n-1$ i r jest resztą z dzielenia.
Zatem wielomian $p_n(x)$ można zapisać

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x-x_0) + r$$

Z powyższej równości wynika wzór na resztę, mianowicie $r = p_n(x_0)$.

Przykład 8.14 *Wykonaj dzielenie*

$$(2x^4+3x^3-4x^2+5x+6):(x-3)$$

$$\begin{array}{llll}
(2x^4+3x^3-4x^2+5x+6):(x-3) & = & 2x^3+9x^2+23x+74 \\
2x^4-6x^3 \\
\quad ---------- \\
\qquad 9x^3-4x^2 \\
\qquad 9x^3-27x^2 \\
\qquad ----- \\
\qquad\qquad 23x^2+5x \\
\qquad\qquad 23x^2-69x \\
\qquad\qquad ------ \\
\qquad\qquad\qquad 74x+6 \\
\qquad\qquad\qquad 74x-222 \\
\qquad\qquad\qquad ------ \\
\qquad\qquad\qquad\quad 226
\end{array}$$

OdpowiedQ́: Wielomian $p_4(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$ podzielony przez dwumian $x - 3$ daje wynik $q_3(x) = 2x^3 + 9x^2 + 23x + 74$ z resztą $r = 226$.
Piszemy

$$\frac{p_4(x)}{x-3} = (2x^3 + 9x^2 + 23x + 74) + \frac{226}{x-3}.$$

lub

$$p_4(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6 = (2x^3 + 9x^2 + 23x + 74)(x - 3) + 226.$$

Skąd reszta z dzielenia $r = p_4(3) = 226$.

8.4.5 Pierwiastki wielomianów. Twierdzenie Bezouta

Zera funkcji liniowej czy kwadratowej, czyli wielomianów stopnia pierwszego i stopnia drugiego, łatwo znajdujemy stosując znane wzory podane w poprzednich paragrafach. Znane są również wzory na pierwiastki wielomianów trzeciego stopnia i czwartego stopnia. Wiadomo jednak, że nie istnieją wzory na określenie pierwiastków dowolnego wielomianu stopnia większego lub równego niż 5. Natomiast, wiadome są kryteria znajdowania pierwiastków niektórych wielomianów stopni wyższych. Na przykład wiadomo, że jeżeli jakiś wielomian o współczynnikach całkowitych ma pierwiastki całkowite, wtedy te pierwiastki są dzielnikami jego współczynnika a_0. To kryterium dotyczy tylko wielomianów o współczynnikach całkowitych, które mają pierwiaski też całkowite .
Usasadnienie tego kryterium jest proste. Mianowicie, niech całkowita liczba $x_0 \neq 0$ będzie pierwiastkiem wielomianu $p_n(x)$ stopnia n o współczynnikach też całkowitych. Teraz pokażemy, że x_0 jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.
Zachodzi oczywista następująca równość:

$$p_n(x_0) = 0, \qquad \text{oraz} \qquad \frac{p_n(x_0)}{x_0} = \underbrace{a_n x_0^{n-1} + a_{n-1} x_0^{n-2} + \cdots + a_1} + \frac{a_0}{x_0} = 0 \quad (8.4)$$

Wyrażenie podkreślone nawiasem $\underbrace{a_n x_0^{n-1} + a_{n-1} x_0^{n-2} + \cdots + a_1}$ jest liczbą całkowitą jako suma iloczynów liczb całkowitych. Z równości (8.4) wynika, że iloraz $\dfrac{a_0}{x_0}$ też jest liczbą całkowitą, gdyż suma jest zerem. Zatem pierwiastek x_0 jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Przykład 8.15 *ZnajdQ́ pierwiastki całkowite wielomianu*

$$p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 6$$

Rozwiązanie. Zera wielomianu $p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 6 = 0$ szukamy wśród dzielników 2 lub 3 współczynnika $a_0 = -6$.
Sprawdzamy czy $x_0 = 2$ jest zerem tego wielomianu

$$p_3(2) = 2^3 - 2^2 + 2 - 6 = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$$

Dzielnik $x_0 = 2$ jest zerem wielomianu $p_4(x)$.
Teraz sprawdzamy czy $x_0 = 3$ jest zerem tego wielomianu

$$p_3(2) = 3^3 - 3^2 + 3 - 6 = 27 - 9 + 3 - 6 = 12 \neq 0$$

Dzielnik $x_0 = 3$ nie jest zerem tego wielomianu.
Zauważmy, że są wielomiany dla których żaden z dzielników współczynnika a_0 nie jest zerem.
Na przykład wielomian

$$p_2(x) = x^2 + 2x + 8$$

nie ma zer rzeczywistych, gdyż wyróżnik $\Delta = -28$ jest ujemny.
Podstawową informacją o pierwiastkach wielomianów jest twierdzenie Bezouta.

Twierdzenie 8.2 *Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu*

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

wtedy i tylko wtedy gdy ten wielomian dzieli się przez dwumian $x - x_0$.

Dowód. Zauważmy, że twierdzenie Bezouta jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to żeby liczba $x_0 \in R$ była pierwiastkiem wielomianu.
Warunek konieczny znaczy:
Jeżeli wielomian $p_n(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - x_0$ to liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu, to znaczy $p_n(x_0) = 0$ oraz reszta $r = 0$.
Zatem niech wielomian $p_n(x)$ będzie podzielny przez dwumian $x - x_0$ bez reszty. wtedy ten wielomian ma postać

$$p_n(x) = (x - x_0)q_{n-1}(x)$$

gdzie $q_{n-1}(x)$ jest wielomianem stopnia co ajwyyżej $n - 1$.
Skąd dla $x = x_0$ wynika równość $p_n(x_0) = 0$ i dlatego x_0 jest pierwiastkiem tego wielomianu.
Warunek dostateczny znaczy:
Jeżeli liczba $x_0 \in R$ jest pierwiastekiem wielomian $p_n(x)$ to ten wielomian jest podzielny przez dwumian $x - x_0$ z ressztą $r = 0$.
Wiadomo, że dzieląc wielomia $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$ otrzymamy równość

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - x_0) + r$$

gdzie $q_{n-1}(x)$ jest wielomianem stopnia $n - 1$.
Ponieważ x_0 jest zerem tego wielomianu, to znaczy $p_n(x_0) = 0$ oraz $p_n(x_0) = r$.
Zatem reszta $r = 0$. Wtedy z powyższej równości wynika postać wielomianu

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - x_0)$$

w której jest czynnik $x - x_0$ i dlatego wielomian $p_n(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - x_0$ z resztą $r = 0$.

8.4.6 Rozkład wielomianu na czynniki

Z twierdzenia Bezouta wynika następujący wniosek:
Wniosek. Niech liczby rzeczywiste $x_1, x_2, ..., x_k, \quad k \leq n$ bedą zerami wielomianu

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

wtedy ten wielomian można zapisać w postaci iloczynu

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_k)q_{n-k}(x) \tag{8.5}$$

$n - k$ czynników liniowych $(x - x_i), \quad i = 1, 2, ..., k,$ i wielomianu $q_{n-k}(x)$ stopnia $n - k$.
Istotnie dla $k = 1$ z tweierdzenia Bezouta wprost wynika iloczyn

$$p_n(x) = (x - x_1)q_{n-1}(x)$$

Stosując powtórnie twierdzenie Bezouta do wielomianu $q_{n-1}(x)$ dla zera x_2 otrzymammy rozkład

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)q_{n-2}(x)$$

Powtarzając zastosowanie twierdzenia Bezouta dla następnych zer wielomianu $p_n(x)$ otrzymamy rozkład (8.5) wielomianu na czynniki liniowe i wielomianu $q_{n-k}(x)$.
Zauważmy, że rozkład wielomianu stopnia $n \geq 1$

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

jest równoważny z rozkładem wielomianu

$$p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

ze współczynnikiem $a_n = 1$, gdyż współczynnik $a_n \neq 0$ zawsze możemy wyciągnąć przed nawias.
Teraz z sformułujemy twierdzenie podstawowe o rozkładzie wielomianu naczynniki nierozkładalne:

Twierdzenie 8.3 *Każdy wielomian*

$$p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

rozkłada się na czynniki liniowe $x - x_0$ lub czynniki kwadratowe $x^2 + a_1 x + a_0$ z wyróżnikiem $a_1^2 - 4a_0 < 0$ ujemnym. Ten rozkład jest jednoznaczy.

Niżej wyliczmy następujące metody rozkładania wielomianów na czynniki:
Sposoby rozkładania wielomianów na czynniki.

1. Rokład tròmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$

2. Wyciąganie wspólnego czynnika przed nawias
3. Sposób grupowania wyrazów
4. Stosowanie wzorów uproszczonego mnożenia
5. Znajdowanie zer wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Przykład 8.16 *Rozłóż na czynniki wielomian kwadratowy*

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Rozwiązanie. Wielomian kwadratowy rozkłada się na czynniki w zależności od znaku wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$. Mianowicie, jeżeli wyróżnik $\Delta \geq 0$ jest nieujemny, wtedy ten trójmian ma dwa pierwiastki rzeczywiste i rozkłada się na czynniki

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ten przypadek obejmuje również pierwiastek podwójny kiedy $\Delta = 0$ i $x_1 = x_2$. Jeżeli wyróżnik $\Delta < 0$ jest ujemny to trójmian ax^2+bx+c jest nie rozkładalny i wtedy czynnikiem jest wyrażenie $ax^2 + bx + c$.

Przykład 8.17 *Rozłóż na czynniki następujący wielomian przez grupowanie wyrazów i wyciąganie wspólnego czynnika*

$$p_3(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

Rozwiązanie. Stosujemy kombinacje powyższych sposobów. W tym przypadku grupujemy wyrazy pierwszy i drugi oraz trzeci i czwarty potem wyciągająamy przed nawias x^2 oraz 4, w ten sosób otrzymamy

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 &= x^2(x-2) - 4(x-2) \\ &= (x-2)(x^2-4) \end{aligned}$$

Dalej, stosując wzór na róQnicę kwadratów $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ dostajemy rozkład tego wielomianu na czynniki

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 &= x^2(x-2) - 4(x-2) = (x-2)(x^2-4) \\ &= (x-2)(x-2)(x+2) = (x-2)^2(x+2). \end{aligned}$$

Przykład 8.18 *Rozłóż na czynniki następujący wielomian*

$$p_3(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 10$$

Rozwiązanie. Stosujemy kombinacje powyższych sposobów. W tym przypadku wyciągając przed nawias x^2 oraz 5, otrzymamy

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 10 &= x^2(x+5) + 2(x+10) \\ &= (x+5)(x^2+2) \end{aligned}$$

Ponieważ wyrażenie kwadratowe $x^2 + 2 > 0$ jest wszędzie dodatnie to rozkład tego wielomianu na czynniki

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 10 &= x^2(x+5) + 2(x+10) \\ &= (x+5)(x^2+2) \end{aligned}$$

zawiera czynnik liniowy $x + 5$ i czynnik kwadradratowy $x^2 + 2$, który jest nie rozkładalny.

Przykład 8.19 *Rozłóż na czynniki następujący wielomian*

$$p_4(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$$

Rozwiązanie. W tym przypadku zer wielomianu o współczynnikach całkowitych szukamy wśród dzielników $-2, -1, 1, 2, 3, 4, 6$ wyrazu wolnego $a_0 = -12$.

1. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = -2$ jest zerem tego wielomianu

   $$p_4(-2) = (-2)^4 - 4(-2)^3 - (-2)^2 + 16(-2) - 12 = 16 + 32 - 4 - 32 - 12 = 0$$

   Zatem $x_0 = -2$ jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik $x + 2$.

2. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = -1$ jest zerem tego wielomianu

   $$p_4(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 - (-1)^2 + 16(-1) - 12 = 1 + 4 - 1 - 16 - 12 = -32 \neq 0.$$

   Zatem $x_0 = -1$ nie jest zerem tego wielomianu.

3. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = 1$ jest zerem tego wielomianu

   $$p_4(1) = (1)^4 - 4(1)^3 - (1)^2 + 16(1) - 12 = 1 - 4 - 1 + 16 - 12 = 0$$

   Zatem $x_0 = 1$ jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik $x - 1$.

4. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = 2$ jest zerem tego wielomianu

   $$p_4(2) = (2)^4 - 4(2)^3 - (2)^2 + 16(2) - 12 = 16 - 32 - 4 + 32 - 12 = 0$$

   Zatem $x_0 = 2$ jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik $x - 2$.

5. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = 3$ jest zerem tego wielomianu

   $$p_4(3) = (3)^4 - 4(3)^3 - (3)^2 + 16(3) - 12 = 81 - 108 - 9 + 48 - 12 = 0$$

   Zatem $x_0 = 3$ jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik $x - 3$.

OdpowiedQ́: Rozkład wielomian $p_4(x)$ na czynniki liniowe

$$p_4(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = (x+2)(x-1)(x-2)(x-3).$$

Zadanie 8.15 *Rozłóż na czynniki następujące wielomiany:*

1. *Trójmian kwadratowy*
$$p_2(x) = 2x^2 + 6x + 4$$
2. *Wielomian*
$$p_3(x) = (x^3 - 8) + (x^2 - 4)$$
3. *Wielomian*
$$p_4(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 6$$

8.4.7 Nierówności wielomianowe

W tematach funkcje liniowe i kwadratowe opisane zostały sposoby rozwiązywania nierówności linowych i kwdratowych. Teraz zajmiemy się rozwiązywniem nierówności wyższych stopni $n \geq 3$.
Rozpatrzmy następują nierówność:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \geq 0 \qquad n \geq 1, \quad a_n \neq 0.$$

Rozwiązując powyższą nierówność wykonujemy następujące czynności:

1. Rozkładamy ten wielomian na czynniki
$$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_k)q_{n-k}(x), \quad a_n \neq 0.$$
W powyższym rozkładzie dopuszczamy k pierwiastków rzeczywistych włączając pierwiastki wielokrotne, $x_1, x_2, ..., x_k$. Zauważmy, że jeżeli $k = n$ to wielomian $p_n(x)$ rozkłada sie na czynniki lioniowe i ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste $x_1, x_2, ..., x_n$.
Tutaj $q_{n-k}(x)$ jest wielomianem stopnia $n - k$ nie rozkładalnym na czynniki liniowe. To znaczy, że wielomian $q_{n-k}(x)$ zawiera tylko czynniki kwadratowe postaci $x^2 + bx + c$ z wyróżnikiem $\Delta = b^2 - 4c < 0$ ujemnym.
2. Zuważamy, że nierówność
$$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_k)q_{n-k}(x) \geq 0, \quad a_n \neq 0.$$
jest równoważna z nierównością
$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)....(x - x_k)q_{n-k}(x) \geq 0, \quad \text{gdy} \quad a_n > 0,$$
lub z równoważna z nierównością
$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)....(x - x_k)q_{n-k}(x) \leq 0, \quad \text{gdy} \quad a_n < 0.$$

Ponieważ obie strony nierówności zawsze możemy podzielić przez liczbę $a_n \neq 0$ różną od zera zachowując kierunek nierówności gdy liczba $a_n > 0$ jest dodatnia i zmieniając zwrot nierówności gdy liczba $a_n < 0$ jest ujemna.

3. Rozwiązanie odczytujemy z wykresu funkcji

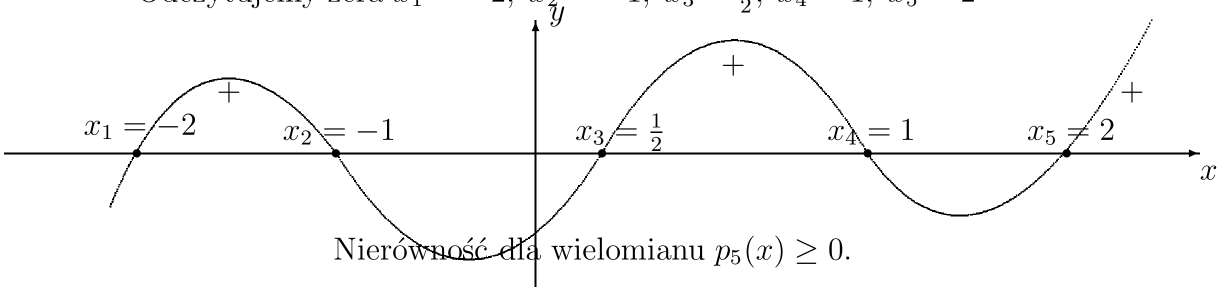
   - Przypadek $a_n > 0$ i wszystkie zera wielomianu $x_1,\ x_2, ..., x_k$ są różne $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.
     Na rysunku przykład nierówności dla wielomianu

     $$p_5(x) = 2x^5 - x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 8x - 4 \geq 0, \quad a_5 = 2 > 0.$$

     Rozkładamy ten wielomian na czynniki

     $$p_5(x) = (x+2)(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-2) \geq 0$$

     Odczytujemy zera $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = 1,\ x_5 = 2$



Nierówność dla wielomianu $p_5(x) \geq 0$.

Z rysunku odczytujemy rozwiązanie, to znaczy te przedziały w których wielomian jest nieujemny:
Zatem, nierówność ta jest prawdziwa dla $x \in [-2, -1] \cup [\frac{1}{2}, 1] \cup [2, \infty]$

   - Przypadek $a_n < 0$ i wszystkie zera wielomianu $x_1,\ x_2, ..., x_k$ są różne $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.
     Na rysunku przykład nierówności dla wielomianu

     $$p_5(x) = -2x^5 + x^4 + 10x^3 - 5x^2 - 8x + 4 \geq 0, \quad a_5 = -2 < 0.$$

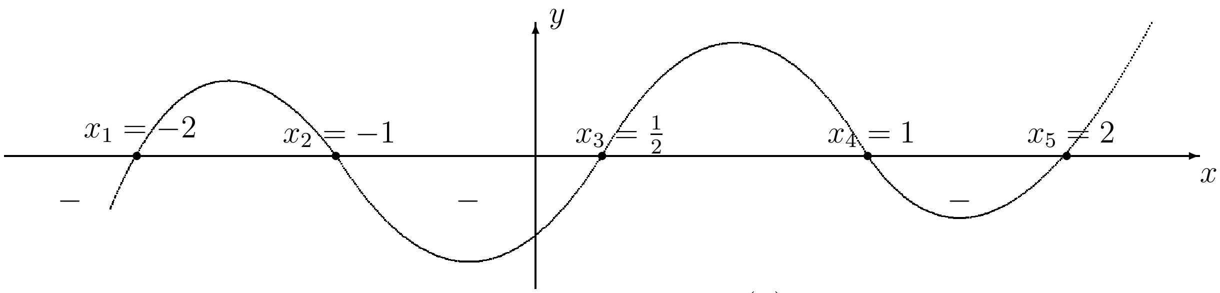
     Rozkładamy ten wielomian na czynniki

     $$p_5(x) = -2(x+2)(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-2) \geq 0$$

     Dzieląc obie strony tej nierówności przez -2, otrzymamy nierówność przeciwną równoważną

     $$p_5(x) = (x+2)(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-2) \leq 0$$

Odczytujemy zera $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = 1,\ x_5 = 2$ i zaznaczmy te zera na niżej podanym rysunku



Nierówność dla wielomianu $p_5(x) \leq 0$.

Z rysunku odczytujemy rozwiązanie to znaczy te przedziały w których wielomian jest niedodatni:
Zatem nierówność ta jest prawdziwa dla $x \in [-\infty, -2] \cup [-1, \frac{1}{2}] \cup [1, 2]$.

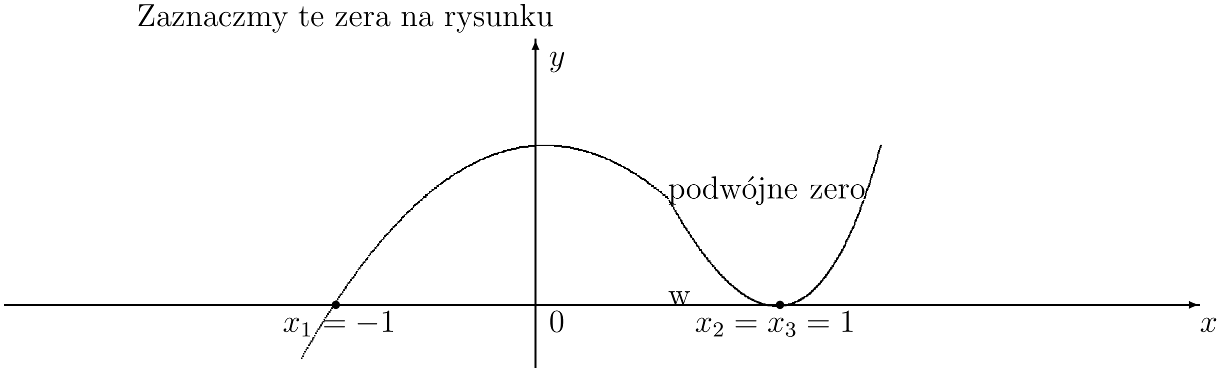
- Przypadek gdy wielomian ma wielokrotne zera. Wtedy wykres wielomianu nie przecina osi x, jeżeli krotność jest parzysta $2, 4, 6...$;
Natomiast, jeżeli krotność jest nie parzysta to wykres wielomianu przcina oś x.
Przypadek wielokrotnych zer wyjaśnimy na następującym przykładzie:
Rozwiąż nierówność:

$$p_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \geq 0$$

Rozkładamy ten wielomian na czynniki

$$p_3(x) = (x-1)(x+1)^2 \geq 0$$

Następnie odczytujemy zera $x_1 = -1$, oraz powdwójne zero $x_2 = 1$.
Zaznaczmy te zera na rysunku



Zero podwójne w punkcie $x = 1$.

Nierówność dla wielomianu $p_3(x) \geq 0$.

Z rysunku odczytujemy rozwiązanie to znaczy te przedziały w których wielomian jest nieujemny:
Zatem nierówność ta jest prawdziwa dla $x \in [-1, \infty]$

Chapter 9

Wzory uproszczonego mnożenia i dwumian Newtona

Jednomianem nazywamy ciąg liczb lub ciąg liczb i liter lub ciąg tylko liter połączonych operacją mnożenia.
Dla przykładu wymieńmy kilka jednomianów

$$\begin{array}{lll} 125 & 247, & \textit{jedna liczba jest jednomianem} \\ 2*5*7, & 3*4*5*6*7, & \\ 3*a*b & a*b*c, & \\ 4**5*x*y*z, & 5*a^2*b^3*c^4, & \\ 15*x^3*y^2*z^3 & 7*9*a^4*b^5*x^6*y^7. & \end{array}$$

Jasne, że każdy jednomian jest szczególnej postaci wyrażeniem arytmetycznym, jeżeli zawiera tylko liczby lub jest szczególnym wyrażeniem algebraicznym, jeżeli zawiera litery lub liczby i litery. Szczególnym wyrażeniem arytmetycznym lub algebraicznym, gdyż tylko operacja mnożenia występuje w ich określeniu.
Dwumianem nazywamy sumę dwóch jednomianów.
Na przykład

$$a+b, \quad a-b, \quad a^2+b^2, \quad 3x^3+5y^3.$$

Podobnie trójmianem nazywamy sumę trzech jednomianów.
Na przykład

$$\begin{array}{ll} a+b+c, & 2*x_3+4*y^3+5*x*y, \\ a^2+2*a*b+b^2, & x^2-2*x*y+y^2. \end{array}$$

Ogólnie wielomianem nazywamy sumę wielu jednomianów.
Natomiast, wielomianem stopnia n nazywamy sumę jednomianów następującej postaci:

$$p_n(x) = a_0 + a_1*x + a_2*x^2 + a_3*x^3 + \cdots + a_{n-1}*x^{n-1} + a_n*x^n$$

Wyrazy wielomianu piszmy również w odwrotnej kolejności pomijając znak mnożenia $*$.

$$p_n(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_{n-2}\, x^{n-2} + \cdots + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0.$$

9.1 Wzory uproszczonego mnożenia

1. **Dwumian, dwumian kwadratowy i trójmian kubiczny.** Łatwo sprawdzamy następujące tożsamości [1]

$$\begin{array}{lcll} (a \pm b)^1 & = & a \pm b, & \textit{dwumian stopnia } n = 1 \\ (a \pm b)^2 & = & a^2 \pm 2\, a\, b + b^2, & \textit{dwumian kwadratowy } n = 2 \\ (a \pm b)^3 & = & a^3 - 3\, a^2 * b + 3 * a * b^2 \pm b^3, & \textit{trojmian kubiczny } n = 3 \end{array}$$

Wzory na kwadrat sumy lub różnicy otrzymujemy przez mnożenie dwumianu $a \pm b$ przez siebie.
Mianowicie, obliczmy

$$\begin{aligned} (a+b)^2 = (a+b)(a+b) &= a(a+b) + b(a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a-b)^2 = (a-b)(a-b) &= a(a-b) - b(a-b) \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2, \end{aligned}$$

Przykład 9.1 *Dla ustalonej liczby naturalnnej n znajdź naturalne liczby a i b takie że*

$$n + a^2 = b^2$$

Rozwiązanie
Przenosząc a^2 na prawą stronę ze znakiem przeciwnym otrzymamy

$$n = b^2 - a^2$$

Ponieważ

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$$

to

$$n = (b-a)(b+a)$$

[1] Tożsamością nazywamy równość, która jest prawdziwa dla wszystkich wartości parametrów

Następnie rozkładamy daną liczbę n iloczyn

$$n = 1 * n$$

Przyjmując

$$b - a = 1 \quad i \quad b + a = n$$

obliczamy rozwiązanie

$$a = \frac{n-1}{2} \quad i \quad b = \frac{n+1}{2}$$

Sprawdzamy, że

$$(\frac{n+1}{2})^2 - (\frac{n-1}{2})^2 = n$$

Natępnie, jeżeli n ma czennik $p > 1 \;\; i \;\; p < n$ to rozkładamy liczbę n na iloczyn

$$n = p * q$$

Przyjmując

$$b - a = p \quad i \quad b + a = q$$

obliczamy rozwiązanie

$$a = \frac{q-p}{2} \quad i \quad b = \frac{p+q}{2}$$

Sprawdzamy, że

$$(\frac{p+q}{2})^2 - (\frac{q-p}{2})^2 = p * q = n$$

Natępnie, jeżeli n ma inny czynnik czennik $p_1 > p \quad i \quad p_1 < n$ to rozkładamy liczbę n na iloczyn

$$n = p_1 * q_1$$

Przyjmując

$$b - a = p_1 \quad i \quad b + a = q_1$$

obliczamy rozwiązanie

$$a = \frac{p_1 - q_1}{2} \quad i \quad b = \frac{p_1 + q_1}{2}$$

Sprawdzamy, że

$$(\frac{p_1 + q_1}{2})^2 - (\frac{p_1 - q_1}{2})^2 = p_1 * q_1 = n$$

Ogólnie rozkładamy liczbę n na m czynników pierwszych

$$n = p_0 * p_1 * p_2 * \cdots * p_m, \qquad p_0 = 1$$

i stosując powyższy rozkład na iloczyn

$$n = p_k * q_k$$

obliczamy rozwiązanie

$$a = \frac{p_k - q_k}{2} \qquad i \quad b = \frac{p_k + q_k}{2}$$

Sprawdzamy, że

$$(\frac{p_k + q_k}{2})^2 - (\frac{p_k - q_k}{2})^2 = p_k * q_k = n$$

dla $k = 0, 1, 2, 3, ..., m$
W ten sposòb otrzymujemy wszystkie $m + 1$ rozwiązań naturalnych.

Przykład 9.2 *Niech $n = 15$. Wtedy mamy rozkład na iloczyn*

$$15 = 1 * 15 \quad lub \quad p = 3 * 5$$

Zatem mamy pierwsze rozwiązanie dla $p = 1$ i $q = 15$

$$b = \frac{15 + 1}{2} = 8 \quad i \quad a = \frac{15 - 1}{2} = 7$$

Sprawdazmy, że

$$b^2 - a^2 = (\frac{15 + 1}{2})^2 - (\frac{15 - 1}{2})^2 = 64 - 49 = 15$$

Następnie dla rozkładu

$$15 = 3 * 5$$

przyjmujemy $p_1 = 3$ i $q_1 = 5$.
Wtedy mamy

$$b + a = 5 \quad i \quad b - a = 3$$

Skąd otrzymujemy drugie rozwiązanie

$$b = \frac{5 + 3}{2} = 4 \quad i \quad a = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

Sprawdzamy, że

$$b^2 - a^2 = (\frac{5 + 3}{2})^2 - (\frac{5 - 3}{2})^2 = 16 - 1 = 15$$

2.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Podobnie sprawdzamy sześcian sumy lub różnicy.
Mianowicie, obliczmy

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 &= a(a+b)^2 + b(a+b)^2 \\
&= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2) \\
&= (a^3+2a^2b+ab^2) + (ba^2+2ab^2+b^3) \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \\
(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 &= a(a-b)^2 - b(a-b)^2 \\
&= a(a^2-2ab+b^2) - b(a^2-2ab+b^2) \\
&= (a^3-2a^2b+ab^2) - (ba^2-2ab^2+b^3) \\
&= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,
\end{aligned}$$

3. **Suma kwadratów.**
Suma kwadratów dwóch liczb rzeczywistych różnych od zera jest dodatnia i równa się zero wtedy i tylko wtedy, gdy obie liczby są równe zero. Mianowicie, piszemy

$$\begin{aligned}
a^2+b^2 > 0, &\quad gdy \quad a \neq 0 \;\; lub \;\; b \neq 0, \\
a^2+b^2 = 0, &\quad gdy \quad a = 0 \;\; i \;\; b = 0.
\end{aligned}$$

4. **Różnica kwadratów.**
Różnica kwadratów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na czynniki liniowe. Mianowicie, mamy

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie

$$(a-b)(a+b) = a(a+b) - b(a+b) = (a^2+ab) - (ba+b^2) = a^2 - b^2.$$

5. **Suma sześcianów.**
Suma sześcianów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na iloczyn

$$a^3 + b^3 = (a+b))(a^2 - ab + b^2).$$

Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie

$$\begin{aligned}
(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2) \\
&= (a^3-a^2b+ab^2) + (ba^2-ab^2+b^3) = a^3+b^3.
\end{aligned}$$

6. **Różnica sześcianów.**

Różnica sześcianów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na iloczyn

$$a^3 - b^3 = (a-b))(a^2 + ab + b^2).$$

Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2)\\ &= (a^3+a^2b+ab^2) - (ba^2+ab^2+b^3) = a^3 - b^3.\end{aligned}$$

9.1.1 Przykłady

Przykład 9.3 *Wykonaj działanie*

$$\begin{array}{llll} (i) & (2a+3)^2, & (ii) & (\frac{x}{2}-4)^2, \\ (ii) & (3a+2)^3, & (iv) & (2x-3y)^3, \end{array}$$

Rozwiązanie. Stosując wzory, obliczamy

$$\begin{aligned} ad.(i) \quad (2a+3)^2 &= (2a)^2 + 2(2a)3 + 3^2 = 4a^2 + 12a + 9.\\ sd.(ii) \quad (\frac{x}{2}-4)^2 &= (\frac{x}{2})^2 - 2(\frac{x}{2})(-4) + (-4)^2\\ &= \frac{x^2}{4} - 4x + 16.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ad.(iii) \qquad (3a+2)^3 &= (3a)^3 + 3(3a)^2 2 + 3(3a)2^2 + 2^3\\ &= 27a^3 + 54a^2 + 36a + 27.\\ ad.(iv) \qquad (2x-3y)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(-3y)^2 - (3y)^3\\ &= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3.\end{aligned}$$

Zadanie 9.1 *Wykonaj działania*

$$\begin{array}{llll} (i) & \frac{(5a+2)^2}{(2a-3)^2}, & (ii) & (\frac{x^2}{3}-1)^2, \\ (ii) & (3a+2)^3, & (iv) & (\frac{3x-2y}{2x+3y})^3, \end{array}$$

Zadanie 9.2 *Uprość wyrażenie*

$$\begin{array}{ll} (i) & \dfrac{(a^2+b^2)(a^3-b^3)(a^3+b^3)}{[(a+b)^2+(a-b)^2](a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)} \\ (ii) & \dfrac{1+x+x^2+x^3}{1+x^2} \end{array}$$

9.2 Dwumian Newtona (1642-1727).

Jednym z najważniejszych i szeroko stosowanym wzorów jest *Dwumian Newtona:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n\, b^0 + \binom{n}{1} a^n\, b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1\, b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0\, b^n \tag{9.1}$$

Dwumian Newtona piszemy również w Σ (sigma) notacji

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \tag{9.2}$$

Napiszmy Dwumian Newtona dla $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = a + b, && n = 1\\
(a+b)^2 &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = a^2 + 2ab + b^2, && n = 2\\
(a+b)^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} b^k = a^3 + 3a^2\, b + 3ab^2 + b^3, && n = 3\\
(a+b)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k} b^k = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4, && n = 4\\
(a+b)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^{5-k} b^k = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5, && n = 5
\end{aligned}$$

Własności współczynników Newtona $\binom{n}{k}$.

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$
2. Symetria współczynników Newtona

   $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

   Istotnie, obliczamy, że

   $$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

3. Suma współczynników Newtona

   $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * \frac{k+1}{n-k} \\
\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}
\end{aligned}
$$

Sumując stronami powyższe ròwności, otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * \frac{k+1}{n-k} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * (\frac{k+1}{n-k} + 1) \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * \frac{n+1}{n-k} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}
$$

4. Suma współczynników dwumianu Newtona

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Sprawdzamy

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

9.3 Tròjkąt Pascala (1623-1662).

Tròjkąt Pascala tworzą współczynnniki dwumianu Newtona.

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
(a+b)^0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{1}{0} & & & & & & & \\
(a+b)^1 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
(a+b)^2 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
(a+b)^3 & \cdots & & \cdots & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
(a+b)^4 & \cdots & & \cdots & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
(a+b)^5 & \cdots & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
(a+b)^6 & \cdots & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
(a+b)^7 & \binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7} \\
\cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

Obliczając wartości współczynników dwumianu Newtona ze wzoru

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

które podane są niżej w tabeli

$(a+b)^0$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	1						
$(a+b)^1$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$	$\cdots$	1		1					
$(a+b)^2$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$	1		2		1				
$(a+b)^3$	$\cdots$	$\cdots$		1		3		3		1			
$(a+b)^4$	$\cdots$	$\cdots$	1		4		6		4		1		
$(a+b)^5$	$\cdots$	1		5		10		10		5		1	
$\ldots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	$\cdots$

Własności współczynników Newtona można łatwo odczytać z powyższych tabeli. Mianowicie, własność 1

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

jest widoczna, ponieważ skrajne wartości w każdym wierszy równają się 1. Również jest widoczna w tabeli własność 2, symetria

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Tabelę wartości współczynników Newtona w $n - tym$ wierszu tworzymay stosując własność 3, to jest wzór.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

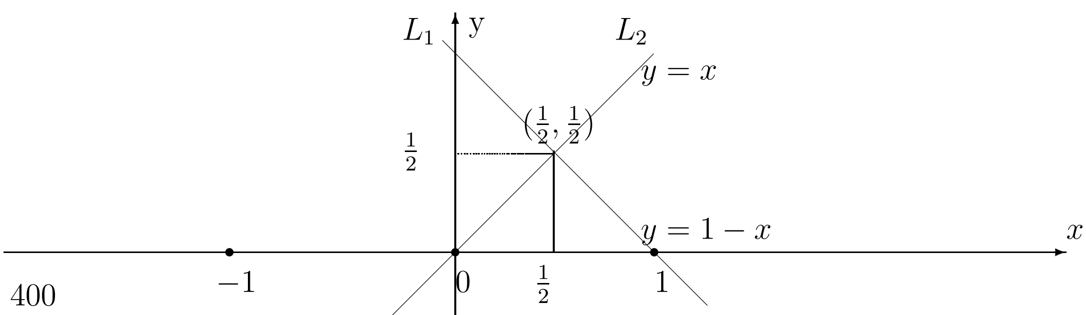
Na przykład, z wartości już obliczonych w wierszu $n-1$ obliczmy wartości w wierszu n, jak niżej

$$\begin{array}{llcll}
n=1, & k=0, & \binom{1}{0}+\binom{1}{1} & = & 1+1=2 & = & \binom{2}{1} \\
n=2, & k=0, & \binom{2}{0}+\binom{2}{1} & = & 1+2=3 & = & \binom{3}{1} \\
n=2, & k=1, & \binom{2}{1}+\binom{2}{2} & = & 2+1=3 & = & \binom{3}{2} \\
n=3, & k=0, & \binom{3}{0}+\binom{3}{1} & = & 1+3=4 & = & \binom{4}{1}
\end{array}$$

Chapter 10

Funkcje liniowe

10.1 Proste na płaszczyźnie



Punkt przecięcia $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *prostych prostopadłych:* $L_1: \ y = 1 - x, \ L_2: \ y = x$

Położenie figur geometrycznych i ich kształt, w tym położenie prostych, na płaszczyźnie kartezjańskiej są wyznaczane we współrzędnych x, y.
Proste na płaszczyźnie kartezjańskiej określamy przez rȯwnania liniowe, ktȯre ustalają zależność współrzędnej y od współrzędnej x punktȯw leżących na prostych.
Rozpatrzymy następujące cztery formy rȯwnań prostych:
• Rȯwnanie prostej w postaci funkcji liniowej
• Rȯwnanie prostej przechodzęj przez dwa punkty
• Rȯwnanie ogȯlne prostej.
• Rȯwnianie parametryczne prostej

10.2 Funkcja liniowa.

Zależność liniową

$$y(x) = a\,x + b, \tag{10.1}$$

współrzęnej y od współrzędnej x nazywamy funkcją liniową o współczynnikach a i b oraz zmiennej x.
Funkcją $y(x) = a\ x + b$ jest liniowa, gdyż jej wykresem jest linia prosta o

współczynniku kierunkowym a *i wyrazie wolnym* b.
Równania prostej określonej przez funkcje liniową

$$y(x) = ax + b$$

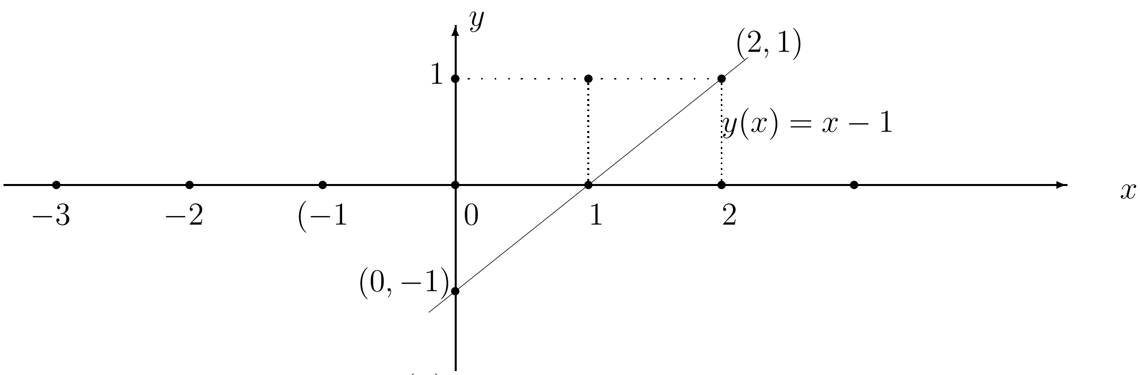
nie obejmuje prostych równoległych do osi y.

Przykład 10.1 .
(i) *Narysuj linię prostą na płaszczyźnie, w układzie współrzędnych* x, y*, przechodzącą przez dwa punkty* $(0, -1)$ *i* $(2, 1)$
(ii) *Oblicz współczynniki funkcji liniowej*

$$y(x) = ax + b,$$

przechodzącej przez punkty $(0, -1)$ *i* $(2, 1)$

Rozwiązanie (i)



Wykres funkcji liniowej $y(x) = x - 1$*, w układzie wspołrzędnydnych* x, y

Rozwiązanie (ii)
Wykres funkcji $y(x) = ax + b$ przechodzi przez punkty $(0, -1)$, $(2, 1)$, jeżeli

$$y(0) = -1, \quad y(2) = 1.$$

Wtedy współrzędne tych punktów spełniają równania

$$\begin{array}{ll} y(0) = a * 0 + b = -1, & b = -1, \\ y(2) = a * 2 + b = 1, & a * 2 - 1 = 1, \\ 2 * a = 2, & a = 1 \end{array}$$

Skąd otrzymujemy równanie prostej

$$y(x) = x - 1$$

w formie funkcji liniowej o współczynnimach $a = 1$, $b = -1$, na której leżą dane punkty $(0, -1)$ i $(2, 1)$.

Przykład 10.2 .
(i) *Sprawdź, które z punktów*

$$P_1 = (0,0), \qquad P_2 = (1,1),$$

$$P_3 = (0,1), \qquad P_4 = (1,0)$$

leżą na prostych L_1 *lub* L_2 *o równaniach*

$$L_1: \quad y_1(x) = x, \qquad L_2: \quad y_2(x) = 1 - x. \tag{10.2}$$

(ii) *Znajdź punkt przecięcia prostych* $L_1,\ L_2$. *Podaj wykres tych prostych.*

Rozwiązanie (i). Punkty $P_1 = (0,0),\ P_2 = (1,1)$ leżą na prostej L_1, ponieważ ich współrzędne spełniają równanie prostej $L_1:\ y = x$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

Punkty $P_3 = (0,1),\ P_2 = (1,0)$ leżą na prostej L_2 ponieważ ich współrzędne spełniają równanie prostej $L_2:\ y = 1 - x$,

$$y(0) = 1 - 0 = 1, \quad y(1) = 1 - 1 = 0.$$

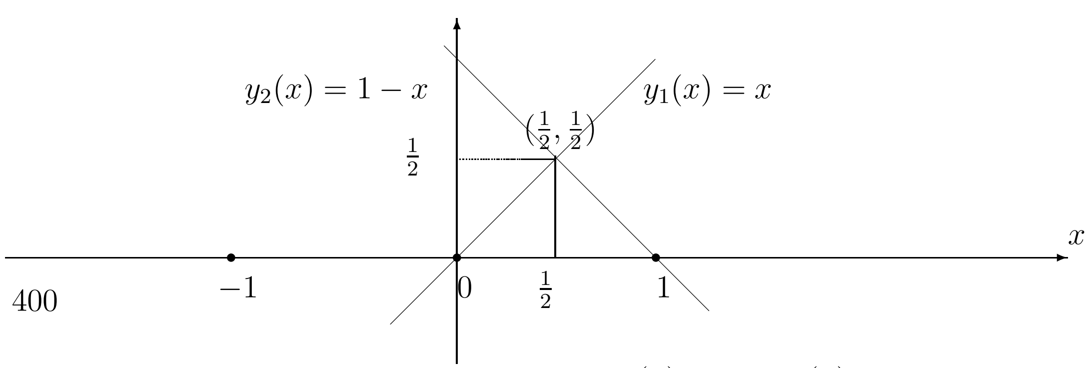
Rozwiązanie (ii).
Punkt przecięcia (x_0, y_0) leży na obu prostych, jeżeli

$$y_1(x_0) = y_0, \quad i \quad y_2(x_0) = y_0.$$

Wtedy mamy równania

$$\begin{array}{lll} y_1(x_0) = x_0 = y_0 & i & y_2(x_0) = 1 - x_0 = y_0, \\ x_0 = 1 - x_0 & i & 2x_0 = 1, \\ x_0 = \frac{1}{2} & i & y_0 = \frac{1}{2}. \end{array}$$

Odpowiedź: Proste $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = 1 - x$ przecinają się w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



Punkt przeciecia prostych prostopadlych : $y_1(x) = x, \quad y_2(x) = 1 - x.$

10.3 Równania prostych równoległych

Rozpatrzmy dwie proste L_1 i L_2 o równaniach [1]

$$\begin{aligned} L_1: &\quad y = a_1 x + b_1, \\ L_2: &\quad y = a_2 x + b_2. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Warunek konieczny i dostateczny.
Proste L_1 i L_2 o równananiach (10.3) są równoległe, wtedy i tylko wtedy, jeżeli współczynniki a_1, a_2 są równe $a_1 = a_2$

Przykład 10.3 *Sprawdź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad y = x + 1, \\ L_2: &\quad y = x - 1 \end{aligned} \tag{10.4}$$

są równoległe.
Podaj wykresy prostej L_1 i L_2.

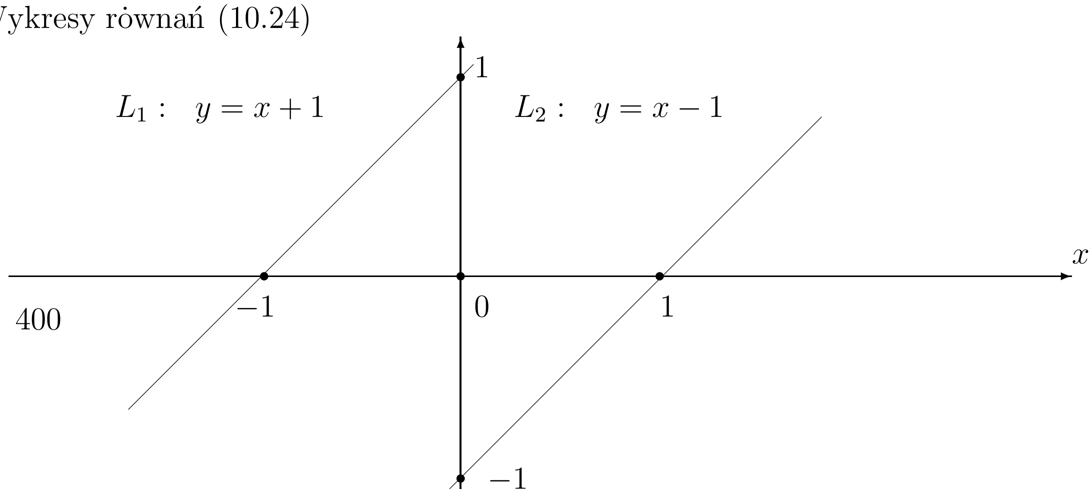
Rozwiązanie.
Proste L_1 i L_2 o współczynnikach

$$\begin{aligned} a_1 = 1, &\quad b_1 = 1, \\ a_2 = 1, &\quad b_2 = -1 \end{aligned}$$

są równoległe ponieważ ich współczynniki a_1, a_2 spełniją warunek konieczny i dostateczny równoległości prostych na płaszczyźnie.

$$a_1 = a_2 = 1.$$

Wykresy równań (10.24)



[1] Dalej używamy uproszconych oznaczeń y zamiast $y(x)$

Przykład 10.4 *Wyznacz równanie prostej L równoległej do prostej*

$$L_0 : \quad y = x + 1$$

przechodzącej przez punkt

$$P = (3, 1).$$

Podaj wykres prostej L_0 i prostej L.

Rozwiązanie.
Prosta L równoległa do prostej L_0 ma współczynnik kierunkowy ten sam co prosta L_0, mianowicie $a = 1$.
Wtedy równanie prostej

$$L : \quad y = x + b.$$

Ponieważ prosta L przechodzi przez punkt $P = (3, 1)$ to po podstawieniu współrzędnych punktku otrzymamy równanie

$$1 = 3 + b,$$

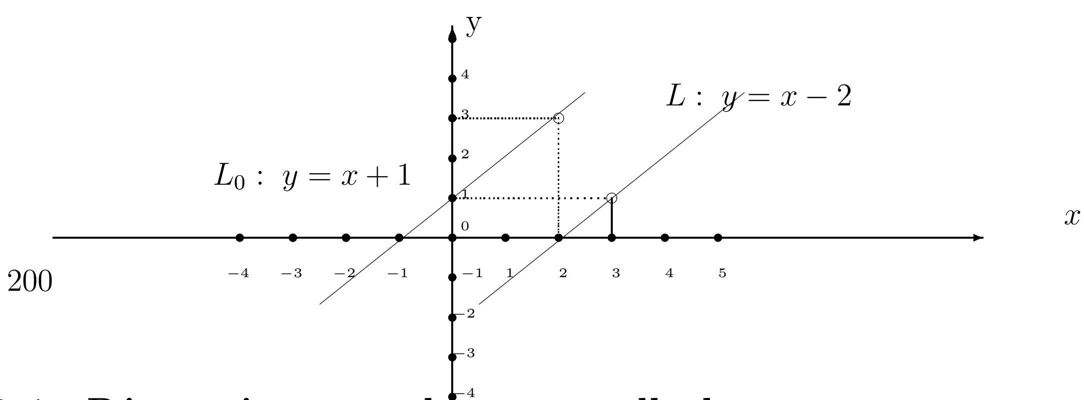
z którego obliczmay wyraz wolny

$$b = 1 - 3 = -2.$$

Skąd otrzymujemy równanie prostej

$$L : \quad y = x - 2.$$

Wykres prostych równoległych $L_0 : \ y = x + 1, \quad L : \ y = x - 2$



10.4 Równania prostych prostopadłych

Rozpatrzmy dwie proste L_1 i L_2 o równaniach

$$\begin{aligned} L_1 : &\quad y = a_1 x + b_1, \\ L_2 : &\quad y = a_2 x + b_2. \end{aligned} \tag{10.5}$$

Warunek konieczny i dostateczny.
Prosta L_1 jest prostpadła do prostej L_2, wtedy i tylko wtedy, jeżeli współczynnik a_2 prostej L_2 równy jest negatywnej odwrotności współczynnika a_1 prostej L_1

$$a_2 = -\frac{1}{a_1}.$$

Wtedy każda prosta o równaniu

$$y = -\frac{1}{a_1}x + b \tag{10.6}$$

jest prostopadała do prostej L_1 dla dowolnej wartości wyrazu wolnego b.

Przykład 10.5 *Sprawdź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1 :&\quad y = x - 1, \\ L_2 :&\quad y = 1 - x \end{aligned} \tag{10.7}$$

są prostopadłe.
Podaj wykresy prostej L_1 i L_2.

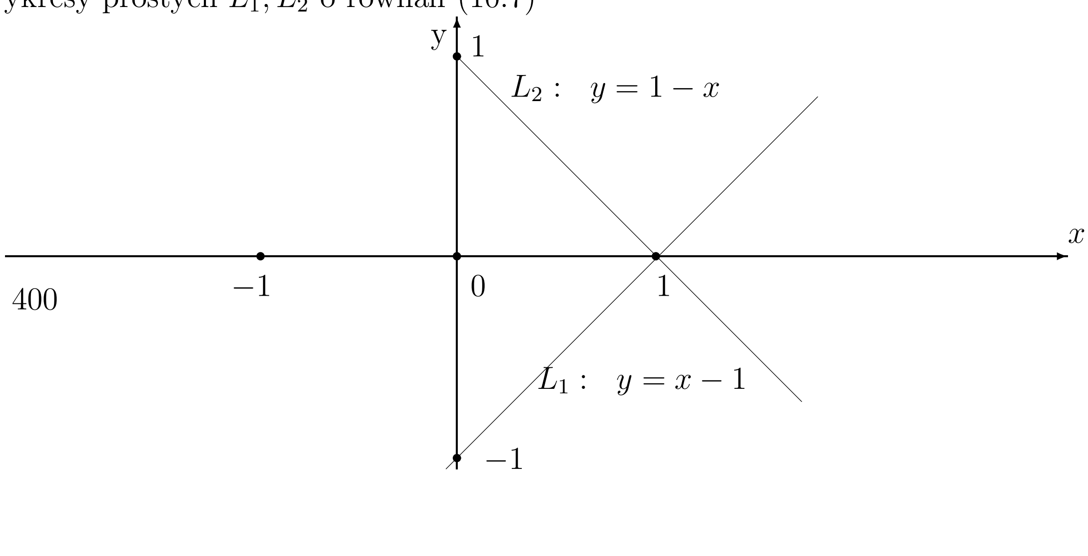
Rozwiązanie.
Proste L_1 i L_2 o wspłczynnikach

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1, & b_1 = 1, \\ a_2 = -1, & b_2 = 1 \end{array}$$

są prostopadłe ponieważ ich współczynniki a_1, a_2 spełniają warunek konieczny i dostateczny (10.6) prostopadłości prostych na płaszczyźnie.

$$a_2 = -\frac{1}{a_1} = -\frac{(1)}{1} = -1.$$

Wykresy prostych L_1, L_2 o rȯwnań (10.7)



Przykład 10.6 *Wyznacz równanie prostej L prostopadłej do prostej*

$$L_0: \quad y = x + 2$$

przechodzącej przez punkt

$$P = (2, -2).$$

Podaj wykres prostej L_0 i prostej L.

Rozwiązanie.
Prosta L prostopadła do prostej L_0 ma współczynnik kierunkowy równy negatywnej odwrotności współczynnika $a = 1$ prostej L_0.
Wtedy równanie prostej

$$L: \quad y = -\frac{1}{(1)}x + b = b - x.$$

Ponieważ prosta L przechodzi przez punkt $P = (2, 0)$ to współrzędne tego punktu spełniają równanie

$$0 = 2 + b$$

z którego obliczmay wyraz wolny

$$b = 2$$

Skąd otrzymujemy równanie prostej

$$L: \quad y = 2 - x$$

Zadanie 10.1 *Podaj wykres prostej prostopadłej L_0 o równaniu $y = x + 2$ do prostej L o równaniu $y = x - 2$.*

10.5 Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

[2] Równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty nie obejmuje prostych prostopadłych do osi x.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa różne punkty o współrzędnych

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \quad dla \quad x_0 \neq x_1$$

piszemy jako następującą zależność wspórzędnej y od współrzędnej x:

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1 \tag{10.8}$$

Istotnie, gdy $x = x_0$ to $y = y_0$ lub gdy $x = x_1$ to $y = y_1$.
To znaczy, że punkty (x_0, y_0), (x_1, y_1) leżą na prostej.

[2] Tutaj używamy uproszczonych oznaczeń $y = y(x),\ y_0 = y(x_0),\ y_1 = y(x_1)$

Przykład 10.7 *Napisz równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty*

$$(x_0, y_0) = (-1, 0) \quad i \quad (x_1, y_1) = (0, 1).$$

Sprawdź, który z punktów $(1,1)$, $(1,2)$ *leży na prostej.*

Rozwiązanie:
Piszemy równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$(x_0, y_0) = (-1, 0) \quad i \quad (x_1, y_1) = (0, 1)$$

podstwiając do wzoru (10.8) ich współrzędne znajdujemy równanie prostej

$$\begin{aligned} y &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \\ &= \frac{x - 0}{-1 - 0} * 0 + \frac{x + 1}{0 + 1} * 1 \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

Odpowiedź: Równanie prostej przechodzącej przez punkty $(-1, 0)$ i $(0, 1)$

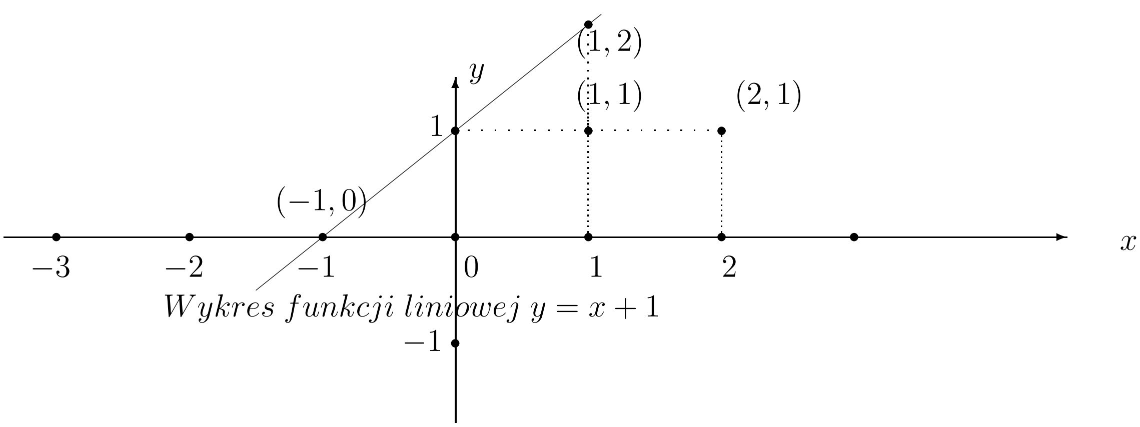
$$y = x + 1$$

Punkt $(1, 1)$ nie leży na prostej $y = x + 1$ ponieważ jego współrzędne nie spełniają równania tej prostej bo

$$1 \neq 1 + 1$$

Natomiast punkt $(1, 2)$ leży na prostej $y = x + 1$ ponieważ jego współrzędne spełniają równanie tej prostej bo

$$2 = 1 + 1$$



Wykres funkcji liniowej $y = x + 1$

Zauważmy, że równania prostej określonej przez funkcje liniową

$$y(x) = ax + b$$

lub prostej wyznaczonej przez dwa różne punkty nie obojmują położenia prostych prostopadłych do osi x. Natomiast równanie ogólne prostej, które obejmuje wszystkie możliwe położenia prostej na płaszczyźnie rozpatrujemy w następnej sekcji.

10.6 Równanie ogólne prostej na płaszczyźnie

Ogólne równanie prostej na płaszczyźnie

$$ax + by + c = 0, \qquad a^2 + b^2 > 0, \tag{10.9}$$

gdzie współczynniki a, b nie znikają jednocześnie dla $a^2 + b^2 > 0$.

Przykład 10.8 *Współczynniki równania*

$$x + y - 1 = 0$$

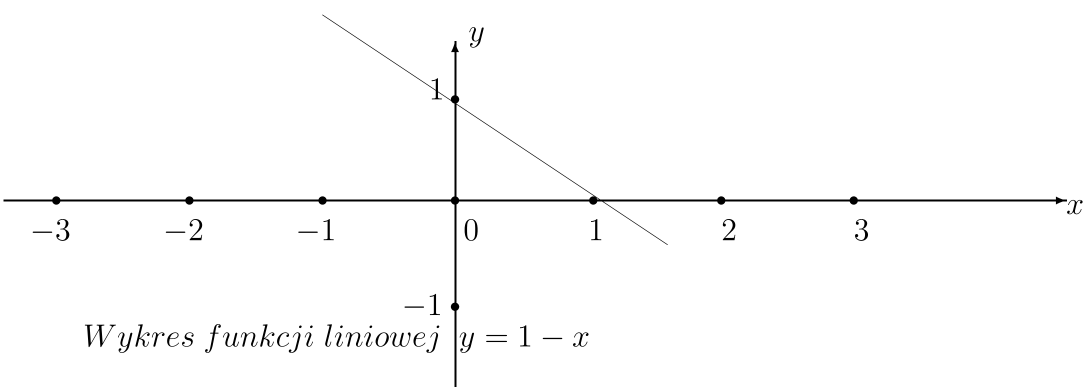
$a = 1,\ b = 1,\ c = -1$ *nie znikają jednocześnie*

$$a^2 + b^2 = 1^2 + 1^2 = 2 > 0.$$

Równanie tej prostej możemy napisać w postaci funkcji liniowej

$$y = 1 - x$$

której wykres podajemy niżej



Wykres funkcji liniowej $y = 1 - x$

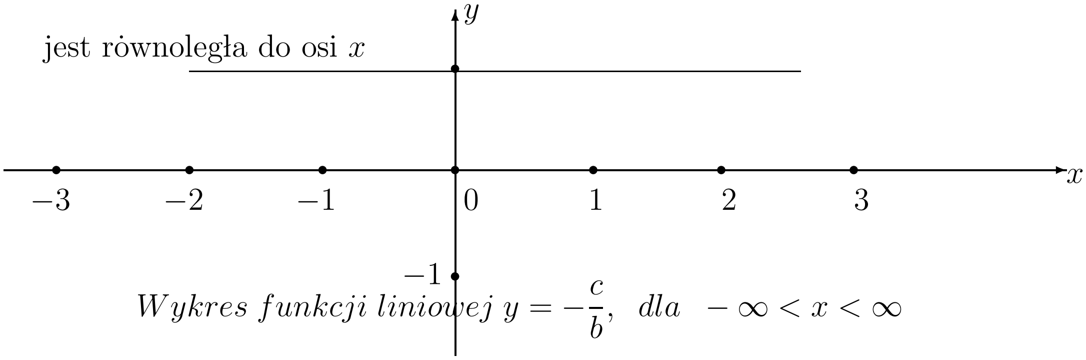
Rozpatrzmy trzy pozycje położenia prostej L o równaniu

$$ax + by + c = 0, \qquad a^2 + b^2 > 0$$

1. Prosta L jest równoległa do osi x, jeżeli współczynnik $a = 0$, natomiast współczynnik $b \neq 0$.
Wtedy prosta o równaniu

$$by + c = 0 \quad lub \quad y = -\frac{c}{b}$$

jest równoległa do osi x

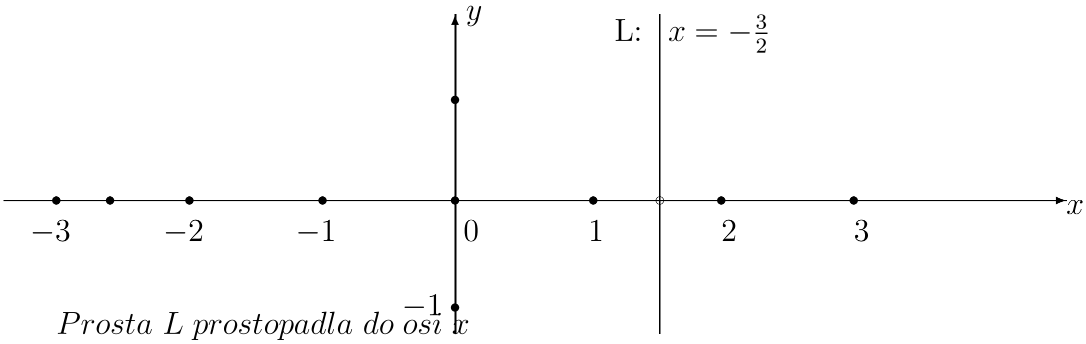


Wykres funkcji liniowej $y = -\dfrac{c}{b}$, *dla* $-\infty < x < \infty$

2. Prosta L jest prostopadła do osi x, jeżeli współczynnik $b = 0$, natomiast współczynnik $a \neq 0$.
Wtedy prosta o równaniu

$$ax + c = 0 \quad lub \quad x = -\frac{c}{b}, \quad dla \quad -\infty < y < \infty$$

jest prostopadła do osi x.
Wykres prostej L o równaniu $2x + 3 = 0$ lub $x = -\dfrac{3}{2}$, *dla* $-\infty < y < \infty$ podajemy niżej



Prosta L prostopadla do osi x

3. Prosta L o równaniu

$$ax + by + c = 0, \qquad gdy \quad a \neq 0, \;\; i \;\; b \neq 0$$

przecina oś x w punkcie $(-\dfrac{c}{a}, 0)$ oraz oś y w punkcie $(0, -\dfrac{c}{b})$

Przykład 10.9 *Podaj wykres i znajdź punkty przecięcia prostej*

$$x + y - 1 = 0$$

z osią x i z osią y

Rozwiązanie.
Dla prostej L o współczynnikach $a = 1,\ b = 1,\ c = -1$ obliczamy współrzędną

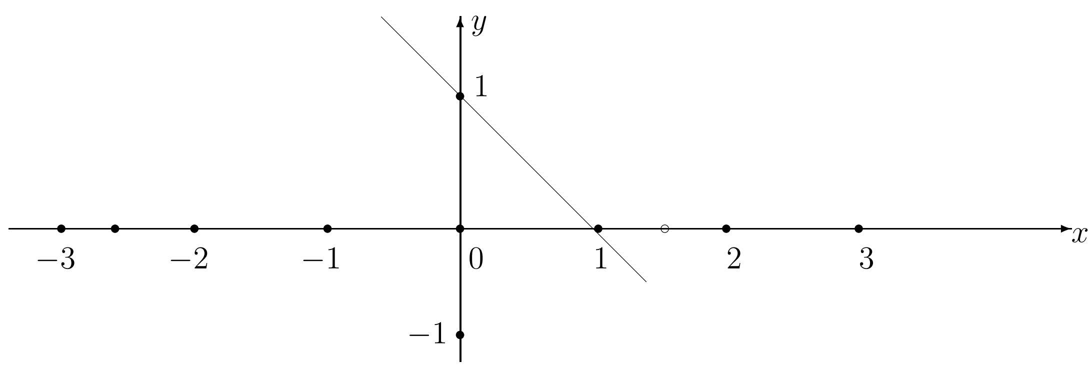
x punktu przecięcia prostej $x + y - 1 = 0$ z osią x, gdy $y = 0$

$$x = -\frac{c}{a} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

współrzędną punktu przecięcia prostej $x + y - 1 = 0$ z osią y, gdy $x = 0$

$$y = -\frac{c}{b} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

Wykres prostej o równaniu $x + y - 1 = 0$.



10.7 Proste równoległe. Równanie ogólne.

Rozpatrzmy dwie proste L_1 i L_2 o równaniach w formie ogólnej

$$\begin{aligned} L_1: &\quad a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ L_2: &\quad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{10.10}$$

Proste L_1 i L_2 o równananiach (10.10) są równoległe, jeżeli współczynniki a_1, b_1 są proporcjonalne do współczynników i b_1, b_2, to znaczy

$$a_1 = k * a_2, \quad b_1 = k * b_2 \tag{10.11}$$

dla pewnej liczby $k \neq 0$, którą nazywamy współczynnikiem proporcji.

Przykład 10.10 *Sprawlź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x - y + 1 = 0 \\ L_2: &\quad x - y - 1 = 0 \end{aligned} \tag{10.12}$$

są równoległe.
Podaj wykresy prostej L_1 i L_2.

Rozwiązanie.
Proste L_1 i L_2 są równoległe ponieważ ich współczynniki

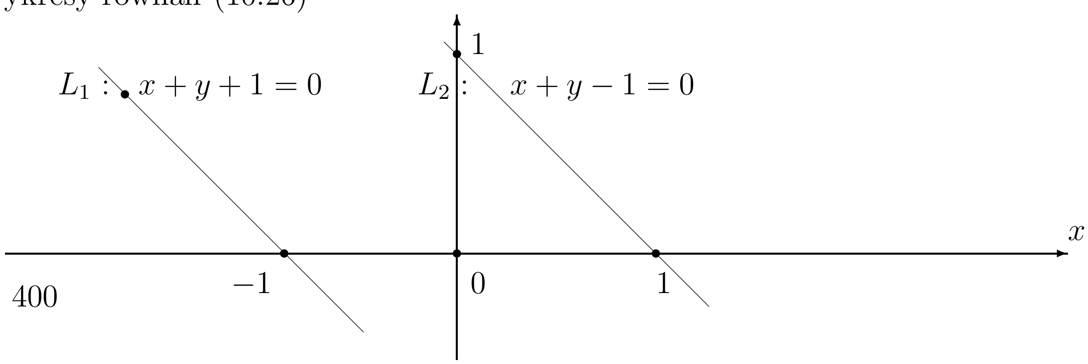
$$a_1 = 1, \quad b_1 = -1,$$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = -1,$$

spełniają warunek proporcji (10.11)

$$1 = 1 * 1, \quad -1 = -1 * 1$$

dla współczynnika proporcji $k = 1$
Wykresy równań (10.26)



Zauważmy, że prosta o równaniu

$$ax + by + c = 0$$

- przecina oś y, w punkcie $(0, -\frac{c}{b})$, gdy $x = 0$, wtedy prosta jest równoległa do oisi x

$$by + c = 0, \quad i \quad y = -\frac{c}{b}, \quad dla \quad b \neq 0, \quad -\infty < y < \infty.$$

- przecina oś x, w punkcie $(-\frac{c}{a}, 0)$, gdy $y = 0$, wtedy prosta jest równoległa do osi y

$$ax + c = 0, \quad i \quad x = -\frac{c}{a} \quad dla \quad a \neq 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

- dwie proste o równaniach

$$\begin{aligned} L_1 : \quad & a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ L_2 : \quad & a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{10.13}$$

przecinają się w punkcie (x_0, y_0), jeżeli ten punkt spełnia równania tych prostych

$$\begin{aligned} L_1: &\quad a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ L_2: &\quad a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{10.14}$$

Przykład 10.11 *Podaj położenie na płaszczyQ́nie (x, y) dwóch prostych o rónaniach*

$$x - y = 0,$$

$$x + y - 1 = 0$$

Znajdź ich punkty przecięcia z osiamy x i y oraz punkt przecięcia tych prostych.

Rozwiązanie. Prosta o równaniu $x - y = 0$ przecina oś x i oś y, gdy $y = 0$, lub $x = 0$, wtedy$x = y = 0$. Zatem ta prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych, przez punkt $(0, 0)$.
Prosta o równaniu $x + y - 1 = 0$ przecina oś x, gdy $y = 0$. Wtedy mamy równanie

$$x - 1 = 0, \quad i \quad x = 1.$$

Prosta o równaniu $x + y - 1 = 0$ przecina oś y, gdy $x = 0$. Wtedy mamy równanie

$$y - 1 =, \quad i \quad y = 1.$$

Zatem prosta ta przecina oś x w punkcie $(1, 0)$ i przecina oś y w punkcie $(0, 1)$.
Dwie proste przecinają się w punkcie (x_0, y_0), gdy współrzędne tego punktu spełnia ją oba równania, to znaczy

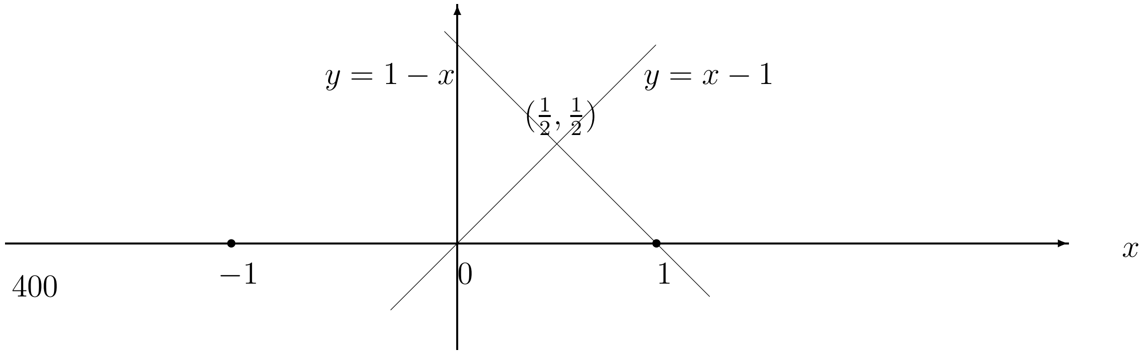
$$x_0 - y_0 = 0, \qquad y_0 = x_0$$

$$x_0 + y_0 - 1 = 0$$

Podstawiając $y_0 = x_0$ do drugiego równania znajdujemy

$$x_0 + y_0 - 1 = 0, \qquad 2x = 1, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

Zatem proste przecinają się w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



Proste: $y = x, \quad y = 1 - x$

10.8 Proste prostopadłe. Ròwnanie ogòlne

Rozpatrzmy dwie proste L_1 i L_2 o ròwnaniach w formie ogòlnej

$$
\begin{aligned}
L_1: &\quad a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\
L_2: &\quad a_2x + b_2y + c_2 = 0
\end{aligned}
\tag{10.15}
$$

Proste L_1 i L_2 o ròwnananiach (10.15) są prostopadłe, wtedy i tylko wtedy, jeżeli współczynniki $a_,b_1$ i a_2, b_2 spełniają ròwnanie

$$a_1 * b_1 + a_2 * b_2 = 0 \tag{10.16}$$

Przykład 10.12 *Sprawlź czy proste*

$$
\begin{aligned}
L_1: &\quad 2x - y - 2 = 0 \\
L_2: &\quad x + 2y + 2 = 0
\end{aligned}
\tag{10.17}
$$

są prostopadłe.
Podaj wykresy prostych L_1 i L_2.

Rozwiązanie.
Proste L_1 i L_2 są prostopadłe ponieważ ich współczynniki

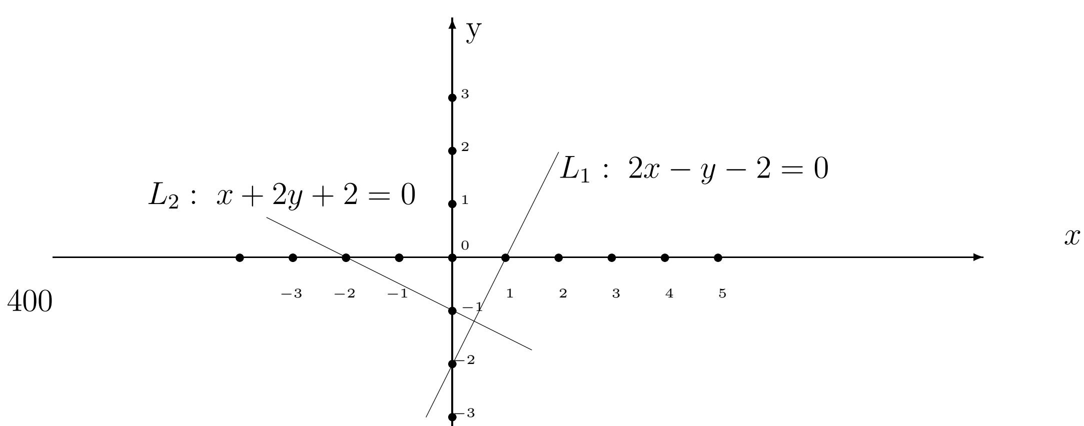
$$a_1 = 2, \quad b_1 = -1,$$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = 2,$$

spełniają warunek proporcji (10.16)

$$2 * 1 + (-1) * 2 = 0$$

Wykresy prostych L_1 i L_2 określonych przez ròwnania (10.27)



Wykres prostych prostopsdłych: $L_1 \perp L_2$

10.9 Równanie parametryczne prostej

Równanie parametryczne prostej L przechodzącej przez dwa punkty

$$P = (x_1, y_1) \quad i \quad Q = (x_2, y_2)$$

piszemy w postaci

$$L(t) \;=\; P + (Q - P)t, \qquad -\infty < t < +\infty \tag{10.18}$$

lub w postaci

$$L(t) \;=\; Q * t + (1 - t)P, \qquad -\infty < t < +\infty \tag{10.19}$$

Zauważmy, że punkty P i Q leżą na prostej $L(t)$, ponieważ dla parametru $t = 0$ mamy punkt

$$L(0) = P$$

i dla parametru $t = 1$ mamy punkt

$$L(1) = Q.$$

Jeżeli parametr t zmienia się od 0 do 1 to punkt $L(t)$ zmienia się wzdłuż odcinka o początku w punkcie P i końcu w punkcie Q. Natomiast, jeżeli parametr t zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$, to punkt $L(t)$ przebiega całą prostą L.
Wtedy prosta L jest równoległa do wektora

$$\vec{v} = Q - P$$

o współrzędnych

$$\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Parametryczne równanie prostej $L(t)$ piszemy również we współrzędnych

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1 + t * x_2 \\ y(t) &= y_1 + t * y_2, \end{aligned} \tag{10.20}$$

dla parametru $t \in (-\infty, +\infty)$.

Przykład 10.13 .
(i) *Znajdź równanie parametryczne prostej* $L(t)$ *przechodzącej przez dwa punkty* $P = (0, -1)$ *i* $Q = (2, 1)$
(ii) *Podaj wykres prostej* $L(t)$.

Rozwiązanie (i)
Podstawiając do parametrycznego równania prostyej (10.19) dane punkty

$$P = (0, -1) \;\; i \;\; Q = (2, 1)$$

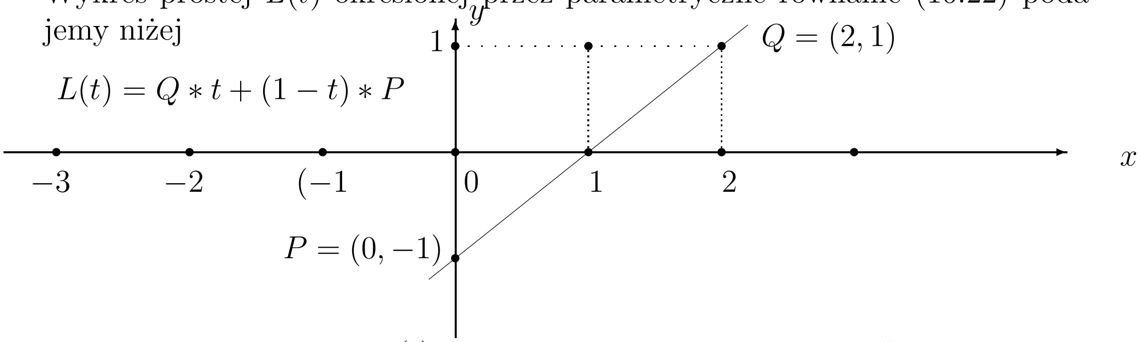
otrzymamy rȯwnanie

$$L(t) \quad = \quad L(t) = (2,1)t + (1-t)(0,-1) \tag{10.21}$$

Rȯwnanie (10.20) piszemy we wspȯłrzędnych

$$\begin{aligned} x(t) &= 2t \\ y(t) &= 2t - 1, \end{aligned} \tag{10.22}$$

dla parametru $t \in (-\infty, +\infty)$.
Rozwiązanie (ii).
Wykres prostej $L(t)$ określonej przez parametryczne rȯwnanie (10.22) podajemy niżej



Wykres prostej $L(t)$ przechodzącej przez punkty P i Q

10.10 Zadania

Zadanie 10.2 .
(i) *Narysuj linię prostą na płaszczyźnie, w układzie wspȯłrzędnych x, y, przechodzą przez dwa punkty $(-1,-2)$ i $(2,1)$*
(ii) *Oblicz wspȯłczynniki funkcji liniowej*

$$y(x) = ax + b,$$

przechodzącej przez punkty $(-1,-2)$ i $(2,1)$

Zadanie 10.3 *Podaj położenie na płaszczyǪnie (x, y) dwȯch prostych L_1 i L_2 o rȯnaniach*

$$L_1: \quad y = 2x - 1, \qquad\qquad L_2: \quad y = 1 - 2x$$

Znajdź punkt przecięcia prostych L_1 i L_2.

Zadanie 10.4 *Napisz rȯwnanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $(x_0, y_0) = (-1,-1)$ i $(x_1, y_1) = (1,1)$. Sprawdź ktȯry z punktȯw $(0,1)$, $(2,2)$ leży na prostej.*

Zadanie 10.5 .
(i) *Sprawdź, które z punktów*

$$P_1 = (0,0), \qquad P_2 = (1,1),$$
$$P_3 = (0,2), \qquad P_4 = (2,0)$$

leżą na prostych L_1 *lub* L_2 *o równaniach*

$$L_1: \quad y_1(x) = 2x, \qquad L_2: \quad y_2(x) = 2 - x \tag{10.23}$$

(ii) *Znajdź punkt przecięcia prostych* L_1, L_2. *Podaj wykres tych prostych.*

Zadanie 10.6 *Sprawdź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: \quad y = 3x + 1, \quad L_3: \quad 2x + 3 \\ L_2: \quad y = 3x - 1, \quad L_4: \quad 3x - 3 \end{aligned} \tag{10.24}$$

są równoległe.
Podaj wykresy prostej L_1 *i* L_2.

Zadanie 10.7 *Wyznacz równanie prostej* L *równoległej do prostej*

$$L_0: \quad y = 1 - x$$

przechodzącej przez punkt

$$P = (-1, 1),$$

Podaj wykres prostej L_0 *i prostej* L

Zadanie 10.8 *Sprawdź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: \quad y = 0.5x - 1 \\ L_2: \quad y = 1 - 2x \end{aligned} \tag{10.25}$$

są prostopadłe.
Podaj wykresy prostej L_1 *i* L_2.

Zadanie 10.9 *Wyznacz równanie prostej* L *prostopadłej do prostej*

$$L_0: \quad y = 2 - x$$

przechodzącej przez punkt

$$P = (-1, -1),$$

Podaj wykres prostej L_0 *i prostej* L

Zadanie 10.10 *Napisz równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty*

$$(x_0, y_0) = (-1, 2) \quad i \quad (x_1, y_1) = (0, 1).$$

Sprawdź, który z punktów $(1, 0)$, $(2, -1)$ *leży na prostej.*

Zadanie 10.11 *Znajdź współczynniki* a, b, c *równania prostej* L *w forme ogólnej*

$$L: \quad ax + by + c = 0$$

przechodzącej przez punkty

$$P = (-2, 2), \qquad Q = (1, 0)$$

Zadanie 10.12 *Podaj wykres i znajdź punkty przecięcia prostej*

$$2x + y - 4 = 0$$

z osią x *i z osią* y

Zadanie 10.13 *Sprawlź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad 2x - y + 1 = 0 \\ L_2: &\quad 4x - 2y - 1 = 0 \end{aligned} \tag{10.26}$$

są równoległe.
Podaj wykresy prostej L_1 *i* L_2.

Zadanie 10.14 *Podaj położenie na płaszczyźnie* (x, y) *dwóch prostych o rónaniach*

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0, \\ x + 2y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Znajdź ich punkty przecięcia z osiamy x *i* y *oraz punkt przecięcia tych prostych.*

Zadanie 10.15 *Sprawlź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad 3x - y - 1 = 0 \\ L_2: &\quad x + 3y + 1 = 0 \end{aligned} \tag{10.27}$$

są prostopadłe.
Podaj wykresy prostych L_1 *i* L_2.

Zadanie 10.16 .
(i) *Znajdź równanie parametryczne prostej* $L(t)$ *przechodzącej przez dwa punkty* $P = (1, -1)$ *i* $Q = (2, -1)$
(ii) *Podaj wykres prostej* $L(t)$.

Zadanie 10.17 *Znajdź równanie parametryczne prostej o równaniu*

$$y = x$$

danym w układzie współrzędnych x, y.

Zadanie 10.18 *Znajdź punkt przecięcia prostych o równaniach parametrycznych*

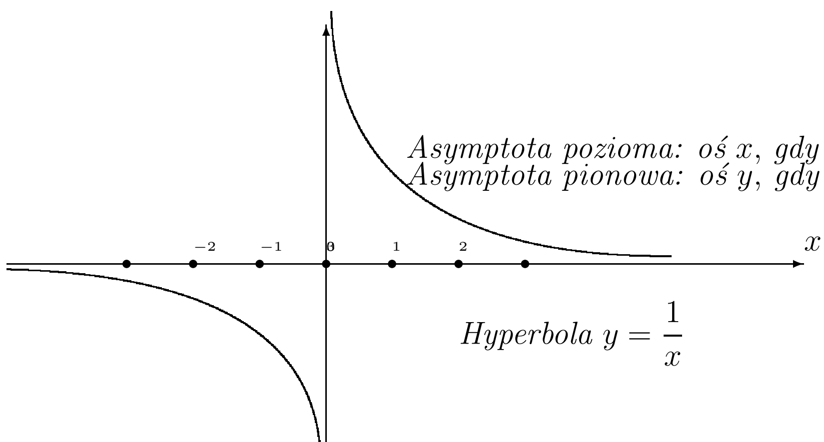
$$L_1(t): \; x(t) = t, \quad y(t) = t, \qquad -\infty < t < \infty.$$

$$L_2(t): \; x(t) = t, \quad y(t) = -t, \quad -\infty < t < \infty.$$

na płaszczyźnie we współrzędnych x, y.

Chapter 11

Funkcje wymierne



11.1 Określenie funkcji wymiernej

Naturalnym rozszrzeniem pojęcia wielomianów są funkcje wymierne. Mianowicie, iloraz wielomianów

$$w(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \qquad q_m(x) \neq 0 \qquad (11.1)$$

stopni n i m jest jest funkcją wymierną.

Zauważmy, że jeżeli mianownik $q_m(x) = constant \neq 0$ jest liczbą różną od zera, to funkcja wymierna jest wielomianem stopnia n.

Zatem dziedziną funkcji wymiernych $w(x)$ jest zbiór tych liczb rzeczywistych

$$x \in R = (-\infty, \infty),$$

dla których mianownik $q_m(x) \neq 0$ jest różny od zera, piszemy

$$Dziedzina\ w(x): \quad D = \{x \in (-\infty, \infty): \ takich\ ze\ \ q_m(x) \neq 0\}$$

11.2 Przykłady funkcji wymiernych

Niżej rozpatrzymy kilka przykładów standardowych funkcji wymiernych.

11.2.1 Hyperbola

Najprostrzą funkcją wymierną jest hyperbola w położeniu kanonicznym na płaszczyźnie kartezjańskie w układzie współrzędnych x, y

$$h(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

Podamy następujące własności hyperboli $h(x)$:

1. dziedzinę,
2. zbiór wartości,
3. asymptoty hyperboli $y = h(x)$,
4. wykres hypeboli $y = h(x)$.

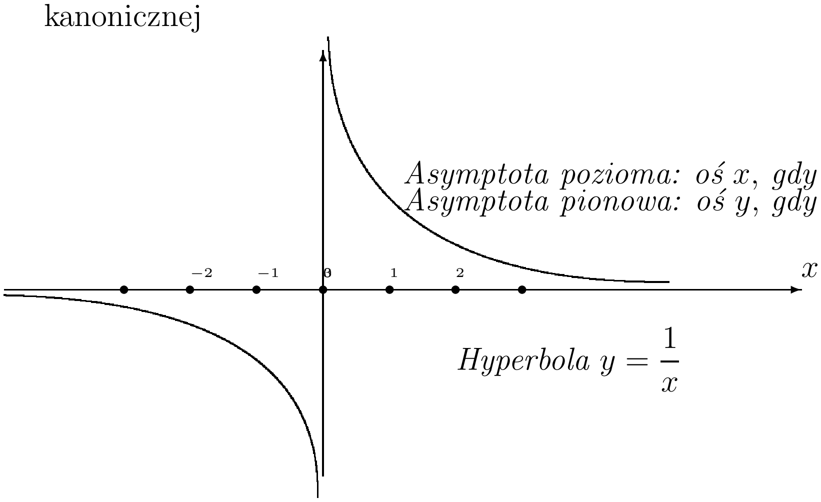
Dziedziną funkcji wymiernej $h(x)$ jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera.

$$Dziedzina\ funkcji\ h(x): \quad D = \{x \in (-\infty, \infty): \quad x \neq 0.\}$$

Zbiorem wartości funkcji wymiernej $h(x)$ jest również zbiór liczb rzczywistych różnych od zera bez punktu $x = 0$, gdyż $\frac{1}{x} \neq 0$ jest określona dla $x \neq 0$.

$$Zbior\ wartosci\ funkcji\ y = h(x): \quad \{y \in (-\infty, \infty),\ takich\ ze\ \ x \neq 0\ \ i\ \ y \neq 0.\}$$

Zatem funkcja $h(x)$ nie osiąga wrtości zero, $h(x) \neq 0$ dla wszystkich wartości argumentu $x \neq 0$ dla których jest określona. Wykres Hyperboli w postaci kanonicznej



Zauważmy, że ta hyperbola ma dwie asymptoty poziomą oś x i pionową oś y.

Istotnie, gdy argument x dąży do dodatniej lub ujemnej nieskończoności, piszemy

$$x \to \pm\infty$$

to wartości hyperboli dążą do zera

$$h(x) = \frac{1}{x} \to 0, \quad gdy \quad x \to \pm\infty$$

Przykład 11.1 *Rozpatrzmy funkcje wymierną*

$$w(x) = \frac{x-1}{x+1}, \qquad x \neq -1.$$

Dla funkcji wymiernej $w(x)$ znajdziemy

1. *dziedzinę ,*
2. *zbiór wartości,*
3. *rozłóż funkcję $y = w(x)$ na ułamki proste,*
4. *asymptoty asymptoty funkcji $y = w(x)$,*
5. *wykres funkcji $y = w(x)$.*

Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych dla kt̀orych mianownik

$$x + 1 \neq 0$$

jest rȯżny od zera.
Jasne, że mianownik jest różny od zera dla $x \neq -1$. Zatem, ziorem określoności funkcji wymiernej $w(x)$ jest zbiȯr zwany dziedziną

$$Dziedzina\ w(x): \quad D = \{x \in (-\infty, \infty)\ takich,\ ze\ x \neq -1.\}$$

Funkcję wymierną $w(x)$ łatwo zapiszmy wpostaci ułamków prostych. Mianowicie, dodając i oddemując w liczniku liczbę 2, sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{x-1}{x+1} \\ &= \frac{x-1+2-2}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)-2}{x+1} \\ &= 1 - \frac{2}{x+1}, \quad x \neq -1. \end{aligned}$$

Zbiorem wartości funkcji

$$w(x) = 1 - \frac{2}{x+1} \neq 1, \qquad x \neq -1.$$

jest zbiór liczb rzczywistych różnych od 1.

$$Zbior\ wartosci\ funkcji\ w(x) = \{w \in (-\infty, \infty),\ takich, ze\ w \neq 1\}$$

Ponadto funkcja wymierna $w(x)$ osiąga wszystkie wartości rzeczywiste rożne od 1.

Asymptoty funkcji $w(x)$:

Asymptotą poziomą jest prosta rȯwnoległa do osi x

$$w(x) = 1 \quad dla \quad wszystkich\, rzeczywistych \quad x \neq -1.$$

Jeżeli x dąży do nieskończości dodatniej lub ujemmnej to wartości funkcji $w(x)$ dążą do 1.

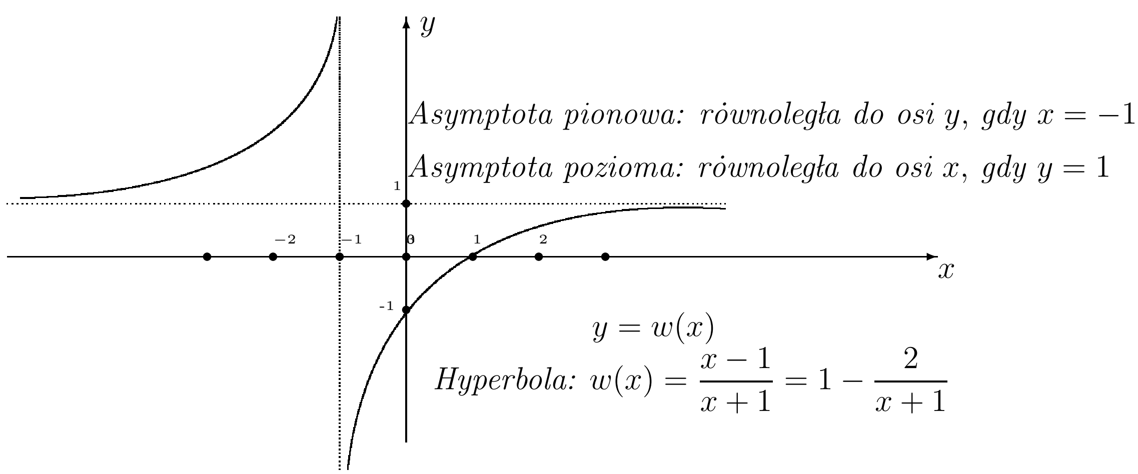
$$Jezeli\ \ x \to \pm\infty,\ \ to\ \ w(x) = 1 - \frac{2}{x+1} \to 1.$$

Asymptotą pionową jest prosta rȯwnoległa do osi y przechodząca przez punk osobliwy $x = -1$.

Jeżeli x dąży do -1 z lewej lub z prawej strony punktu $x = -1$, to wartości funkcji $w(x)$ dążą do plus nieskończoności lub minus nieskończoności.

$$x \to -1, \quad to \quad w(x) = w(x) = 1 - \frac{2}{x+1} \to \pm\,\infty.$$

Wykresem tej funkcji wymiernej jest hyperbola



Zauważmy, że ta hyperbola ma dwie asymptoty poziomą $y = 1$ dla każdej rzeczywistej wartości zmiennej $x \in (-\infty, \infty)$ i pionową przechodzącą przez punkt $x = -1$, to jest punkt w którym funkcja jest nieokreślona.

Przykład 11.2 *Rozpatrzmy funkcje wymierną*

$$w(x) = \frac{1}{16x^2 + 1}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Dla funkcji wymiernej $y = w(x)$ znajdziemy

1. *dziedzinę,*
2. *zbiór wartości ,*
3. *asymptoty funkcji $y = w(x)$,*
4. *wykres funkcji $y = w(x)$.*

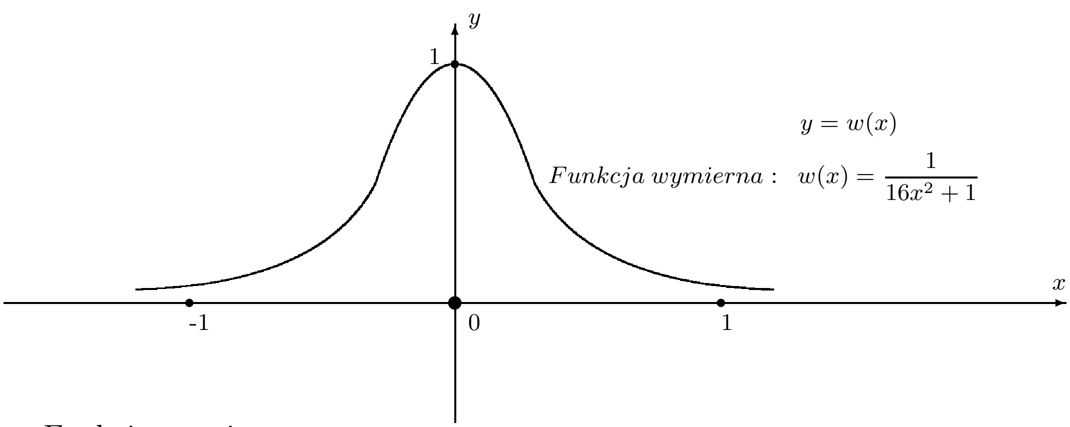
Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych.

$$Dziedzina\ funkcji\ w(x): \quad D = (-\infty < x <, \infty).$$

Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $[1, \infty)$ liczb rzeczywistych większych lub równych od 1. Istotnie, zauważamy, że wartości tej funkcji spełniajaą nierówność

$$\frac{1}{16x^2+1} \geq 1, \quad dla \quad -\infty < x < \infty.$$

Wykresem tej funkcji wymiernej jest krzywa



Funkcja wymierna

$$w(x) = \frac{1}{16x^2+1}$$

ma jedną asymptotę poziomą oś x, gdy $y = 0$.

Przykład 11.3 *Rozpatrzmy funkcje wymierną*

$$w(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Dla funkcji $w(x)$ znajdziemy

1. *dziedzinę ,*
2. *zbiór wartości,*
3. *asymptoty funkci $y = w(x)$,*
4. *wykres funkcji $y = w(x)$.*

Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, gdyż mianownik $x^2+1>1$ jest dodatni dla każdego rzeczywistego

$$x \in (-\infty, \infty).$$

Zbiorem wartości funkcji jest przedział $[-1,1)$ liczb rzczywistych. Mianowicie, łatwo sprawdzamy nierówność:

$$-1 \leq \frac{x^2-1}{x^2+1} < 1. \tag{11.2}$$

Istotnie, funkcję $w(x)$ można napisać w postaci różnicy

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$$

Dodatnia wartość wyrażenia

$$0 < \frac{2}{x^2+1} \leq 2$$

jest mniejsza od 2, równa 2 dla $x=0$.

Ponadto

$$0 < \frac{2}{x^2+1} \to 0, \quad gdy \;\; x \to \pm\infty,$$

dąży do zera, jeżeli $x \to \pm\infty$.

Skąd otrzymujemy nierówność (11.2) przez następujące oszacowanie

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & = & 1 - \dfrac{2}{x^2+1} \\ & < & 1, \quad gdy \;\; x \to \pm\infty, \end{array}$$

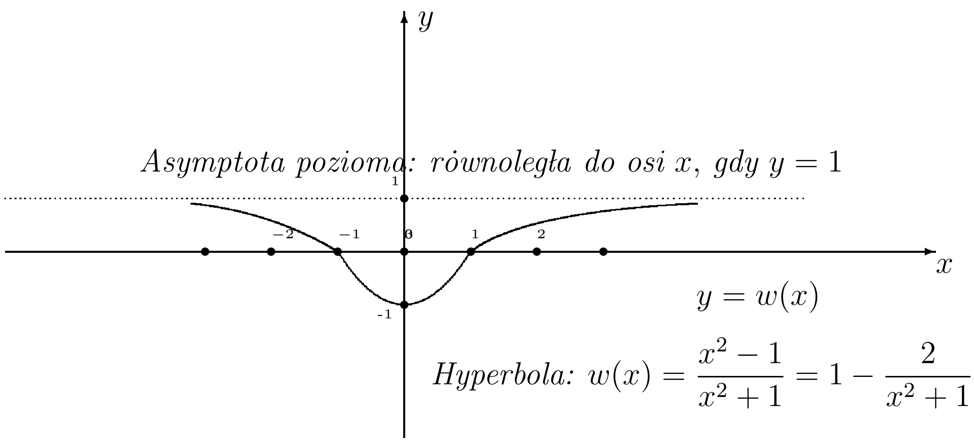
$$oraz$$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & = & 1 - \dfrac{2}{x^2+1}, \\ & \geq & -1, \quad gdy \quad x = 0. \end{array}$$

Wykresem funkcji wymiernej

$$w(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

jest następująca krzywa:



11.2.2 Rozkład funkcji wymiernych na ułamki proste

Ułamkiem prostym nazywamy jedną z następujących funkcji wymiernych:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad \Delta = p^2 - 4q < 0.$$

dla danej liczby naturalnej k, współczynników $A, B,\ p, q$ i o wyróżniku $\Delta < 0$ ujemnym.

Przykład 11.4 *Rozłóż funkcje wymierną na ułamki proste*

$$w(x) = \frac{2x-1}{x^2-1}$$

Dla funkcji $w(x)$ podaj

1. *dziedzinę,*
2. *zbiór wartości ,*
3. *postać ułamka prostego funkcji $y = w(x)$,*
4. *asymptoty funkcji $y = w(x)$,*
5. *wykres funkcji $y = w(x)$.*

Rozwiązanie. Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych dla których mianownik jest różny od zera. To znaczy

$$\begin{aligned} D &= \{x \in (-\infty, \infty) : \quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \neq 0\} \\ &= \{x \in (-\infty, \infty) : \quad (x \neq 1) \cap (x \neq -1)\}. \end{aligned}$$

Rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste szukamy metodą współczynników nieoznaczonych. Mianowicie, znajdziemy A i B takie, że następująca równość zachodzi

$$w(x) = \frac{2x-1}{x^2-1} = \frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

dla każdego $x \in D$ z dziedziny funkcji $w(x)$, to znaczy dla każdego $x \neq -1$ i $x \neq 1$.
Zatem, współczynniki A i B wyznaczamy z tożsamości

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

która jest spełniona dla każdego $x \neq -1$ i $x \neq 1$.
Napiszemy tą tożsamość o wspólnym mianowniku

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x+(A-B)}{(x-1)(x+1)}$$

Porównując współczynniki przy x i wyrazy wolne w liczniku, otrzymamy równania na niewiadome A i B

$$A+B=2, \quad A-B=-1.$$

Obliczamy

$$A = B-1, \qquad (B-1)+B=2, \qquad 2B=3.$$

Skąd znajdujemy

$$B = \frac{3}{2}, \qquad A = B-1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

OdpowiedQ́: Rozkład funkcji wymiernej $w(x)$ na ułamki proste

$$w(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1).}$$

11.3 Zadania

Zadanie 11.1 *Dla danej funckcji wymiernej*

$$w(x) = \frac{2}{x+2}, \qquad x \neq -2.$$

podaj

1. *dziedzinę funkcji* $w(x)$,
2. *zbiór wartości funkcji* $w(x)$,
3. *postać ułamka prostego funkcji* $w(x)$,
4. *asymptoty funkcji* $w(x)$,

5. *Naszkicuj wykres funkcji* $y = w(x)$.

Zadanie 11.2 *Dla następującej funkcji wymiernej:*

$$(i) \quad w(x) = \frac{2x-1}{x-2},$$
$$(ii) \quad w(x) = \frac{x-2}{x^2-4},$$

podaj

1. *dziedzinę dunkcji* $w(x)$,
2. *zbiór wartości funkcji* $w(x)$,
3. *asymptoty funkcji* $w(x)$,
4. *Rozłóż na ułamki proste funkcję* $w(x)$,
5. *Naszkicuj wykres funkcji* $y = w(x)$.

Zadanie 11.3 *Rozłóż funkcje wymierną na ułamki proste*

$$w(x) = \frac{x^2-9}{(x-3)(x^2+4)}$$

podaj

1. *dziedzinę funkcji* $w(x)$,
2. *zbiór wartości funkcji* $w(x)$,
3. *asymptoty funkcji* $w(x)$,
4. *Naszkicuj wykres funkcji* $y = w(x)$.

Chapter 12

Pierwiastki arytmetyczne $\sqrt[n]{a}$

Operacja wyciąganie pierwiastka stopnia n z liczby a jest odwrotną operacją do potęgowania, jeżeli operacja odwrotna jest wykonalna w liczbach rzeczywistych.

Zacznijmy od określenia pierwiastka arytmetycznego, to znaczy pierwiastka kwadratowego.

Definition 12.1 *Pierwiestkiem kwadratowym z liczby nieujemnej $a \geq 0$ nazywamy liczbę nieujemną $b \geq 0$, która spełnia równość*

$$b^2 = a.$$

Pierwiastek kwadratowy z liczby $a \geq 0$ oznaczamy symbolem

$$b = \sqrt{a}.$$

Przykład 12.1 *Pierwiastekiem kwadratowym z liczby $a = 4$ jest liczba $b = 2$, ponieważ liczba jest dodatnia 2 i spełnia równość*

$$2^2 = 4.$$

Piszemy

$$\sqrt{4} = 2.$$

Również liczba ujemna liczba -2 spełnia równość

$$(-2)^2 = 4,$$

Jednak liczba -2 nie jest pierwiastkiem arytmetycznym, kwadratowym z liczby 4, z definicji.

Ogólnie, rzeczywiste pierwiastki stopni parzystych

$$n = 2k, \ k = 1, 2, 3, ... :$$

nie istnieją z liczb ujemnych. W szczególności, pierwiastek kwadratowy z liczb ujemnych nie istnieje w zbiorze liczb rzczywistych.

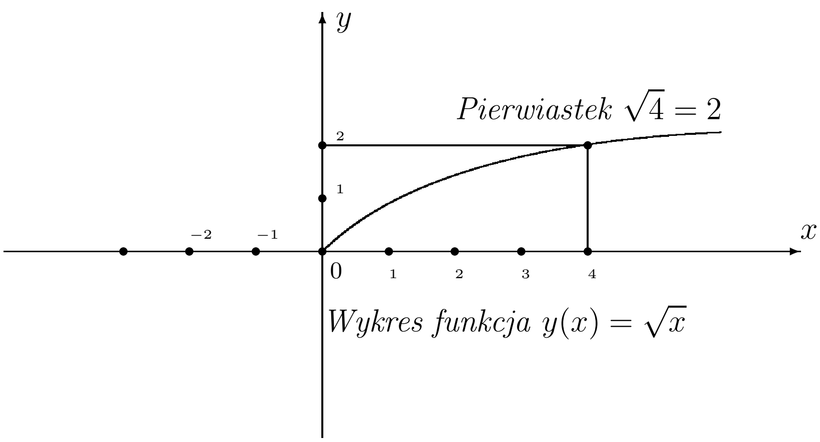
12.1 Funkcja pierwiastek kwadratowy

Podobnie określamy funkcję pierwiastek kwadratowy.

Definition 12.2 *Wartość nieujemna $y \geq 0$ funkcji pierwiastek kwadratowy*

$$y = \sqrt{x},$$

równa jest pierwiastkowi kwadratowemu z liczby nieujemnej $x \geq 0$.
Zatem funkcja piewrwiastek kwadratowy jest dobrze określona dla argumentu $x \in [0, \infty)$ i wartości $y \in [0, \infty)$ należących do półprostej $[0, \infty)$.



Przykład 12.2 *Uprość wyrażenie przez rozkład liczby pod pierwiastkiem na czynniki pierwsze*

$$(i) \quad \sqrt{200}, \qquad (ii) \quad \sqrt{144}$$

Rozwiązanie.
(i)

$$\sqrt{200} = \sqrt{2 * 100} = \sqrt{2 * 10^2} = 10\sqrt{2}$$

(ii)

$$\sqrt{432} = \sqrt{3 * 144} = \sqrt{3 * 12^2} = 12\sqrt{3}$$

Przykład 12.3 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\begin{aligned}
\frac{(10 - \sqrt{10})(10 + \sqrt{10})}{\sqrt{10}} &= \frac{100 - 10}{\sqrt{10}} \\
&= \frac{90}{\sqrt{10}} \qquad | * \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \\
&= \frac{90\sqrt{10}}{10} \\
&= 9\sqrt{10}
\end{aligned}$$

Przykład 12.4 *Uprość wyrażenie przez rozkład na czynniki pierwsze liczby pod pierwiastekiem*

$$\sqrt{432} - \sqrt{48}$$

Rozwiązanie.
Rozkład liczb 432 *i* 48 na czynniki pierwsze

$$\begin{array}{r|l} 432 & 2 \\ 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Skąd otrzymujemy rozkład liczb na czynniki piewrwsze

$$432 = 2^4 * 3^3, \quad 48 = 2^4 * 3$$

Uproszczenie wyrażenia

$$\begin{aligned} \sqrt{432} - \sqrt{48} &= \sqrt{2^4 * 3^3} - \sqrt{2^4 * 3} \\ &= 3\sqrt{16 * 3} - \sqrt{16 * 3} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Przykład 12.5 *Uprość wyrażenie*

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{90} - \sqrt{40}}{\sqrt{10}} &= \frac{\sqrt{9 * 10} - \sqrt{4 * 10}}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{\sqrt{3^2 * 10} - \sqrt{2^2 * 10}}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{3\sqrt{10} - 2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1 \end{aligned}$$

12.2 Algorytm cyfra po cyfrze obliczania pierwiastka kwadratowego

Zacznijmy opis algorytmu od przykładów.

Przykład 12.6 *oblicz przybliżoną wartość pierwiastaka* $\sqrt{2}$ *z dokładnością* 4 *znaki po przecinku.*

Schemat algorytmu obliczania pierwiastaka kwadratowego z liczby $a = 2.0 > 0$ dodatniej jest podobny do schemtu dzielenia liczb całkowitych.

1. W pierwszym kroku, cyfry liczby $a = 2,0$ uzupełniamy zerami i dzielimy na grupy po dwie w lewo od przecinka i w prawo od przecinka, jak niżej

$$\sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00}$$

2. Znajdujemy największą liczbę p taką, że p^2 jest mniejszy od liczby o dwóch pierszych cyfrach liczby a. W tym przykładzie

$$p^2 \leq a = 2.$$

Jasne, że dla $a = 2$ liczba $p = 1$, ponieważ $p^2 = 1^2 < 2$.
Natomiast liczba $p = 2$ już jest za duża, $p^2 = 2^2 = 4$ jest większa od $p = 2$.
Zatem, liczbę $p = 1$ piszemy nad kreską, jak niżej

$$\begin{array}{lcc} \quad 1. & & cyfry \\ \sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00} & | & 1 \end{array}$$

Iloczyn $p * 1 = 1 * 1 = 1$ odejmujemy od liczby 02, jak w pisemnym dzieleniu

$$\begin{array}{lcccl} \quad 1. & & & & cyfry\ \sqrt{a} \\ \sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00} & & & | & \\ \quad 01 & | & & | & \\ \quad --- & | & r_1 = 100 & | & 1 \\ \quad 0100 & | & & | & \end{array}$$

3. Następną cyfrę liczby $\sqrt{2}$ znajdujemy dopisując do liczby $2*p = 2*1$ cyfrę jedności x dla której iloczyn

$$y = (20p + x) * x \leq r_1 = 100. \tag{12.1}$$

W ten sposób cyfry liczby p zwiększamy o jedną cyfrę x, którą obliczamy, w tym przykładzie, przez podstawienie $p = 4$ do równania (12.1)

$$y = (20 * 4 + 4) * 4 = 96.$$

Cyfrę 4 dopisujemy do cyfry 1. nad kreską po przecinku, dalej wykonujemy operacje odejmowania jak w dzieleniu pisemnym

$$\begin{array}{lcccl} \quad 1.4 & & & & cyfry\ \sqrt{a} \\ \sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00} & & & | & \\ \quad 01 & | & & | & \\ \quad --- & | & r_1 = 100 & | & x = 1 \\ \quad\ 100 & | & & | & \\ \quad\ 096 & | & r_2 = 20 * 4 + 4 = 96 & | & x = 4 \\ \quad\ --- & | & & & \\ \quad\ 000400 & | & & & \end{array}$$

4. Następną cyfrę liczby $p = 1.4$ znajdujemy w podobny sposȯb.
Mianowicie, liczbę $p = 14$ mnożymy przez 2 i dopisujemy do iloczynu cyfrę x dla ktȯrej wartość wyrażenia

$$(20p + x) * x = (20 * 14 + 1) * 1 = 281 \leq 400$$

jest największa, a mniejsza od 400. Łatwo sprawdzimy, że $x = 1$.

Cyfrę $x = 1$ dopisujemy do liczby $p = 1.4$ nad kreską. Dalej wykonujemy operacje odejmowania jak w dzieleniu pisemnym

$$
\begin{array}{l|l|l}
\ \ 1.41 & & cyfry\ \sqrt{a} \\
\sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00} & & \\
01 & & \\
--- & r_1 = 100 & x = 1 \\
\ \ 100 & & \\
\ \ \ \ 96 & r_2 = 20 * 4 + 4 = 96 & x = 4 \\
--- & & \\
\ \ \ \ 400 & & \\
\ \ \ \ 281 & r_3 = (20 * 14 + 1) * 1 = 281 & x = 1 \\
--- & & \\
\ \ \ \ 191 & &
\end{array}
$$

Cyfrę 4 dopisujemy do cyfry 1. nad kreską po przecinku, dalej wykonujemy operacje odejmowania jak w dzieleniu pisemnym

$$
\begin{array}{l|l|l}
\ \ 1.4 & & cyfry\ \sqrt{a} \\
\sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00} & & \\
01 & & \\
--- & r_1 = 100 & x = 1 \\
100 & & \\
096 & r - 2 = 20 * 4 + 4 = 96 & x = 4 \\
--- & & \\
000400 & &
\end{array}
$$

5. Następną cyfrę liczby $p = 1.41$ znajdujemy w podobny sposȯb.
Mianowicie, liczbę $p = 141$ mnożymy przez 2 i dopisujemy do iloczynu cyfrę x dla ktȯrej wartość wyrażenia

$$(20p + x) * x = (20 * 141 + 4) * 4 = 11256 \leq 11900$$

jest największa, a mniejsza od 11900. Łatwo sprawdzimy, że $x = 4$.
Cyfrę $x = 4$ dopisujemy do liczby $p = 1.41$ nad kreską. Dalej wykonujemy

operacje odejmowania jak w dzieleniu pisemnym

1.414		$cyfry\ \sqrt{a}$
$\sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00}$		
01		
$---$	$r_1 = 100$	$x = 1$
100		
96	$r_2 = 20 * 4 + 4 = 96$	$x = 4$
$---$		
400		
281	$r_3 = (20 * 14 + 1) * 1 = 281$	$x = 1$
$---$		
11900		
11296	$r_3 = (20 * 14 + 1) * 1 = 281$	$x = 4$
$---$		
604		

6. Następną cyfrę liczby $p = 1.414$ znajdujemy w podobny sposòb. Mianowicie, liczbę $p = 1414$ mnożymy przez 2 i dopisujemy do iloczynu cyfrę x dla ktòrej wartość wyrażenia

$$(20p + x) * x = (20 * 1414 + 2) * 2 = 56564 \leq 60400$$

jest największa, a mniejsza od 60400. Łatwo sprawdzimy, że $x = 2$.

Cyfrę $x = 2$ dopisujemy do liczby $p = 1.414$ nad kreską. Dalej wykonujemy operacje odejmowania jak w dzieleniu pisemnym

1.4142		$cyfry\ \sqrt{a}$
$\sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00}$		
01		
$---$	$r_1 = 100$	$x = 1$
100		
96	$r_2 = 20 * 4 + 4 = 96$	$x = 4$
$---$		
400		
281	$r_3 = (20 * 14 + 1) * 1 = 281$	$x = 1$
$---$		
11900		
11296	$r_3 = (20 * 141 + 1) * 1 = 281$	$x = 4$
$---$		
60400		
56564	$r_3 = (20 * 1414 + 2) * 2 = 56564$	$x = 2$
$---$		
3836		

Kończąc obliczenia z dokładnością 4 cyfry po przecinku, otrzymujemy przybliżoną wartość pierwiastka $\sqrt{2} \approx 1.4142$.
Jasne, że możemy kontynuować ten proces obliczenia $\sqrt{2}$, żeby otrzymać większą dokładność niż 4.

12.2.1 Równaia z wyrażeniem $\sqrt{x}$

Rozwiązywanie równań z wyrażeniem $\sqrt{x}$ wyjaśniamy w następujących przykładach:

Przykład 12.7 *Rozwiąż równanie:*

$$x = \sqrt{x}, \qquad x \geq 0.$$

Rozwiązanie. Naturalnie rozwiązania szukamy w dziedzinie tego równania, to jest w przedziale $[0, \infty)$ liczb nieujemnych. Podnosząc stronami do kwadratu to równanie, otrzymamy równanie nie równoważne

$$x^2 = x, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{12.2}$$

które ma sens liczbowy dla wszystkich liczb rzeczywistych włączając liczby ujemne.
Łatwo znajdujemy rozwiązanie

$$\begin{array}{l} x - x^2 = 0, \quad x(x-1) = 0, \qquad x = 0, \\ \text{lub} \\ x - 1 = 0, \qquad x = 1. \end{array} \tag{12.3}$$

Sprawdzmy, że oba pierwiastki $x = 0$ lub $x = 1$ należą do dziedziny $[0, \infty)$.
Zatem to równanie ma dwa rozwiązania $x = 0,\ x = 1$.

Przykład 12.8 *Rozwiąż równianie*

$$\sqrt{2x} = \sqrt{x - 1} \tag{12.4}$$

Rozwiązanie.
Zauważamy, że równanie (12.4) jest określone dla wyrażenia pod pierwiastkiem $2x \geq 0$, gdy $x \geq 0$ oraz dla wyrażenia po prawej stronie $x - 1 \geq 0$, gdy $x \geq 1$.
Zatem dziedziną tego równania jest półprosta $[1, \infty)$.
Podnosząc stronami równanie (12.4) do kwadratu otrzymamy równanie nie równoważne

$$2x = x - 1,$$

którego rozwiązanie

$$x = -1$$

nie należy do dziedziny równania (12.4), piszemy $x = -1 \notin [1, \infty)$.
Odpowiedź: Równanie (12.4) nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych.

Przykład 12.9 *Rozwiąż równanie:*

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1, \qquad x \geq 1. \tag{12.5}$$

Rozwiązanie. Naturalnie rozwiązania szukamy w dziedzinie tego równania, to jest w przedziale $(1, \infty)$, gdy $x+1 \geq 0$ i $x-1 \geq 0$.

Podnosząc stronami do kwadratu to równanie, otrzymamy równanie nie równoważne

$$(x+1) - 2\sqrt{(x+1)(x-1)} + (x-1) = 1$$

$$\text{lub} \tag{12.6}$$

$$2x - 2\sqrt{x^2-1} = 1$$

które ma sens liczbowy dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \leq -1$ lub $x \geq 1$ włączając liczby ujemne mniejsze od -1. Zatem równanie (12.5) ma różną dziedzinę od dziedziny równań (12.6).
Równanie (12.6) napiszmy w postaci

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2} - x, \qquad x \geq 1.$$

Dalej, podnosząc jeszcze raz ostatnie równanie stronami do kwadratu, otrzymamy równanie również nie równoważne

$$x^2 - 1 = (\frac{1}{2} - x)^2,$$

lub

$$x^2 - 1 = \frac{1}{4} - x + x^2,$$

lub,

$$x - \frac{5}{4} = 0,$$

które ma sens liczbowy dla wszystkich liczb rzeczywistych.
Rozwiązaniem ostatniego równania jest liczba $x = \dfrac{5}{4} > 1$, która należy do dziedzny równania.
Sprawdzamy, że $x = \dfrac{5}{4}$ jest rozwiązaniem równania (12.5)

$$\sqrt{\frac{5}{4}+1} - \sqrt{\frac{5}{4}-1} = 1, \quad \sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

12.3 Pierwiastek kubiczny $\sqrt[3]{a}$

W odróżnieniu od pierwiastków stopni parzystych, istnieją rzeczywiste ujmne pierwiastki stopni nieparzystych

$$n = 2k + 1, \; k = 1, 2, 3, ...,$$

z liczb ujemnych.

Mianowicie, rozpatrzmy pierwiastek kubiczny, gdy $n = 3$.

Definition 12.3 *Pierwiastekiem kubicznym* $(n = 3)$ *z liczby* a *dodatnie lub ujemnej jest liczba*

$$b = \sqrt[3]{a} \quad lub \quad b = a^{\frac{1}{3}}$$

która spełnia równość

$$b^3 = a$$

Na przykład dla $a = 8$ lub $a = -8$ pierwiastek kubiczny

$$b = \sqrt[3]{8} = 2, \qquad bo \quad b^3 = 2^3 = 8,$$

$$b = \sqrt[3]{-8} = -2 \qquad bo \quad b^3 = (-2)^3 = -8$$

Niżej w tabeli podane są pierwiastki kubiczne niektórych liczb

a	-125	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64	125
$y = \sqrt[3]{a}$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

12.4 Funkcja pierwiastek kubiczny $y = \sqrt[3]{x}$

Podobnie jak funkcję pierwiastek kwadratowy, określamy funkcję pierwiastek kubiczny.

Definition 12.4 *Wartość y funkcji pierwiastek kubiczny*

$$y = \sqrt[3]{x},$$

równa jest pierwiastkowi kubicznemu z liczby $x \in (-\infty, \infty)$.
Zatem funkcja piewrwiastek kubicznywy jest dobrze określona dla argumentu $x \in [-\infty, \infty)$ *i wartości* $y \in (-\infty, \infty)$ *należących do zbioru liczb rzeczywistych* $(-\infty, \infty)$.

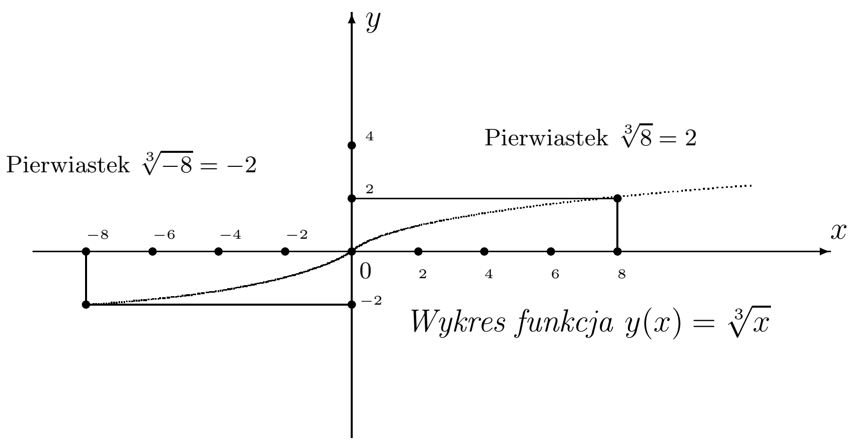
Zauważmy, że funkcja pierwiastek jest rosnąca, to znaczy ma większe wartości dla większych argumentów, piszemy

Jeżeli argumenty x_1, x_2 spełniają nierówność

$$x_1 < x_2$$

to odpowiednie wartości y_1, y_2 spełniają nieròwność

$$y_1 < y_2.$$



12.5 Przykłady wyrażeń z pierwiastakami stopnia $n = 3$

Przykład 12.10 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{64}}$$

Rozwiązanie.
Zauważamy, że $81 = 3^3 \ \ i \ \ 64 = 2^6$.
Obliczamy

$$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{3}{4}.$$

Przykład 12.11 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{3} - 4}$$

Rozawiązanie.
Wiadomo, że

$$81 = 3^4, \quad 64 = 2^6$$

Zatem wartość wyrażenia

$$\frac{\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{64}}{3\sqrt[3]{3} - 4} = \frac{\sqrt[3]{3^3} - \sqrt[3]{2^6}}{3\sqrt[3]{3} - 4} = \frac{3\sqrt[3]{3} - 4}{3\sqrt[3]{3} - 4} = 1$$

Przykład 12.12 *Uprość wyrażenie przez rozkład liczby pod pierwiastkiem na czynniki pierwsze*

$$(i)\quad \sqrt[3]{192}, \qquad (ii)\quad \sqrt[3]{648}$$

Rozwiązanie.
(i)

$$\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{3*64} = \sqrt[3]{3*2^6} = \sqrt[3]{3*4^3} = 4\sqrt[3]{3}$$

(ii)

$$\sqrt[3]{648} = \sqrt[3]{8*81} = \sqrt[3]{2^3*3^4} = 2\sqrt[3]{3^3*3} = 2*3\sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3}$$

Przykład 12.13 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{(100-\sqrt[3]{1000})(100+\sqrt[3]{1000})}{\sqrt[3]{1000}}$$

Rozwiązanie.
Zauważamy, że $\sqrt[3]{1000} = 10$ oraz stosujemy wzór na rżnię kwadratów

$$\begin{aligned}
\frac{(100-\sqrt[3]{1000})(100+\sqrt[3]{1000})}{\sqrt[3]{1000}} &= \frac{(100-\sqrt[3]{10^3})(100+\sqrt[3]{10^3})}{10} \\
&= \frac{(100-10)(100+10)}{10} \\
&= \frac{100^2-10^2}{10} = \frac{10000-100}{10} = 990
\end{aligned}$$

12.6 Pierwiastek arytmetyczny stopnia n

Ogólnie, pierwiastek arytmetyczny stopnia n określamy jako operację odwrotną do operacji potęgowania określoną dla liczb rzeczywistych nieujemnych.

Definition 12.5 *Pierwiestkiem arytmetycznym n-tego stopnia z liczby nieujemnej $a \geq 0$ nazywamy liczbę nieujemną $b \geq 0$, która spełnia równość*

$$b^n = a, \qquad n = 2, 3, 4, ...;$$

Pierwiastek arytmetyczny z liczby $a \geq 0$ oznaczamy symbolem

$$b = \sqrt[n]{a}.$$

Niżej podajemey pierwiastki arytmetyczne z niektórych liczb nieujemnych.

Przykład 12.14

$$\begin{array}{lllll}
Dla\ n=2, & a=256, & \sqrt{256}=16, & b=16, & 16^2=256, \\
Dla\ n=3, & a=512, & \sqrt[3]{512}=8, & b=8, & 8^3=512, \\
Dla\ n=4, & a=256, & \sqrt[4]{256}=4, & b=4, & 4^4=256, \\
Dla\ n=5, & a=1024, & \sqrt[5]{1024}=4, & b=4, & 4^5=1024,
\end{array}$$

12.7 Działania na pierwiastkach

Niżej w tabeli podane są wzory operacji na pierwiastkach

$\sqrt[n]{a^n} = a$	$a \geq 0$	$a^{\frac{n}{n}} = a$
$\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$	$a \geq 0$	$b \geq 0$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$a \geq 0$	$b > 0$
$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$	$a \geq 0$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Na przykład

$\sqrt[n]{2^n} = 2$	$a = 2 \geq 0$	$2^{\frac{n}{n}} = 2^1 = 2$
$\sqrt[2]{4 * 9} = \sqrt[2]{4} * \sqrt[2]{9} = 2 * 3 = 6$	$a = 4 \geq 0$	$b = 9 \geq 0$
$\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{5}{4}$	$a = 125 \geq 0$	$b = 64 > 0$
$\sqrt[4]{3^8} = (\sqrt[4]{3})^8$	$a = 3 \geq 0$	$\sqrt[4]{3^8} = 3^{\frac{8}{4}} = 3^2 = 9$

Przykład 12.15 *Obliczamy wartość wyrażenia*

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{4096}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{2^{12}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{12}{2}}} = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2 = 4$$

12.8 Zadania

Zadanie 12.1 *Oblicz wartość wyrażenia przez rozkład liczby pod pierwiastkiem na czynniki pierwsze*

$$(i) \quad \sqrt{300}, \qquad (ii) \quad \sqrt{169}$$

Zadanie 12.2 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{(20 - \sqrt{10})(20 + \sqrt{10})}{\sqrt{3}}$$

Zadanie 12.3 *Oblicz wartość wyrażenia przez rozkład na czynniki pierwsze liczby pod pierwiastekiem*

$$\sqrt{3072}$$

Zadanie 12.4 *Uprość wyrażenie*

$$\frac{\sqrt{160} - \sqrt{90}}{\sqrt{10}}$$

Zadanie 12.5 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{512}}$$

Zadanie 12.6 *Oblicz wartość wyrażenia przez rozkład liczby pod pierwiastkiem na czynniki pierwsze*

$$(i)\quad \sqrt[3]{384}, \qquad (ii)\quad \sqrt[3]{1296}$$

Zadanie 12.7 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{(20-\sqrt[3]{1000})(20+\sqrt[3]{1000})}{\sqrt[3]{1000}}$$

Zadanie 12.8 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3^6}}}{\sqrt[3]{\sqrt{2^6}}}$$

Zadanie 12.9 *Rozwiąż równanie*

$$\sqrt{x+1} = x$$

Zadanie 12.10 *Rozwiąż równanie*

$$\sqrt{2x-1} = 1$$

Zadanie 12.11 *Rozwiąż równanie*

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = 2$$

Chapter 13

Funkcja wykładnicza

Funkcję wykładniczą określamy następującym wzorem:

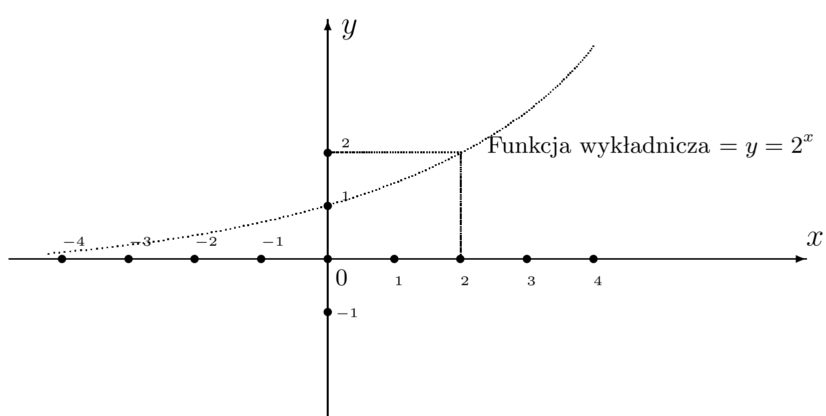
$$y = f(x) = a^x, \qquad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Liczbę rzeczywistą $a > 0, \ a \neq 1$ dodatnią i różną od jeden nazywamy podstawą funkcji wykładniczej. Dziedziną funkcji wykładniczej jest cały zbiór liczb rzczywistych

$$D = \{x \in R: \quad -\infty < x < \infty\}.$$

Zbiorem wartości funkcji wykładniczej jest zbiór liczb dodatnich

$$R_+ = \{y \in R, \ \ 0 < y < \infty\}.$$



Wykres funkcji wykładniczejj, gdy $a = 2 > 1$

Zauważmy z wykresu, że funkcja wykładnicza ma jedną asymptotę, którą jest oś x. To są punkty $(x, 0)$ gdy współrzędna $-\infty < x < \infty$ i współrzędna $y = 0$.

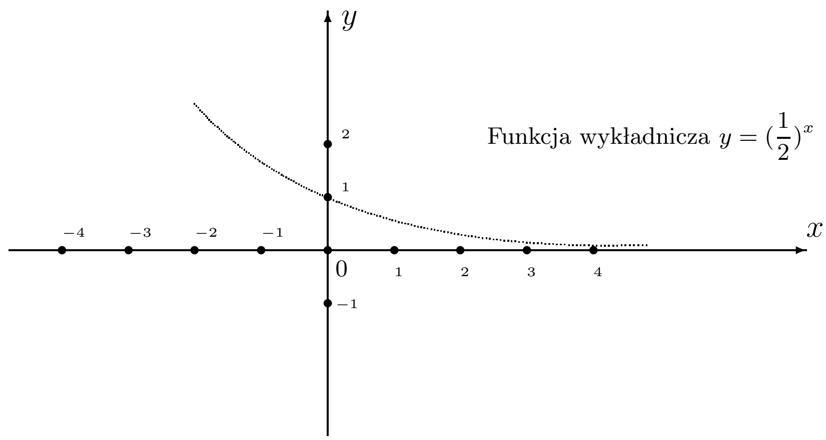
Funkcja wykładnicza

$$y = f(x) = a^x$$

jest rosnąca, jeżeli jej podstawa $a > 1$, natomiast jest malejąca, jeżeli jej podstawa $0 < a < 1$.

Na rysunku funkcja $y = f(x) = 2^x$ jest rosnąca ponieważ jej wykres wzrasta gdy argument x też wzrasta.

Wykres funkcji wykładniczej $y = f(x) = (\frac{1}{2})^x$, gdy jej podstawa 0$<$ $a = \frac{1}{2} < 1$.



Widzimy z powyższego wykresu, że, funkcja wykładnicza

$$y = (\frac{1}{2})^x$$

jest malejąca, jej wartość $(\frac{1}{2})^x$ maleje, podczas gdy jej argument x rośnie.

13.0.1 Własności funkcji wykładniczej

1. Wartość funkcji wykładniczej w zerze, gdy $x = 0$ równa jest jeden.
$$y = f(0) = 1, \qquad ponieważ \quad a^0 = 1,$$
dla każdej podstawy $a > 0$.
2. Wartość funkcji wykładniczej dla $x = 1$ równa jest podstawie a.
$$y = f(1) = a, \qquad ponieważ \quad a^1 = a,$$
3. funkcja wykładnicza $y = f(x)$ od sumy argumentów równa jest iloczynowi wartości
$$f(x + t) = f(x) * f(t)$$
Istotnie sprawdzamy, że
$$f(x + t) = a^{x+t} = a^x * a^t = f(x) * f(t)$$
4. funkcja wykładnicza od różnicy argumentów równa jest ilorazowi wartości
$$f(x - t) = \frac{f(x)}{f(t)}$$

Rzeczywiście sprawdzamy, że

$$f(x-t) = a^{x-t} = a^x * a^{-t} = \frac{a^x}{a^t} = \frac{f(x)}{f(t)}$$

5. funkcja wykładnicza od iloczynu argumentów równa jest potędze

$$f(x*t) = (f(x))^t$$

Sprawdzamy, że

$$f(x*t) = a^{x*t} = (a^x)^t = (f(x))^t$$

6. funkcja wykładnicza od argumentu $\frac{m}{n}$ równa jest pierwiastkowi n-tego stopnia z wartości m-tej potęgi

$$f(\frac{m}{n}) = \sqrt[n]{f(m)}$$

Mianowicie

$$f(\frac{m}{n}) = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{f(m)}$$

Przykład 13.1 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$3^8 * 3^{-5}$$

Rozwiązanie:
W tym przykładzie stosujemy własnoś˙ 2 do funkcji wykładniczej

$$f(x) = a^x$$

gdy podstawa $a = 3$ i argumenty $x = 8$ i $x = -5$. Zatem stosując własność 2, obliczamy

$$f(3) * f(-5) = 3^8 * 3^{-5} = 3^{8-5} = 3^3 = 27$$

Przykład 13.2 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$3^{\frac{5}{2}} * 12^{\frac{1}{2}}$$

Rozwiązanie:
Korzystając z własności funkcji wykładniczej, obliczamy

$$\begin{aligned} 3^{\frac{5}{2}} * 12^{\frac{1}{2}} &= 3^{\frac{5}{2}} * (3*4)^{\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{5}{2}} * 3^{\frac{1}{2}} * 4^{\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}} * \sqrt{4} = 3^2 * 2 = 18. \end{aligned}$$

Zadanie 13.1 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$(i) \quad (3\frac{1}{3})^{-2}, \qquad (ii) \quad 2^{\frac{8}{3}} * 2^{-\frac{5}{3}} * 16^{\frac{1}{2}}$$

Zadanie 13.2 *Rozpatrz funkcję wykładniczą*

$$f(x) = 2^x, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Naszkicuj wykres funkcji wykładniczej

$$y = f(x-1) + 1, \qquad -\infty < x < \infty.$$

w układzie współrzędnych x, y
Oblicz wartość funkcji $f(x-1)+1$ *dla* $x = 3$.

13.0.2 Równania wykładnicze

Równania wykładnicze i nierówności wkładnicze rozwiązujemy korzystają z następujących własności:

- funkcja wykładnicza $f(x) = a^x > 0$ jest dodatnia na całej osi liczbowej dla $-\infty < x < \infty$.
- zbiórem wartości funkcji wykładniczej są wszystkie liczby dodatnie, $R_+ = (0, \infty)$.
- funkcja wykładnicza $f(0) = 0$ dla każdej podstawy $a > 0,\ a \neq 1$
- funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca na całej osi liczbowej $-\infty < x < \infty$, jeżel podstawa $a > 1$.
- funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca na całej osi liczbowej $-\infty < x < \infty$, jeżel podstawa $0 < a < 1$.

Niżej podajemy przykłady rozwiązań równań wykładniczych

Przykład 13.3 *Rozwiąż równanie*

$$2^{2x} - 3 * 2^x + 2 = 0$$

Rozwiązanie. Dziedziną tego równania jest cały zbiór liczb rzczywistych R. Teraz, to równanie napiszemy w postaci

$$(2^x)^2 - 3 * 2^x + 2 = 0$$

Stosując podstawienie $t = 2^x$, otrzymamy równanie kwadratowe

$$t^2 - 3t + 2 = 0, \qquad \Delta = (-3)^2 - 4 * 2 = 1.$$

Oblicczamy pierwiastki tego równania

$$t_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1, \qquad \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2.$$

Wracając do zmiennej x, obliczamy rozawiązanie:
Jeżeli $2^x = 1$, to $x = 0$.
Jeżeli $2^x = 2$, to $x = 1$.

Przykład 13.4 *Rozwiąż równanie*

$$3^{\frac{2x-1}{3x-1}} = 9$$

Rozwiązanie. Dziedziną tego równania jest zbiór liczb rzczywistych różnych od $\frac{1}{3}$. to znaczy $D = r - \{\frac{1}{3}\}$.
Teraz, to równanie napiszemy w postaci

$$3^{\frac{2x-1}{3x-1}} = 3^2$$

Skąd mamy równie

$$\frac{2x-1}{3x-1} = 2,$$

Obliczamy rozwiązanie

$$2x - 1 = 2(3x - 1), \quad 2x - 1 = 6x - 2, \quad 4x = 1, \quad x = \frac{1}{4}$$

Zadanie 13.3 *Rozwiąż równanie*

$$3^x + 27 * 3^{-x} - 12 = 0.$$

Zadanie 13.4 *Rozwiąż równanie*

$$5^{\frac{3x-1}{2x-3}} = 25.$$

Chapter 14

Funkcja logarytmiczna

Funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej. To znaczy, jeżeli funkcja wykładnicza ustala zależność zmiennej y od zmiennej x wzorem

$$y = a^x, \qquad a > 0, \;\; a \neq 1$$

to funkcja odwrotna ustala zależność zmiennej x od zmiennej y wzorem

$$x = log_a\, y, \qquad y > 0.$$

Wtedy stałą $a > 0, \;\; a \neq 1$ lub $0 < a < 1$ nazywamy podstawą logarytmu.
Zatem dziedziną funkcji logarymicznej jest zbiór wartości fynkcji wykładniczej

$$D = \{y : \; 0 < y < \infty\}$$

natomiast zbiorem wartości fnkcji logarytmicznej jest dziedzina funkcji wykładnczej

$$R = \{x : \; 0 < x < \infty\}$$

Na przykład logarytm dziesiętny, gdy $a = 10$ piszemy

$$x = log_{10}\, y, \qquad dla \quad y > 0$$

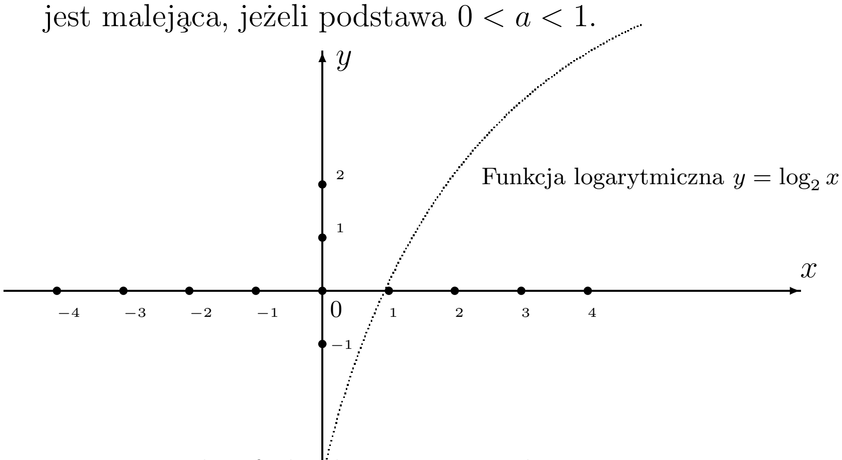
Logarytm dziesiętny jest związany z systemem liczbowym pozycyjnym dziesiętnym standardowym. Bez istotnej zmiany, możemy zamienić role zmiennych x i y. Mianowicie, zmienną niezależną oznaczamy literą x, natomiast zmienną zależną oznaczamy literą y, która zależy od x.

Logarytm dziesiętny, jako standardowy, oznaczamy symbolem

$$y = log\, x, \qquad x > 0,$$

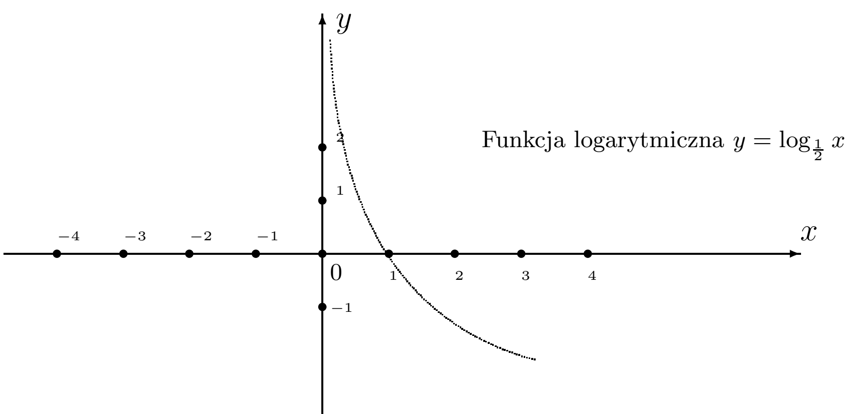
bez pisania podstawy logarytmy 10.

Funkcja logarytmiczna jest rosną dla podstawy większej od jedności $a > 1$, jest malejąca, jeżeli podstawa $0 < a < 1$.



Wykres funkcji logarytmicznej, gdy $a > 1$

Wykres funkcji logarytmicznej malejąca dla podstawy logarytmu $0 < a = \frac{1}{2}$.



Wykres funkcji logarytmicznej, gdy $0 < a = \frac{1}{2} < 1$

14.1 Logarytm naturalny

Logarytme naturalny jest odwrotą funkcją do funkcj potęgowej

$$y = e^x, \qquad lub \qquad y = Exp[x], \qquad -\infty < x < \infty.$$

Tutaj podstawa

$$e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995...;$$

jest liczbą rzeczywistą o nieskończonej ilości cyfr.

14.1.1 Własności funkcji logarytmicznej

1. Wartość funkcji logarytmicznej

$$y = g(x) = \log_a x$$

dla $x = 1$ równa jest zero.

$$g(1) = log_a\ 1 = 0, \quad poniewaz\ \ a^0 = 1, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1.$$

2. Wartość funkcji logarytmicznej

$$y = g(a) = \log_a x$$

dla $x = a$ równa jest jeden.

$$g(a) = log_a = 1, \quad poniewaz\ \ a^1 = a, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1.$$

3. funkcja logarytmiczna od iloczynu argumentów równa jest sumie wartości

$$log_a\ x * t = log_a x + log_a\ t, \ \ x > 0, \ \ t > 0, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1.$$

W symbolach ogólnych tą własność piszemy

$$g(x) = \log_a\ x, \ \ g(x * t) = g(x) + g(t), \ \ x > 0, \ \ t > 0.$$

Istotnie sprawdzamy, że

$$y_1 = log_a\ x, \qquad to \qquad x = a^{y_1}, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1,$$

$$y_2 = log_a\ t, \qquad to \qquad t = a^{y_2}, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1.$$

Skąd znajdujemy

$$\begin{aligned} x * t &= a^{y_1} * a^{y_2} = a^{y_1+y_2}, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1. \\ log_a\ x * t &= \log_a\ a^{y_1+y_2} = y_1 + y_2 = log_a\ x + log_a\ \ t \end{aligned}$$

4. funkcja logarytmiczna od ilorazu argumentów równa jest różnicy wartości

$$log_a\ \frac{x}{t} = log_a\ x - log_a\ t, \ \ x > 0, \ \ t > 0, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1.$$

W symbolach ogólnych tą własność piszemy

$$g(x) = \log_a\ x, \ \ g(\frac{x}{t}) = g(x) - g(t), \ \ x > 0, \ \ t > 0.$$

Istotnie sprawdzamy, że

$$y_1 = log_a\ x, \qquad to \qquad x = a^{y_1}, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1,$$

$$y_2 = log_a\ t, \qquad to \qquad t = a^{y_2}, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1.$$

Skąd znajdujemy

$$\begin{aligned} \frac{x}{t} &= \frac{a^{y_1}}{a^{y_2}} = a^{y_1-y_2}, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1. \\ log_a\ \frac{x}{t} &= \log_a\ a^{y_1-y_2} = y_1 - y_2 = log_a\ x - log_a\ \ t \end{aligned}$$

5. funkcja logarytmiczna od argumentu x^k, $k = 0, 1, 2, , 3, ..., ;$ równa jest iloczynowi wykładnika potęgi k razy logarytm podstawy potęgi x

$$log_a\ x^k = k * log_a x, \quad x > 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

Własność ta bezporednio wynika z własności 2 o logarytmie z iloczynu. Mianowicie

$$log_a\ x^k = \underbrace{\log_a\ x * x * \cdots * x}_{k} = \underbrace{\log_a\ x + \log_a\ x + \cdots + log_a\ x}_{k} = k{*}\log_a\ x$$

6. funkcja logarytmiczna od argumentu $x^{\frac{m}{n}}$ równa jest logarytmowi

$$\log\ x^{\frac{m}{n}} = m * \log\ \sqrt[n]{x}$$

Mianowicie sprawdzamy korzystając z własności funkcji logarytmiczej i wykładniczej

$$\log_a\ x^{\frac{m}{n}} = \underbrace{\log_a\ \sqrt[n]{x} + \log_a\ \sqrt[n]{x} + \cdots + log_a\ \sqrt[n]{x}}_{m} = m * \log_a\ \sqrt[n]{x}.$$

7. Przy założeniach $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$, $b > 0$, możemy zmienić podastawę a logarytmu $log_a\ b$ na podstawę c według wzoru

$$log_a\ b = \frac{log\ _c\ b}{log_c\ a}$$

Dla sprawdzenia tego wzoru wprowadźmy oznaczenia

$$p = \log_a\ b, \quad q = \log_c\ b, \quad r = \log_c\ a$$

Z definicji logarytmu mamy

$$b = a^p, \quad b = c^q, \quad a = c^r$$

Skąd wynika równość

$$\begin{array}{ll} b = (c^r)^p, & b = c^{p*r}, \\ \log_c\ b = p * r \log_c c, & \log_c c = 1, \\ \log_c b = p * r, & \log_c b = \log_a b * \log_c a, \\ \log_a b = \dfrac{log_c b}{\log_c a}, & \end{array}$$

8. W przypadku $c = b$ zamiana podstawy z liczbą logarytminowaną b prowadzi do odwrotności logarytmu

$$log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Rzeczywiście z własności 7, dla $c = b$ mamy

$$log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}, \quad bo \quad \log_b b = 1$$

Przykład 14.1 *Oblicz logarytm*

$$(i) \quad \log_2 64, \qquad (ii) \quad \log_5 125$$

Prosto z definicji logarytmu obliczamy

$$(i) \qquad \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6, \quad bo \quad 2^6 = 64,$$

$$(ii) \qquad \log_5 125 = \log_5 5^5 = 5 \quad bo \quad 5^5 = 125.$$

Przykład 14.2 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i) \quad \frac{\log_3 625}{\log_3 5},$$

$$(ii) \quad \frac{\log_8 5}{\log_2 5},$$

$$(iii) \quad \log_2(\log_2 \sqrt{5}) - \log_2(\log_2 5),$$

Korzystając z własności logarytmów, obliczamy

$$(i) \qquad \frac{\log_3 625}{\log_3 5} = \frac{\log_3 5^4}{\log_3 5} = \frac{4\log_3 5}{\log_3 5} = 4$$

$$(ii) \quad \frac{\log_8 5}{\log_2 5} = \frac{\log_2 5}{\log_2 8 \log_2 5} = \frac{1}{\log_2 2^3} = \frac{1}{3}$$

$$(iii) \quad \log_2(\log_2 \sqrt{5}) - \log_2(\log_2 5) = \log_2 \frac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 5} = \frac{1}{2} * \frac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 \sqrt{5}} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

Przykład 14.3 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i) \quad \log_2(\log_4\ 16),$$

$$(ii) \quad \log_3(\log_5 125).$$

Korzystając z własności logarytmów, obliczamy

$$(i) \quad \log_2(\log_4\ 16) = \log_2 2\log_4 4 = \log_2 2 = 1,$$

$$(ii) \quad \log_3(\log_5 125) = \log_3 \log_5 5^3 = \log_3 3\log_5 5 = \log_3 3 = 1,$$

Zadanie 14.1 *Oblicz logarytm*

$$(i) \quad \log_3 81, \qquad (ii) \quad \log_7 16807$$

Zadanie 14.2 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i) \quad \frac{\log_7 3125}{\log_7 5},$$

$$(ii) \quad \frac{\log_9 8}{\log_3 2},$$

$$(iii) \quad \log_3(\log_3 \sqrt{7}) - \log_3(\log_3 7),$$

Zadanie 14.3 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i) \quad \log_5(\log_5\ 3125),$$

$$(ii) \quad \log_4(\log_3 6561).$$

14.2 Rȯwnania logarytmiczne

Rȯwnanie w ktȯrym niewiadoma występuje pod znakiem logarytmu nazywa się rȯwnaniem logarytmicznym. Rozwiązując rȯwnanie logarytmiczne w pierwszej kolejności należy okre:slić dziedzinę rȯwnania. To jest ten zbiȯr argumentu x dla ktȯrego rȯwnanie logarytmiczne ma sense liczbowy. W dziedzinie rȯwnania logarytmicznego szukamy jego pierwiastaka. Określenie dziedziny rȯwnania jest istotne, ponieważ rozwiązując rȯwnianie orginalne przekształcamy to rȯwnania w rȯwnania o prosztrzej strukturze, ktȯre mogą mieć pierwiastki spoza dziedziny rȯwnania orginalnego, nazywane pierwiastkami obcymi. Metody rozwiązywania rȯwnań logarytmicznych oparte są na własnościach funkcji logarytmicznej i wykładniczej. Niżej na przykładach wyjaśniamy sposoby rozwiązywania rȯwnań logarytmicznych.

Przykład 14.4 *Rozwiąż rȯwnanie*

$$\log_2 x = 4$$

Rozwiązanie:
Najpierw określamy dziedzinę rȯwnania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu x. Zatem dziedziną tego rȯwnania jest zbiȯr $x > 0$. piszemy

$$0 < x < \infty \quad lub \quad x \in (0, \infty).$$

Z definicji logarytmu jako funkcji odwrotnej do funkcji wykładniczej wynika rȯwność

$$x = 2^4 = 16.$$

Sprawdzamy, że rozwiązanie $x = 16 \in (0, \infty)$ należy do dziedziny rȯwnania oraz

$$\log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4, \qquad \log_2 2 = 1.$$

Przykład 14.5 *Rozwiąż rȯwnanie*

$$\log_3(5 - x) + \log_3(5 + x) = 2$$

Rozwiązanie:
Najpierw określamy dziedzinę rȯwnania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu

$$5 - x > 0 \quad i \quad 5 + x > 0.$$

Zatem dziedziną tego równania jest zbiór

$$x < 5 \ \ lub \ \ x > -5.$$

Wtedy piszemy dziedzię tego równania jako odcinek otwarty

$$-5 < x < 5 \ \ lub \ \ \ x \in (-5, 5).$$

Z własności sumy logarytmów wynika równość

$$\log_3(5-x) + \log_3(5+x) = \log_3(5-x)(5+x) = 2.$$

Z definicji logarytmu mamy równość

$$(5-x)(5+x) = 3^2, \quad lub \ \ 25 - x^2 = 9 \ \ lub \ \ x^2 = 16.$$

Obliczamy pierwiastki kwadratowe

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad \sqrt{16} = 4.$$

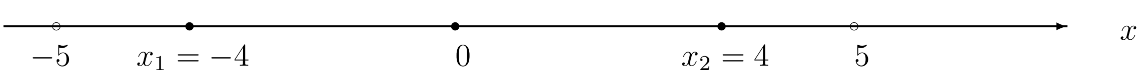
Skąd mamy dwa rozwiązania

$$gdy \quad |x| = 4 \ \ to \quad x_1 = -4 \quad lub \quad x_2 = 4.$$

Sprawdzamy, że rozwiązanie $x_1 = -4 \in (-5, 5)$ i $x_2 = 4 \in (-5, 5)$ należy do dziedziny równania

$$\begin{aligned} \log_3(5+4) + \log_3(5-4) &= \log_3 9 * 1 = \log_3 3^2 = 2 \\ oraz & \\ \log_3(5-4) + \log_3(5+4) &= \log_3 1 * 9 = \log_3 3^2 = 2. \end{aligned}$$

Zauważamy, że oba rozwiązania $x_1 = -4 \in (-5, 5)$ i $x_2 = 4 \in (-5, 5)$ należą do dziedziny tego równania. Zaznaczmy dziedzinę i rozwiązanie na osi liczbowej



Oś liczbowa. Dziedzina równania przedział otwarty $(-5, 5)$

Przykład 14.6 *Rozwiąż równanie*

$$\log_3(x - -2) + \log_3(x-4) = 1$$

Rozwiązanie:
Najpierw określamy dziedzinę równania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu

$$x - 2 > 0 \quad \ i \quad x - 4 > 0.$$

Zatem dziedziną tego równania jest zbiór

$$x > 2 \ \ lub \ \ x > 4.$$

Wtedy piszemy dziedzię tego ròwnania jako odcinek nieskończony lewo stronnie otwarty

$$x > 4 \ \ lub \ \ \ x \in (4, \infty).$$

Z własności sumy logarytmòw wynika ròwność

$$\log_3(x-2) + \log_3(x-4) = \log_3(x-2)(x-4) = 1.$$

Z definicji logarytmu mamy ròwność

$$(x-2)(x-4) = 3^1, \quad lub \ \ x^2 - 6x + 8 = 3 \ \ lub \ \ x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Obliczamy pierwiastki ròwnania:
Wyròżnik ròwnania

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

o współczynnikach $a = 1, = -6, \ c = 5$

$$\Delta = b^2 - 4 * a * c = 6^2 - 4 * 1 * 5 = 36 - 20 = 16.$$

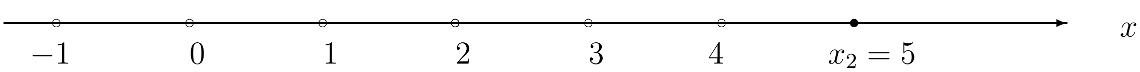
Skąd obliczamy pierwiastki ròwnania

$$x_1 = \frac{1}{2}(6 - \sqrt{16}) = \frac{6-4}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}(6 + \sqrt{16}) = \frac{6+4}{2} = 5.$$

Sprawdzamy, że obcy pierwiastek $x_1 = 1 \notin (4, \infty)$ nie należy do dziedziny ròwnania, natomiast pierwiastek $x_2 = 5 \in (4, \infty)$ należy do dziedziny ròwnania. Zatem sprawdzamy, że drugi pierwiastek $x_2 = 5$ spełnia ròwnanie

$$\log_3(5-2) + \log_3(5-4) \ \ = \ \ \log_3 3 * 1 = \log_3 3 = 1$$

Zauważamy, że tylko pierwiastek $x_2 = 5 \in (4, \infty)$ należy do dziedziny tego ròwnania. Zaznaczmy dziedzinę i rozwiązanie na osi liczbowej



Oś liczbowa. Dziedzina ròwnania przedział otwarty $(4, \infty)$

Przykład 14.7 *Rozwiąż ròwnanie*

$$\log_2(\log_4 \ x) = 1.$$

Rozwiązanie:
Dziedziną tego ròwnania jest zbiòr tych x dla ktòrych

$$\log_4 \ x > 1, \quad x > 4, \quad x \in (4, \infty)$$

Z definicji logarytmu wynika ròwność

$$\log_4 \ x = 2^1, \quad x = 4^2, \quad x = 16$$

Rozwiązanie $x = 16 \in (4, \infty)$ należy do dziedziny. Sprawdzamy, że $x = 16$ spełnia ròwnanie

$$\log_2(\log_4 \ 16) = \log_2(\log_4 4^2) = \log_2(2 \log_4 4) = \log_2 2 = 1$$

14.2.1 Zdania

Zadanie 14.4 *Rozwiąż równanie*

$$\log_4 x = 3$$

Zadanie 14.5 *Rozwiąż równanie*

$$\log_4(1-x) - \log_4(1+x) = 0.$$

Zadanie 14.6 *Rozwiąż równanie*

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-2) = 1$$

Zadanie 14.7 *Rozwiąż równanie*

$$\log_4(\log_8\ x) = 1.$$

Chapter 15

Kombinatoryka

Kombinatoryka obejmuje takie pojęcia jak silnia liczby naturalnej n, permutacje, wariacje bez powtórzeń i wariacje z powtórzeniami, kombinacje.
Niżej podany jest opis tych pojęć z licznymi przykładami i ćwiczeniami.

15.0.2 Silnia liczby naturalnej $n!$

Iloczyn kolejnych liczb naturalnych aż do liczby n włącznie nazywamy silną liczby n i oznaczmy symbolem $n!$. Zatem mamy

$$n! = 1 * 2 * 3 * \cdots * (n-1) * n$$

Przyjmujmy że $0! = 1$
Wypiszmy kilka silni liczb naturalnych

$$\begin{array}{l}
0! = 1 \\
1! = 1 \\
2! = 1 * 2 = 2 \\
3! = 1 * 2 * 3 = 6 \\
4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24 \\
5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120 \\
6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720 \\
7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(n-1)! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * \cdots * (n-1) \\
n! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1) * n
\end{array}$$

15.0.3 Przykłady

Obliczanie silni wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 15.1 *Oblicz wartość ułamka*

$$\frac{5! \ * \ 7!}{4! \ * \ 6!}$$

Rozwiązanie:
Łatwo uprościmy ten ułamek pisząc

$$5! = 4! * 5, \quad 7! = 6! * 7$$

$$\frac{5! \ * \ 7!}{4! \ * \ 6!} = \frac{4! * 5 \ * \ 6! * 7}{4! \ * \ 6!} = 5 * 7 = 42$$

Przykład 15.2 *Oblicz i uprość ułamek*

$$\frac{n!}{(n-1)}!$$

Rozwiązanie:
Łatwo uprościmy ten ułamek pisząc

$$\begin{aligned}
(n-1)! &= 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1) \\
n! &= 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1) * n \\
\frac{n!}{(n-1)!} &= \frac{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1) * n}{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1)} = n
\end{aligned}$$

Zadanie 15.1 *Oblicz wartość ułamka*

$$\frac{3! \ * \ 5! \ * \ 7! \ * 9!}{2! \ * \ 4! \ * \ 6! \ * 8!}$$

Zadanie 15.2 *Uprość ułamek*

$$\frac{2n!}{(2n-3)!}$$

15.0.4 Permutacje

Permutacją elementów zbioru nazywamy ich ustawienie w pewnej kolejności. Dwie permutacje składające się z tych samych elementów są różne, jeżeli różnią się kolejnością elementów.

Na przykład:

Permutacje cyfr liczby dwucyfrowej 23 składają się z tych samych cyfr 2 i 3 tworzą dwie różne permutacje

$$23 \quad 32 \qquad ilosc\, permutacji \quad 2! = 2$$

Zauważmy, że innych permutacji cyfr 2 i 3 nie ma.

Podobnie wypiszmy wszystkie permutacje cyfr liczby trzycyfrowej 257

$$\begin{array}{ll} 257 & 275 \\ 527 & 572 \qquad ilosc\,permutacji \quad 3! = 6 \\ 725 & 752 \end{array}$$

Przykład 15.3 *Wypisz wszystkie permutacje zbioru dwu-elementowego ab*

$$ab \quad ba \qquad ilosc\,permutacji \quad 2! = 2$$

Zauważmy, że innych permutacji liter a i b nie ma.

Podobnie wypiszmy wszystkie permutacje zbioru trzy-elementowego abc

$$\begin{array}{ll} abc & acb \\ bac & bca \qquad ilosc\,permutacji \quad 3! = 6 \\ cab & cba \end{array}$$

Ogólnie, ilość permutacji n-elementowego zbioru równa jest $n!$

Zadanie 15.3 *Wypisz wszystkie permutacje cyfr liczby trzy-cyfrowej* 391

Zadanie 15.4 *Wypisz wszystkie permutacje elementów zbioru cztero-elementowego* $ABCD$

15.0.5 Wariacje

Wariacją k-elementową ze zbioru n-elomentowego ($n \geq k$) nazywamy ciąg k elementów wybranych ze zbioru n-elementowego. Ciąg k-elementowy jest wariacją z powtórzeniami, jeżeli w tym ciągu mogą powtarzać się elementu zbioru z którego tworzone są wariacje. Natomiast k-elementową wariacją bez powtórzeń jest ciąg w którym nie ma powtórzeń elementów zbioru n-elementowego. W wariacjach bez powtórzeń i w wariacjach z powtórzeniami kolejność elementów jest ważne, to znaczy dwie wariacje są różne, jeżeli składają się z tych samych elementów ale różnią sią kolejnością elementów.

15.0.6 Wariacje z powtórzeniami.

Pojęcie wariacji bez powtórzeń lub z powtórzeniami dobrze illustruje proces losowania ze zbioru n-elementowego, który zawiera tylko elementu różne.

Mianowicie, wariacje z powtórzeniami tworzymy w ten sposób, że wylosowany element wrzucamy spowrotem do urny przed losowaniem następnego elementu. Losujemy tak długo aż wylosujemy k-elementów. W ten sposób otrzymamy ciąg k-elementów w którym może być wylosowany ten sam element co najwyżej k-razy.

Podobnie tworzymy k-elementowe wariacje bez powtórzeń z tą różnicą, że wylosowanego elementu nie wrzucamy spowrotem do urny przed losowaniem następnych elementów. W ten sposób otrzymujemy k-elementową wariacje w której wszystkie elementy są różne, to znaczy nie ma elemetów powtórzonych.

Ilość możliwych k- elementowych wariacji z powtórzeniami utworzynych ze zbioru n-elementowego obliczamy ze wzoru

$$V_n^k = n^k$$

15.0.7 Przykłady

Pojęcie wariacji z powtórzaniemi i obliczanie ilości k-elementowych wariacji z powtórzaniami wybranymi ze zbioru n-elementowgo illustrujemy i wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 15.4 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe z powtórzeniami ze zbioru też 2-elementowego. Łatwo znajdujemy

$$\begin{array}{cc} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych utworzonych cyfra 1 i 2 to ilość wariacji z powtórzeniami $V_2^2 = 2^2 = 4$

Przykład 15.5 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe z powtórzeniami ze zbioru 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

$$\begin{array}{ccc} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych utworzonych cyfra 1, 2, 3 to ilość wariacji z powtórzeniami $V_3^2 = 3^2 = 9$

Przykład 15.6 *Wypisz wszystkie liczby trzycyfrowe utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby trzycyfrowe to są wariacje 3-elementowe z powtórzeniami

ze zbioru też 3-elementowego. Łatwo znajdujemy liczby trzycyfrowe

111	122	113
121	122	123
131	132	133
211	212	213
221	122	123
231	132	233
311	312	313
321	322	323
331	332	333

Odpowiedź: Ilość liczb trzycyfrowych utworzonych cyfra 1, 2, 3 to ilość wariacji z powtórzeniami $V_3^3 = 3^3 = 27$

Zadanie 15.5 *Wypisz wszystkie wariacje 2-elementowe z powtórzeniami utworzone ze zbioru 3-elementowego* $\{a, b, c\}$.

Zadanie 15.6 *Wypisz wszystkie wariacje 3-elementowe z powtórzeniami utworzone ze zbioru 3-elementowego* $\{a, b, c\}$.

Zadanie 15.7 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr* $\{2, 5, 7, 9\}$.

15.0.8 Wariacje bez powtórzeń

Wariacja k-elementowa bez powtórzeń to ciąg elementów różnych wybranych ze zbioru n-elementowego $(1 \leq k \leq n)$. Jeżeli $k = n$ to wariacja bez powtórzeń nazywa się permutacją. Liczba wszystkich k-elementowych wariacji bez powtórzeń wybranych ze zbioru n-elementowego określona jest wzorem:

$$W_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1) * (n-k+2) * \cdots * (n-1) * n$$

lub pisząc ilozyn w odwrotnej kolejności jego czynników mamy wzór

$$W_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n * (n-1) * \cdots * (n-k) * (n-k+1).$$

15.0.9 Przykłady

Pojęcie wariacji bez powtórzeń i obliczanie ilości k-elementowych wariacji bez powtórzeń wybranych ze zbioru n-elementowgo illustrujemy i wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 15.7 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe bez powtórzeń wybrane ze zbioru też 2-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

$$12 \quad 21$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 1 i 2 to ilość wariacji bez powtórzeń. W tym przypadku równa jest ilości permutacji $W_2^2 = 2! = 2$

Przykład 15.8 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe bez powtórzeń wybrane ze zbioru 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

$$\begin{array}{cc} 12 & 13 \\ 21 & 23 \\ 31 & 32 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach utworzonych cyfr 1, 2, 3 to ilość wariacji bez powtórzeń

$$W_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6.$$

Przykład 15.9 *Wypisz wszystkie liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby trzycyfrowe to są wariacje 3-elementowe bez powtórzeń wybrane ze ze zbioru też 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach

$$\begin{array}{cc} 123 & 132 \\ 213 & 231 \\ 312 & 321 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 1, 2, 3 to ilość wariacji bez powtórzeń. W tym przykładzie to jest ilość permutacji $W_3^3 = 3! = 6$

Zadanie 15.8 *Wypisz wszystkie wariacje 2-elementowe bez powtórzeń utworzone ze zbioru 3-elementowego* $\{a, b, c\}$.

Zadanie 15.9 *Wypisz wszystkie wariacje 3-elementowe bez powtórzeń utworzone ze zbioru 3-elementowego* $\{a, b, c\}$.

Zadanie 15.10 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr* $\{2, 5, 7, 9\}$.

Zadanie 15.11 *Wypisz wszystkie wariacje bez powtórzeń 2-elementowe wybrane ze zbioru 4-elementowego* $\{a, b, c, d\}$.

15.0.10 Kombinacje

Kombinacją k-elementową wybraną ze zbioru n-elementowego nazywamy k-elementowy podzbiór zbioru n-elementowego. Zatem w kombinacji kolejność elementów nie jest ważna. To znaczy, że dwie kombinacje są różne tylko wtedy gdy różnią się co namniej jednym elementem.

Ilość kombinacji k-elementowych wybrach ze zbioru n-elementowego obliczmy ze wzoru

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

lub stosując symbol Newtona piszemy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zatem ilość kombinacji k-elementowych wybranych ze zbioru n-elementowego równa jest ilości k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego.

15.0.11 Przykłady

Pojęcie kombinacji i obliczanie ilości k-elementowych kombinacji wybranych ze zbioru n-elementowgo illustrujemy i wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 15.10 *Ile można utworzyć par do gry w szachy w klasie liczącej 20 uczniów, żeby każdy uczeń grał tylko raz z każdym wybranym uczniem?*

Rozwiązanie:
Ilość par utworzonych z 20 uczniów równa jest ilości kombinacji 2-elementowych ze zbioru 20-elementowego, gdyż dwie pary są różne tylko wtedy gdy różnią się co najmniej jednym elementem, czyli każda para jest 2-elementowym podzbiorem. Każdy uczeń może dobrać partmera do gry w szachy na $20-1 = 19$ sposobów. Zatem ilość par różnych równa się $\dfrac{19 * 20}{2} = 190$.
Ilość kombinacji 2-elementowych ze zbioru 20-elementowego obliczamy również ze wzoru

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{19 * 20}{2} = 190$$

Przykład 15.11 *W klasie jest 15 uczniów. Na ile sposobów można wybrać*

(i) trzech przedstawicieli

(ii) czterech przedstawicieli

Rozwiązanie (i):
Dwie trójki są różne, jeżeli różnią się co namniej jednym uczniem, kolejność wyboru uczniów do trójki jest nie ważna. Zatem pytanie jest ile można utworzyć 3-elementowych kombinacji ze zbioru 15-elementowego lub ile można

utworzyć 3-elementowych podzbiorów ze zbiroru 15-elementowego ?
Obliczamy ze wzoru:

$$C_{15}^{3} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{13*14*15}{6} = 13*7*5 = 455$$

Odpowiedź: Ilość możliwych przedstawicieli uczniów w grupach po 3 równa jest 455 trójek
Podobne jest rozwiązanie (ii)

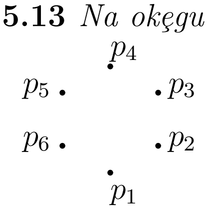
Przykład 15.12 *Ile jest możliwych wyników w grze "Duży Lotek", jeżeli wybieramy* 6 *liczby z* 49 *liczb ?*

Rozwiązanie:
Ilość możliwych wyników równa jest ilości kombinacji 6-elementowych wybranych ze zbioru 49-elementowego.
Zatem obliczamy stosując wzór

$$C_{49}^{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{43*44*45*46*47*48*49}{1*2*3*4*5*6} = 13983816$$

Odpowiedź: W "Dużym Lotku" ilość możliwych wyników równa jest 13983816

Przykład 15.13 *Na okęgu zaznaczono sześć punktów* $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$



Wielokąty o wierzchołkach na okęgu

Ile można narysować różnych wielokątów w tym

(a) trójkątów

(b) czworokątów

(c) pięciokątów

(d) sześciokątów

o wierzchołkach na okręgu w punktach $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$

Rozwiązanie:
Dwa wielokąty są różne, jeżeli różnią się co najmniej jednym wierzchołkiem.
Podobnie dwie kombinacje są różne, jeżeli różnią się co najmniej jednym elementem.
Zatem ilość trójkątów równa jest ilości 3-elemntowych komabinacji wybranych

ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych trójkątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{1*2*3*4*5*6}{1*2*3*1*2*3} = \frac{4*5*6}{1*2*3} = 4*5 = 20.$$

Podobnie ilość czworokątów równa jest ilości 4-elemntowych komabinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych czworokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{1*2*3*4*5*6}{1*2**3*4*1*2} = \frac{5*6}{1*2} = 15.$$

Ilość pięciokątów równa jest ilości 5-elemntowych komabinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych pięciokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^5 = \frac{6!}{5!(6-5)!} = \frac{1*2*3*4*5*6}{1*2*3*4*5*1} = \frac{6}{1} = 6.$$

Ilość sześciokątów równa jest ilości 6-elemntowych komabinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych sześciokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^6 = \frac{6!}{6!(6-6)!} = \frac{1*2*3*4*5*6}{1*2*3*4*5*6*0!} = 1, \quad gdyz \quad 0! = 1.$$

Chapter 16

Statystyka opisowa

Pierwszym i ważnym etapem opracowań statystycznych jest zbieranie i prezetacja danych. Najważniejsze dane statystyczne podawane są w każdym roku przez Główny Urząd Statystyczny (GUS) z siedzibą w Warszawie. Dotyczą one informacji o ludności w Polsce, dane o wzorście w przemysłe i rolnictwie, w ekonowmi i finansach. Te dane stanowią ważną informację dla planowania i administracji państwa. Oprócz tego dane statystyczne zbierane są w ankietach z pytaniami o szczególnym znaczeniu. Na przykład w sondażach i prognozach w wyborach do sejmu i w ważnych decyzjach administrcji w których głos społeczeństwa ma istotne znaczenie. Zebrane dane statystyczne przedstawiamy w tabelach i ilustrujemy na diagramach. Stosowane są różne formy diagramów. Najbardziej powszechne diagramy są w formie słupków lub koła z zaznaczeniem kolorów lub danych liczbowych lub w procentach. Zatem diagramy są prostym i ważnym sposobem prezetacji danych statystycznych.

16.1 Przykłady danych statystycznych i diagramów

Dane statystyczne zapisujemy w tablicach z opisem ich znaczenia i wartości liczbowych.

Przykład 16.1 *W zespole szkół było Przedszkole, Szkoła Podstawowa, Gimnazjum i Liceum. W poniżeszej tabeli zebrano informacje dotyczące liczby uczniów*

Rodzaj Szkoły	Liczba dziewcząt	Liczba chłopców	RAZEM
Przedszkole (PSz)	150	250	400
Szkoła Podstawowa (SzP)	220	210	430
Gimnazjum (Gim)	160	140	300
Liceum (Lic)	110	90	190

W niżej podanych diagramach w formie słupków i koła podane są wykresy dziewcząt, chłopców i razem uczniów w Przedszlu (Psz), w Szkole Podsta-

wowej (szP), w Gimnazjum (Gim(i w Liceuam (Lic).
Legenda: Dziewczęta słupek pierwszy, chłopcy słupek drugi i liczba uczniów raze słupek trzeci. Wykresy są powtórzone dla każdej z czterech szkoł. Legenda: Dziewczęta koło pierwsze, chłopcy koło drugie i liczba uczniów raze koło trzecie. Wykresy są powtórzone dla każdej z czterech szkoł.

16.2 Wartość średnia i mediana

Ważnymi parametrami danych statystycznych są wartość średnia i mediana. **Wartość Średnia Arytmetyczna**. Wartością średnią arytmetyczną danych n liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ nazywamy liczbę

$$\text{Srednia Arytmetyczna} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Wartość Średnia Arytmetyczna Ważona. Bardziej ogólnym pojęciem średniej jest pojęcie średniej arytmetycznej ważonej. Mianowicie, niech wagami bedą liczby dodatnie $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ takie, że suma

$$\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n = 1, \quad \rho_i > 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Wtedy średnią ważoną nazywamy następującą sumę iloczynów

$$\text{Srednia Arytmetyczna Wazona} = \rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \cdots + \rho_n a_n$$

Istotnie, w przypadku szczególnym, gdy wagi są równe

$$\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_n = \frac{1}{n}$$

wtedy średnia arytmytyczna ważona jest poprostu średnią arytmetyczną.

Mediana. Dla danych statystycznych znajdujemy ich mediane to znaczy wartość, która leży w środku danych. Mianowicie, w pierwszej kolejności sortujemy dane porządkując je od najmiejszej do największej lub od największej do najmieszej. Wtedy liczba, która leży w równej odległości od począdku i od końca uporządkowanych danych nazywa się mmedianą. Może zdażyć się że nie ma takiej jednej liczby, natomiast są dwie liczby obok siebie, które leżą w tej samaej odległości pierwsza od począdku a druga od końca. Wtedy medianą jest ich średnia arytmetyczna.
Niżej, wyjaśniamy to na przykładach.

Przykład 16.2 *Rozpatrzmy następujące dane:*

$$(i) \quad 2, 1, 6, 8, 3, 2, 10, 12, 11$$

$$(ii) \quad 9, 4, 2, 7, 5, 1, 3, 10, 15, 17, 16$$

Rozwiązanie (i). Dane $2, 1, 5, 8, 3, 2, 10, 12, 11$ porządkujemy w kierunku rosnącym od najmieszej do największej
o]wnym

$$1, 2, 2, 3, 6, 8, 10, 11, 12$$

Zauważamy, że liczba 6 jest odległa od początku o cztery pozycje i od końca również o cztery pozycje. Zatem liczba 6 jest medianą danych (i).
Rozwiązanie (ii). Dane $0, -1, 9, 4, 2, 7, 5, 1, 3, 10, 15, 17, 16$ porządkujemy w kierunku rosnącym od najmieszej do największej

$$-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 15, 16, 17$$

Zauważamy, że liczba 4 jest odległa od początku o pięć pozycji, a liczba 5 jest odległa od końca również o pięć pozycji. Zatem mamy dwie liczby w środku danych 4 i 5. Wtedy medianą jest ich średnia arytmetyczna, to znaczy $\dfrac{4+5}{2} = 4.5$. OdpowiedĆ: medianą danych (ii) jest liczba 4.5

16.2.1 Korelacja danych statystycznych

Rozpatrzmy dwa ciągi danych

$$a = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \qquad b = \{b_1, b_2, ..., b_n\},$$

o tej samej liczbie elementów n.

Definition 16.1 *Correlacją danych statystycznych*

$$a = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \qquad b = \{b_1, b_2, ..., b_n\},$$

nazywamy następujący iloraz:

$$Cor(a, b) = \frac{a_1\ b_1 + a_2\ b_2 + \cdots + a_n\ b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}},$$

Dane statystyczne zapisujemy również w ich unormowanej formie. Mianowicie, niech

$$\begin{aligned} \hat{a} = \{\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_n\} &= \frac{\{a_1, a_2, ..., a_n\}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}, \\ \hat{b} = \{\hat{b}_1, \hat{b}_2, ..., \hat{b}_n\} &= \frac{\{b_1, b_2, ..., b_n\}}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}}, \end{aligned} \tag{16.1}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1 &= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}, \quad \hat{b}_1 = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}}, \\
\hat{a}_2 &= \frac{a_1}{\sqrt{a_2^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}, \quad \hat{b}_2 = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\hat{a}_n &= \frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}, \quad \hat{b}_n = \frac{b_n}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}}
\end{aligned}$$

Zauważamy, że dane statystyczne (16.1) w unormowanej formie spełniają następujące warunki:

$$\hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^2 + \cdots + \hat{a}_n^2 = 1, ; \quad \hat{b}_1^2 + \hat{b}_2^2 + \cdots + \hat{b}_n^2 = 1$$

Wtedy korelacja pomiędzy danymi a i b oraz korelacja pomiędzy danymi unormowanymi $\hat{a}$ i $\hat{b}$ jest ta sama i określana jak następuje:

Definition 16.2 *Correlacją danych statystycznych*

$$a = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \qquad b = \{b_1, b_2, ..., b_n\},$$

lub

$$\hat{a} = \{\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_n\}, \qquad \hat{b} = \{\hat{b}_1, \hat{b}_2, ..., \hat{b}_n\}$$

nazywamy sumę następujących iloczynów:

$$Cor(a, b) = Cor(\hat{a}\ \hat{b}) = \hat{a}_1\ \hat{b}_1 + \hat{a}_2\ \hat{b}_2 + \cdots + \hat{a}_n\ \hat{b}_n,$$

Przykład 16.3 *Oblicz correlację pomiędzy danymi*

$$a = \{2, 1, 5, 8\}, \qquad b = \{4, 3, 9, 3\}$$

Rozwiązanie. Podstawiając do wzoru dane

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 8,$$

$$b_1 = 4, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 9, \quad b_4 = 3$$

obliczamy współczynnik correlacji

$$\begin{aligned}
Cor(a, b) &= \frac{a_1\ b_1 + a_2\ b_2 + \cdots + a_n\ b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}}, \\
&= \frac{2 * 4 + 1 * 3 + 5 * 9 + 8 * 3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2 + 8^2}\sqrt{4^2 + 3^2 + 9^2 + 3^2}} = 0.769444,
\end{aligned}$$

16.3 Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancja σ^2 danych statystycznych

$$a = \{a_1, a_2, ..., a_n\},$$

związana jest z ich średnią arytmetyczną

$$s = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

następującym wzorem:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - s)^2 + (a_2 - s)^2 + \cdots + (a_n - s)^2}{n}$$

Czytamy sigma.
Odchylenie Standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Przykład 16.4 *Oblicz wariancje i odchylenie standardowe następujących danych:*

$$(i) \quad a = \{3, -1, 8, 4\}, \qquad (ii) \quad b = \{12, 4, 8, 6\}.$$

Rozwiązanie (i). Rozwiązanie jest prostym i bezpośrednim podstawieniem danych do wzorów. Najpierw obliczamy wartość średnią

$$s = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{3 - 1 + 8 + 4}{4} = 3.5$$

następnie obliczamy wariancję

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(a_1 - s)^2 + (a_2 - s)^2 + \cdots + (a_n - s)^2}{n} \\ &= \frac{(3 - 3.5)^2 + (-1 - 3.5)^2 + (8 - 3.5)^2 + (4 - 3.5)}{4} = 10.31 \end{aligned}$$

oraz odchylenie standardowe

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{10.31} = 3.21131$$

Rozwiązanie (ii). Podobnie rozwiązanie przykładu (ii) jest prostym i bezpośrednim podstawieniem danych do wzorów. Najpierw obliczamy wartość średnią

$$s = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{12 + 4 + 8 + 6}{4} = \frac{30}{4} = 7.5$$

następnie obliczamy wariancję

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(a_1 - s)^2 + (a_2 - s)^2 + \cdots + (a_n - s)^2}{n} \\ &= \frac{(12 - 7.5)^2 + (4 - 7.5)^2 + (8 - 7.5)^2 + (6 - 7.5)^2}{4} = 8.75 \end{aligned}$$

oraz chylenie standardowe

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{10.31} = 2.95804$$

Chapter 17

Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa

17.1 Wstęp

Podstawy rachunku prawdopodobieństwa stworzyli Pascal (1623-1662 n.e.) i
Fermat (1601-1665 n.e.) w połowie XVII-go wieku. W wiekach XVIII i XIX ważnym odkryciem było prawo wielkich liczb J. Bernoulliego i prace A. Moivre, P. Laplasa i S. Poissona. Czebyszewa, Browna i Kołmogorowa.
Rachunek prawdopodobieństwa zajmuje się badaniem praw rządzących zjawiskami losowymi (przypadkowymi), to jest takimi zjawiskami, których przebiegu czy wyniku nie można jednoznacznie przewidzieć. Dzieje się tak dlatego, że na przebieg zjawiska losowego wpływ ma na ogół wiele przyczyn, z których jedynie część udaje się kontrolować.
Wyniki zjawisk (doświadczeń) losowych nazywamy zdarzeniami losowymi.
Jeżeli doświadczenie losowe powtórzymy n razy i przy tym w tych n doświadczeniach dokładnie k razy zaobserwujemy wynik A (zdarzenie losowe A), to liczbę

$$\frac{k}{n}$$

nazywamy częstością zdarzenia losowego A w serii n doświadczeń.

W zjawiskach masowych częstości występowania każedego zdarzenia losowego mają tą własność, że wraz ze wrostem liczby n, te częstości "stabilizują się" coraz bardziej "blisko" pewnej liczby charakterystycznej dla tego zdarzenia.
Ogólnie w doświadczeniach powtarzanych w tych samych warunkach dla każdego doświadczenia, liczba "charakterystyczna" jest bliska połowie liczby doświadczeń
Wtedy częstości

$$\frac{k_n}{n} \to \frac{1}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots ;$$

dążą do $\frac{1}{2}$, gdy liczba doświadczeń $n \to \infty$ dąży do nieskoćzoności.

Przykład 17.1 *Na przykład rzucając symetryczną monetą* $n = 100,\ 200$ *lub więcej razy zaobserwujemy około połowę reszek i około połowę orłów.*

Niżej podane wyniki w 100 i 200 rzutach monetą wskazują na stabilizację częstości "blisko" $\frac{1}{2}$ dla ilości doświadczeń $n \geq 200$.

$$Tablica \qquad (17.1)$$

Liczba rzutow n	*Ilosc reszek* k	*ilosc orlow* $n-k$	*czestosc reszek* $\frac{k}{n}$	*czestosc orla* $\frac{n-k}{n}$
100	61	39	0.39	0.61
200	102	98	0.51	0.49

17.2 Zdarzenia elementarne

W kadym doświadczeniu losowym możemy wyróżnić najprostrze wyniki zwane zdarzeniami elementarnymi.
Zbiór zdarzeń elementarnych oznaczamy literą Ω.

Przykład 17.2 *Rzucając monetą, możliwe są dwa wyniki reszka lub orzeł, innych możliwości nie ma. Zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$$

złożony z dwóch zdarzeń elementarnych ω_1, ω_2, *gdzie zdarzenie elementarne* ω_1 *zachodzi, gdy w rzucie monetą pojawi się reszka, zdarzenie elementarne* ω_2 *zachodzi, gdy pojawi się orzeł.*

Prawdopodobieństwo to jest liczba wokół, której stabilizuje się częstość, gdy ilość doświadczeń losowych zmiarza do niskończoności

Niżej stabilizacje częstości wokół liczby prawdopodobieństwa wstępnie opiszemy na wzorcowych przykładach.

Rut monetą. Zaczynamy od najprostrzego doświadczenie rzutu monetą. Rzucając monetą, możliwe są dwa wyniki reszka lub orzeł, innych możliwości nie ma.

Pytamy, jakie szanse mamy, żeby pojawiła się reszka ?

Z dwóch możliwych wyników reszka, orzeł, jeden jest dla reszki i jeden jest dla orła. Zatem szansa pojawienia się reszki równa jest $\dfrac{1}{2}$ oraz pojawienia się orła również równa jest $\dfrac{1}{2}$.

Jeżeli wynik pojawienia się reszki oznaczymy literą A, a wynik pojawienia się orła literą B to prawdopodobieństwo pojawienia się reszki oznaczamy symbolem $P(A)$, a prawdopodobieństwo pojawienia się orła symbolem $P(B)$.
Wtedy piszemy

$$P(A) = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

Prawdopodobieństwo $\dfrac{1}{2}$ oznacza, że w dużej ilości rzutów oczekujemy połowę reszek i połowę orłów.

Przykład 17.3 *Policz ile razy pojawi się reszka i ile razy pojawi się orzeł w 10-ciu rutach monetą.*

Załóżmy, że reszka pojawiła się za pierwszym, piątym, ósmym i dziesiątym rzutem, razem 4 razy, natomiast orzeł pojawił się 6 razy.
Zdarzenie pojawienia się reszki oznaczamy literą A, zdarzenie pojawienia się orła oznaczamy literą B.
Obliczamy częstość pojawienia się reszki

$$Czestosc(A) = \frac{4\ zdarzenia\ sprzyjajace}{10\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Podobnie obliczamy częstość pojawienia się orła jako stosunek 6-ciu zdarzeń sprzyjających do wszystkich 10-ciu zdarzeń możliwych

$$Czestosc(B) = \frac{6\ zdarzen\ sprzyjajacych}{10\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Przykład 17.4 *W klasie było 20 uczniów. Każdy uczeń rzucił symetryczną monetą 50 razy. Niżej w tablicy 17.2 podane są częstości wypadnięcia reszki w 100 i 1000 rzutów.*

Tablica (17.2)

Liczba rzutow n	*Ilosc reszek* k	*ilosc orlow* $n-k$	*czestosc reszek* $\frac{k}{n}$	*czestosc orla* $\frac{n-k}{n}$
100	54	46	0.54	
1000	517	483	0.517	

Widzimy, że częstość pojawienia się reszki na 100 rzutów monetą równa jest 0.54, natomiast na 1000 rzutów równa jest 0.517. Częstość 0.517 na 1000 rzutów bliższa jest liczbie charakterystyczne równej 0.5 niż częstość 0.54 na 100 rzutów monetą w tym przykładzie.
Ta zaobserwowana prawidłowość polegająca na tym, że częstość zajścia zdarzenia losowego jest "stabilna" około jakiejś stałej wartości, gdy ilość powtórzeń doświadczenia losowego jest duża, leży u podstaw pojęcia prawdopodobieństwa.

Niżej wyjaśnimy jeszcze takie pojęcia jak

- zdarzenia rozłączne - wykluczające
- zdarzenie pewne
- zdarzenie niemożliwe
- prawdopodobieństwo zdarzeń

Dalej oznaczmy literą A zdarzenie pojawienia się reszki, literą B zdarzenia pojawienia się orła w rzucie monetą.
Zdarzenia A i B są rozłączne-wykluczające się, ponieważ zajście zdarzenia A wyklucza zajście zdarzenia B.

Sumę-alternatywę zdarzeń A *lub* B, piszemy

$$A \cup B$$

Obliczamy częstość alternatywy zdarzeń rozłącznych

$$Czestosc(A \cup B) = Czestosc(A) + Czestosc(B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

Częstość alternatywy zdarzeń rozłącznych A i B równa jest sumie częstości zdarzenia A i zdarzenia B.

Podobnie obliczamy prawdopodobieństwo alternatywy zdarzeń rozłącznych.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Prawdopodobieństwo alternatywy zdarzeń rozłącznych A i B równa jest sumie prawdopodobieństwa zdarzenia A i zdarzenia B.

W rzucie monetą pojawienie się reszki lub orła jest zadarzeniem pewnym, którego prawdopodobieństwo równe jest 1.

Natomiast zdarzenie, że w rzucie monetą nie pojawi się ani reszka ani orzeł jest zdarzeniem niemożliwym.

Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego równe jest 0

Przykład 17.5 *Rozpatrzmy doświadczenie rzutu kostką o kształcie sześcianu foremnego, na którego ścianach są oczka od 1 do 6.*

W doświadczeniu rzutu kostką odczytujemy ilość oczek na kostce. Możliwy jest jeden z sześciu odczytów

$$1\ oczko,\ 2\ oczka,\ 3\ oczka,\ 4\ oczka,\ 5\ oczek\ i\ 6\ oczek$$

następujących zdarzeń elementarnych

zdarzenia ω_1, gdy pojawi się 1 oczko
zdarzenie ω_2, gdy pojawi się 2 oczka
zdarzenie ω_3, gdy pojawi się 3 oczka
zdarzenie ω_4, gdy pojawi się 4 oczka
zdarzenie ω_5, gdy pojawi się 5 oczek
zdarzenie ω_6, gdy pojawi się 6 oczek

Zatem w jednym rzucie kostką jest 6 możliwych wyników

$$1\ oczko,\ 2\ oczka,\ 3\ oczka,\ 4\ oczka,\ 5\ oczek,\ 6\ oczek$$

Szansa pojawienie się każdej ilości oczek jest taka sama w stosunku do 6 wyników możliwych. To prawdopodobieństwo równe $\frac{1}{6}$, piszemy

$$P(\omega_1) = \frac{1}{6}, \qquad P(\omega_2) = \frac{1}{6}$$
$$P(\omega_3) = \frac{1}{6}, \qquad P(\omega_4) = \frac{1}{6}$$
$$P(\omega_5) = \frac{1}{6}, \qquad P(\omega_6) = \frac{1}{6}$$

Załóżmy, że wykonano $N = 100$ rzutów kostką i zapisano liczbę oczek

Zdarzenie ω_1 pojawiło się 17 razy, to znaczy 1 oczko pojawiło się 17 razy
Zdarzenie ω_2 pojawiło się 16 razy, to znaczy 2 oczka pojawiło się 16 razy
Zdarzenie ω_3 pojawiło się 17 razy, to znaczy 3 oczka pojawiło się 17 razy
Zdarzenie ω_4 pojawiło się 18 razy, to znaczy 4 oczka pojawiło się 18 razy
Zdarzenie ω_5 pojawiło się 15 razy, to zmaczy 5 oczek pojawiło się 15 razy
Zdarzenie ω_6 pojawiło się 17 razy, to znaczy 6 oczek pojawiło się 17 razy

W tym doświadczeniu częstością pojawienia się jednego z sześciu wyników są następujące ilorazy:

$$Czestosc(\omega_1) = \frac{17\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{17}{100} = 0.17$$
$$Czestosc(\omega_2) = \frac{16\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{16}{100} = 0.16$$
$$Czestosc(\omega_3) = \frac{17\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{17}{100} = 0.17$$
$$Czestosc(\omega_4) = \frac{18\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{18}{100} = 0.18$$
$$Czestosc(\omega_5) = \frac{15\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{15}{100} = 0.15$$
$$Czestosc(\omega_6) = \frac{17\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{17}{100} = 0.16$$

Zbiór

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych rozłącznych - wykluczających.

Dlatego alternatywa zdarzeń elementarnych

$$A = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6$$

jest zdarzeniem pewnym.
Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego A równe jest 1, piszemy

$$P(A) = P(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6) = 1$$

Również częstość zdarzenia pewnego równa jest 1, ponieważ równa jest sumie częstości elementarnych

$$Czestosc(\omega) = \frac{17}{100} + \frac{16}{100} + \frac{17}{100} + \frac{18}{100} + \frac{15}{100} + \frac{17}{100} = 1$$

17.3 Zdarzenia jednakowo prawdopodobne

W powyższych doświadczeniach rozpatrywaliśmy zdarzenia losowe jednakowo prawdopodobne. W rzucie monetą pojawienie się orła lub reszki zachodzi z równym prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. W rzucie kostką prawdopodobieństwo pojawienia się

$$1\ oczka,\ 2\ oczek,\ 3\ oczek,\ 4\ oczek,\ 5\ oczek,\ 6\ oczek$$

jest to samo i równe $\frac{1}{6}$.

Niżej podajemy definicje Laplace'a prawdopodobieństwa dla N zdarzeń losowych równoprawdopodobnych

Definition 17.1 *Jeżeli dla danego doświadczenia losowego, zbiór zdarzeń elementarnych składa się z N zdarzeń równoprawdopodobnych, to prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A równe jest*

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

gdzie n jest ilością zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A.

Rozpatrzymy następujący przykład:

Przykład 17.6 *Z talii 52 karty wyciągnięto losowo jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo $P(A)$ następujących zdarzeń:*

(i) Zdareznie A polega na wyciągnięciu asa.

(ii) Zdareznie A polega na wyciągnięciu pika.

(iii) Zdareznie A polega na wyciągnięciu kiera l lub trefla.

Rozwiązanie (i). Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z $N = 52$ zdarzeń równoprawdopodobnych. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia każdej karty jest to samo i równe $\frac{1}{52}$.
Ponieważ w talii są 4 asy, dlatego liczba zdarzeń sprzyjających wyciągnięcia asa jest $n = 4$. Zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcie asa jest równe

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

.
Rozwiązanie (ii). Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z $N = 52$ zdarzeń równoprawdopodobnych, Prawdopodobieńst wyciągnięcia każdej karty jest to samo i równe $\frac{1}{52}$.
Ponieważ w talii jest 13 pików, dlatego liczba zdarzeń sprzyjających wyciągnięcia pika jest $n = 13$. Zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcia pika jest równe

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

.
Rozwiązanie (iii). Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z $N = 52$ zdarzeń równoprawdopodobnych. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia każdej karty jest to samo i równe $\frac{1}{52}$.
Ponieważ w talii jest 13 kierów i 13 trefli, dlatego liczba zdarzeń sprzyjających wyciągnięcia kiera lub trefla jest

$$n = 13 + 13 = 26$$

Zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcie kiera lub trefla jest równe

$$P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

.
Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład zdarzeń losowych.

Przykład 17.7 *Na liście w szkole jest 250 dziewcząt i 200 chłopców. Wybrano z listy losowo jedno nazwisko. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A, że to jest*
(a) dziewczynka, (b) chłopiec.

Rozwiązanie (a). Razem na liście jest $250+200=450$ uczniów. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_{450}\}$$

składa się z jest $N=450$, zdarzeń. Kaḋe z tych zdarzeń elementarnych $\omega_i,\ i=1,2,3,\cdots,450$ polega na wylosowaniu z listy 450 uczniòw jedno nazwisko.
Liczba zdarzeń sprzyjających, że to jest dziewczynka równa się $n=250$. Prawdopodobieństwo, że to jest dziewczynka

$$P(A) = \frac{250}{450} = \frac{5}{9}$$

Rozwiązanie (b). Podobnie obliczamy prawdopodobieństwo wybrania z listy nazwiska chłopca. Razem na liście jest $250+200=450$ uczniów. Zbiòr wszstkich zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_{450}\}$$

składa się z jest $N=450$, zdarzeń elementarnych. Kaḋe z tych zdarzeń elementarnych $\omega_1,\ i=1,2,3,\cdots,450$ polega na wylosowaniu z listy 450 uczniòw jedno nazwisko.
Liczba zdarzeń sprzyjających, że to jest chłopiec równa się $n=200$. Prawdopodobieństwo, że to jest chłopiec

$$P(A) = \frac{200}{450} = \frac{4}{9}$$

17.4 Zdarzenia losowe złożone

Alternatywa, koniukcja i różnica zdarzeń losowych jest zdarzeniem losowym złożonym.
Zatem, wykonując te operacje na zbiorze zdarzeń elementarnych, otrzymujemy zdarzenia losowe złożone.
Na przykład, w doświadczeniu z rzutem kostką zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych jest zbiór

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

W tym zbiorze Ω wyróżniamy następujące podzbiory jako zdarzenia złożone:

- Zdarzenie pewne określone przez zbiór

  $$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

  wszystkich zdarzeń elementarnych, ktòrego pradopodobieństwo $P(\Omega)=1$, ponieważ każde ze zdarzeń elementarnych

  $$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6$$

  sprzyja zdarzeniu pewnemu Ω.
  Przawdopodobieństwo każdego z tych zdarzeń elemntarnych

  $$P(\omega_i) = \frac{1}{6}. \qquad i =, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- oczekiwany wynik zdarzenia A to parzysta ilość oczek. To zdarzenie losowe zachodzi, jeżeli zdarzy się ω_2 lub ω_4 lub ω_6. To znaczy, gdy prawdziwa jest alternatywa

  $$\omega_2 \cup \omega_4 \cup \omega_6$$

Zatem zdarzenie A jest określone przez podzbiór

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$$

zbioru Ω wszystkich zdarzeń elementarnych. Zdarzenia elementarne $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ sprzyjają zajściu zdarzenia A.
Prawdopodobieństwo tego zdarzenia

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- oczekiwany wynik zdarzenia A to ilość oczek mniejsza niż 3.

  To zdarzenie losowe zachodzi, jeżeli wynik rzutu kostką jest jedno oczko lub dwa oczka, gdy prawdziwa jest alternatywa

  $$\omega_1 \cup \omega_2$$

  Zatem zdarzenie A jest określone przez podzbiór

  $$A = \{\omega_1, \omega_2\} \subset \Omega$$

  Zdarzenia elementarne ω_1, ω_2 sprzyjają zdarzeniu A
  Prawdopodobieństwo zajścia tego zdarzenia

  $$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- oczekiwany wynik zdarzenia A to ilość oczek większa od 3. To zdarzenie losowe zachodzi, jeżeli zdarzy się ω_4 lub ω_5 lub ω_6, gdy pradziwa jest alternatywa $\omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6$.
  Zatem zdarzenie A jest określone przez podzbiór

  $$A = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \subset \Omega$$

  zbioru Ω wszystkich zdarzeń elementarnych. Każde ze zdarzeń $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ sprzyja zdarzeniu A
  Prawdopodobieństwo tego zdarzenia

  $$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

17.5 Operacje na zdarzeniach losowych

Podstawową relacją w zbiorach jest ralacja przynależności elementu do zbioru.
Relację, że element x należy do zbioru Ω, piszemy $x \in \Omega$. Również relację, że x nie jest elementem zbioru Ω, piszemy $x \notin \Omega$.
Zdarzenia losowe rozumiemy jako podzbiory zbioru zdarzeń elementarnych. Operacje na zbiorach takie jak suma, iloczyn i różnica zbiorów odnoszą się również do działań na zdarzeniach losowych, ponieważ są to działania na podzbiorach zbioru zdarzeń elentarnych.

17.6 Zdarzenie przeciwne

Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A oznaczamy symbolem $A^{'}$. Zdarzenie przeciwne $A^{'}$ zachodzi, jeżeli nie zaszło zdarzenie losowe A.

Na przykład, niech zdarzenie A polega na uzyskaniu parzystej liczby oczek w rzucie kostką. Wtedy

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$$

jest podzbiörem zbioru zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \qquad A \subset \Omega$$

Zdarzenie przeciwne A' zachodzi, jeżeli pojawi się nieparzysta liczba oczek

$$A^{'} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$$

Podzbiör $A^{'}$ jest röwnież podzbiorem zbioru zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \qquad A^{'} \subset \Omega$$

Zauważmy, że zdarzenie przeciwne röwne jest röżnicy zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

i wydarzenia A
Zatem mamy

$$A^{'} = \Omega - A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} - \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$$

17.7 Alternatywa zdarzeń

Alterternetywą zdarzeń losowych A i B jest zdarzenie

$$C = A \cup B$$

które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A lub zachodzi zdarzenie B.
Na przykład: *niech zdarzeniem A będzie liczba oczek na kostce większa od 5, natomiast zdarzeniem B niech będzie liczba oczek mniejsza od 2.*
Jasne, że zdarzenie

$$A = \omega_6$$

natomiast zdarzenie

$$B = \omega_1$$

Alternatywą tych zdarzeń jest podzbiór

$$C = A \cup B = \{\omega_1, \omega_6\}$$

zbioru zdarzeń elementarnych Ω. Piszemy

$$C = A \cup B \subset \Omega$$

17.8 Koniukcja zdarzeń

Koniukcją zdarzeń losowych A i B jest zdarzenie

$$D = A \cap B,$$

które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A i jednocześnie zachodzi zdarzenie B.

Na przykład, niech zdarzeniem A będzie liczba oczek większa od 3, zdarzeniem B niech będzie liczba oczek mniejsza od 5.
Jasne, że zdarzenie A określa podzbiór

$$A = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \subset \Omega,$$

oraz zdarzeniem B określa podzbiór

$$B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \subset \Omega$$

Koniukcja $A \cap B$ jest zdarzeniem

$$D = A \cap B = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \cap \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{\omega_4\}$$

które składa się z tych samych zdarzeń elmentarnych równocześnie należących do A i do B.

17.9 Zdarzenia rozłączne

Zdarzenia A i B wyłączają się, jeżeli ich koniukcja jest zbiorem pustym. To znaczy $A \cap B = \emptyset$.
Niech na przykład, w doświadczeniu rzutem kostką, niech zdarzenie

$$A = \{\omega_1, \omega_6\}$$

oznacza pojawienie się jednego oczka lub sześciu oczek, natomiast zdarzenie

$$B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$$

oznacza pojawienie się trzech oczek lub czterech oczek lub pięciu oczek.
Te zdarzenia są rozłączne, gdyż ich koniukcja

$$A \cap B = \{\omega_1, \omega_6\} \cap \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\} = \emptyset$$

jest zbiorem pustym zdarzeń.

17.10 Różnica zdarzeń losowych

Różnica zdarzeń losowych A i B to jest zdarzenie

$$E = A - B$$

zachodzi wtedy gdy zdarzenie A zachodzi, natomiast zdarzenie B nie zachodzi.
Na przykład, niech zdarzeniem A będzie parzysta ilość oczek, natomiast zdarzeniem B niech będzie ilość oczek podzielna przez 3.
Jasne, że zdarzenie A zachodzi, jeżeli wylosujemy element podzbioru

$$\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$$

zbioru Ω
natomiast zdarzenie B nie zachodzi, jeżeli nie wylosujemy elementu podzbioru

$$\{\omega_3, \omega_6\} \subset \Omega$$

zbioru Ω.
Zatem różnica zdarzeń losowych A i B to jest zdarzenie

$$E = A - B$$

zachodzi, jeżeli wylosujemy element podzbioru A i jednocześnie nie wylosujemy elementu podzbioru B. Wtedy zdarzenie

$$E = A - B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} - \{\omega_3, \omega_6\} = \{\omega_2, \omega_4\} \subset \Omega$$

17.11 Przykłady zdarzeń losowych

Niżej podajemy przykłady zdarzeń losowych i zdarzeń sprzyjających określonemu zdarzeniu losowemu. Podajemy również opis operacji: alternatywy i koniukcji zdarzeń losowych oraz prawdopodobieństwo zdarzeń sprzyjających i zdarzeń przeciwnych do danego zdarzenia losowego.

Przykład 17.8 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z tego zbioru liczby podzielnej przez 5.

Rozwiązanie (17.8). Zbiór wszystkich zdarzeń możliwych

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

składa się $N = 20$ zdarzeń elementarnych.
Zbiór zdarzeń sprzyjających

$$A = \{5, 10, 15, 20\}$$

składa się z $k = 4$ liczb podzielnych przez 5.
Zatem prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 5 ze zbioru Ω wszystkich możliwych zdarzeń jest równe

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania ze zbioru Ω liczby podzielnej przez 5 jest równe $\frac{1}{5}$.

Przykład 17.9 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$$

wybieramy losowo dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb z których co najmniej jedna jest podzielne przez 3.

Rozwiązanie (17.9). W tym przykładzie zdarzeniemi elementarnymi będą wszystkie pary liczb podane w tablicy

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,5), & (1,7), & (1,9), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,5), & (2,7), & (2,9), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,5), & (3,7), & (3,9), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,5), & (5,7), & (5,9), \\ (7,1), & (7,2), & (7,3), & (7,5), & (7,7), & (7,9), \\ (9,1), & (9,2), & (9,3), & (9,5), & (9,7), & (9,9), \end{array} \right\}_{N=6\,\times\,6}$$

Zatem zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych składa się z $N = 36$ zdarzeń możliwych.
Zbiór zdarzeń sprzyjających to są te pary liczb wybrane z tablicy (17.9) w których co

najmniej jedna liczba jest podzielna przez przez 3.
Zatem zbiòr zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A określony w tablicy

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} & & (1,3), & & & (1,9) \\ & & (2,3), & & & (2,9), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,5), & (3,7), & (3,9), \\ & & (5,3), & & & (5,9), \\ & & (7,3), & & & (7,9), \\ (9,1), & (9,2), & (9,3), & (9,5), & (9,7), & (9,9), \end{array} \right\}_{k=20}$$

składa się z $k = 20$ par w kòrych co najmniej jedna z liczb jest podzielna przez 3.

Zatem prawdopodobieństwo wylosowania dwòch liczb ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ z kòrych co majmnie jedna jest podzielna przez 3 jest ròwne

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Przykład 17.10 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 2 i przez 3.

Rozwiązanie (17.10). Zbiòr wszystkich zdarzeń losowych

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

składa się z $N = 20$ zdarzeń losowych elementarnych.
Zbiòr zdarzeń losowych sprzyjających zdarzeniu

$$A = \{6, 12, 18\},$$

że wylosowana liczba jest podzielna przez 2 i przez 3, składa się z $k = 3$ liczb.
Zatem prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 2 i przez 3 ze zbioru Ω jest ròwne

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{3}{20}$$

Przykład 17.11 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby mniejszej 6.

Rozwiązanie (17.11). Zbiòr wszystkich zdarzeń losowych

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

składa się z $N = 20$ zdarzeń losowych elementarnych.
Zbiòr zdarzeń losowych sprzyjających zdarzeniu

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

że wylosowana liczba jest mniejsza od 6, składa się z $k = 5$ liczb.
Zatem prawdopodobieństwo wylosowania liczby mniejszej od 6 ze zbioru Ω jest równe

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Przykład 17.12 .
(i) Podaj zbiór zdarzeń wszystkich elementarnych w doświadczeniu rzutem dwoma kostkami.
(ii) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A pojawienia się parzystej sumy liczby oczek w rzucie dwiema kostkami.
(iii) Podaj zdarzenie przeciwne A' do zdarzenia A.

Rozwiązanie (i) Możliwe są następujące wyniki:

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 1, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 2, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 3, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 4, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 5, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 6, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.

Zatem wynikiem tego doświadczenia jest zbiór wszystkich możliwych par zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6), \end{array} \right\}_{N=6\times 6}$$

Rozwiązanie (ii). W rzucie dwiema kostkami suma oczek jest parzysta, jeżeli na pierwszej i jednocześnie na drugiej kostce pojawi się parzysta ilość oczek, albo jednocześnie na pierwszej i na drugiej kostce pojawi się nie parzysta ilość oczek. Ponieważ wszystkich zdarzeń elementarnych jest $6 \times 6 = 36$, to zbiór zdarzeń sprzyjających

$$\omega = \left\{ \begin{array}{ccc} (1,1), & (1,3), & (1,5), \\ (2,2), & (2,4), & (2,6), \\ (3,1), & (3,3), & (3,5), \\ (4,2), & (4,4), & (4,6), \\ (5,1), & (5,4), & (5,5), \\ (6,2), & (6,4), & (6,6), \end{array} \right\}$$

ma $\dfrac{36}{2} = 18$ elementy. Zatem prawdopodobieństwo zdarzenie A, że w sumie wypadnie parzysta ilość oczek jest równe

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Rozwiązanie (iii). Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A w rzucie dwiema kostkami będzie nie parzysta suma oczek. To znaczy, że na pierwszej kostce pojawi się nieparzysta liczba oczek, natomiast na drugiej kostce pojawi się parzysta ilość oczek, albo odwrotnie, na pierwszej kostce pojawi się parzysta ilość oczek, natomiast na drugiej kostce pojawi się nie parzysta liczba oczek. Zbiór zdarzeń sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu

$$\omega^{'} = \Omega - \omega = \left\{ \begin{array}{ccc} (1,2), & (1,4), & (1,6), \\ (2,1), & (2,3), & (2,5), \\ (3,2), & (3,4), & (3,6), \\ (4,1), & (4,3), & (4,5), \\ (5,2), & (5,4), & (5,6), \\ (6,1), & (6,3), & (6,5), \end{array} \right\}$$

Ponieważ wszystkich zdarzeń elementarnych jest $6 \times 6 = 36$, to zdarzeń sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu jest $\dfrac{36}{2} = 18$.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego $A^{'}$, że w sumie wypadnie nie parzysta ilość oczek jest równe

$$P(A^{'}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Przykład 17.13 *Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania w totolotku ze zbioru liczb* $\{1, 2, ..., 49\}$ *(i) sześciu liczb, (ii) pięciu liczb, bez powtórzeń.*

Rozwiązanie (i). Najpierw ustalmy zbiór zdarzeń elementarnych. Intuicyjnie jasne, że zdarzeniem elementarnym będzie sześć liczb

$$\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$$

wybranych losowo ze zbioru liczb $\{1, 2, ..., 49\}$.

Pytanie ile będzie różnych szóstek ze zbioru 49-ciu liczb?.
Rozumiemy, że dwie szóstki są różne, jeżeli różnią się co najmiej jedną liczbą. Prostą odpowiedQ́ na to pytanie znajdujemy w kombinatoryce. Mianowicie, ilość różnych szóstek równa jest ilości kombinacji z 49-ciu liczb po sześć liczb. Tą liczbę kombinacji określamy wzorem

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! * (49-6)!} = \frac{49!}{6! * 43!} = 13983816$$

Zatem, zbiór wszystkich kombinacji $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$ sześciu liczb wybranych z 49-ciu liczb

$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \le n_i \le 49, \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych.
OdpowiedQ́: Niech $A \in \Omega$ oznacza zdarzenie wylosowania sześciu liczb ze zbioru

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 48, 49\}$$

Tylko jedna szòstka liczb wygrywa. ktòra sprzyja zdarzeniu A. Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest ròwne

$$P(A) = \frac{1}{13983816}$$

Rozwiązanie (ii). Niech sześć liczb $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ będzie wynikiem losowania totolotka. Wiemy z rozwiązania (i), że zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \le n_i \le 49, \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

zawiera $\binom{49}{6} = 13983816$ elementów.
Oznaczmy przez A zdarzenie, że gracz wytypował liczby $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ wśród których pięć liczby są trafione. To znaczy, że w tym zbiorze liczb

$$\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$$

pięć liczb są ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$.
Teraz policzmy ile jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A. Najpierw, zuważmy, że jedną liczbą nie trafioną może być k_1 lub k_2 lub k_3 lub k_4 lub k_5 lub k_6. Zatem, jedną z pięciu liczb trafionych możemy zastąpić liczbą nie trafioną otrzymując inną piątkę liczb trafionych. Taką zamianę można dokonać na $\binom{6}{1} = 6$ sześć sposobów.
W ten sposób znajdujemy sześć różnych szóstek ja̍ko zdzarzenia sprzyjających zdarzeniu A. Ponadto, pozostało 43 liczby nie zo stały wylosowane w totolotka. Każdą z tych 43 nie wytypowanych w grze można wymienić na jedną z sześciu nie trafionych przez gracza. Zatem, zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A wylosowania poprawnych pięciu liczba jest $6 * 43 = 258$. Oznacza to, że prawdopodobieństwo wylosowania poprawnych 5 liczby z wylosowanych sześciu liczb równe jest

$$P(A) = \frac{258}{13983816} = 0.00001845$$

17.12 Zadania

Zadanie 17.1 .
(i) Wykonaj 50 rzutów monetą i policz ilość reszek w 10, 20, 30, 40 *i* 50 *rzutach. Oblicz czętości pojawienia się reszki i orła dla* 10, 20, 30, 40 *i* 50 *rzutów monetą.*
(ii) Wskaż liczbę charakterystyczną dla tego doświadczenia około której stabilizują się obliczone częstości.

Zadanie 17.2 *Wykonaj 10 rzutów dwoma jednakowymi monetami.*
(*i*) *Oblicz częstość pojawienia się dwóch orlów w 10 rzutach.*
(*ii*) *Oblicz częstość pojawienia się orła i reszki w 10 rzutach.*

Zadanie 17.3 *Rozpatrz model probabilistyczny rzutu dwoma monetami jeden raz.*
(*i*) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się dwóch orlów.*
(*ii*) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się orła i reszki.*

Zadanie 17.4 *Wykonaj 10 rzutów dwoma kostkami.*
(*i*) *Oblicz częstość pojawienia się dwóch takich samych oczek.*
(*ii*) *Oblicz częstość pojawienia się oczek, których suma równa jest 4.*
(*iii*) *Oblicz częstość pojawienia się oczek, których suma równa jest 7.*

Zadanie 17.5 *Rozpatrz model probabilistyczny rzutu dwoma kostkami sześciennymi jeden raz.*
(*i*) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się dwóch takich samych ilości oczek.*
(*ii*) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się ilości oczek, których suma równa jest 4.*
(*iii*) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się ilości oczek, których suma równa jest 12.*

Zadanie 17.6 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 4.

Zadanie 17.7 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo dwie liczby, bez powtórzeń. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3 lub 4.

Zadanie 17.8 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 3 i przez 4.

Zadanie 17.9 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby mniejszej 5.

Zadanie 17.10 *Zbiór zdarzeń elementarnych*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

(*i*) *Oblicz alternatywę i koniukcję zdarzeń losowych złożonych*

$$A = \{\omega_1, \omega_6\}, \qquad B = \{\omega_2, \omega_6\}$$

(*ii*) *Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A i zdarzenia B.*
(*iii*) *Znajdź zdarzenia przeciwne $A^{'}$ i $B^{'}$ do zdarzeń losowych A i B.*
(*iv*) *Oblicz prawdopodobieństwa zcdarzeń losowych przeciwnych $A^{'}$ i $B^{'}$.*

Zadanie 17.11 *Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania w grze liczbowej ze zbioru liczb* $\{1, 2, ..., 20\}$ *(i) pięciu liczb, (ii) czterech liczb, bez powtórzeń.*

17.13 Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Laplace'a definicja prawdopodobieństwa jako iloraz n zdarzeń sprzyjających zdarzeniu losowemu A do ilości N wszystkich zdarzeń elementarnych, w istocie ma swoje uzasadnienie w zbiorze zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych. Mianowicie, jeżeli wszystkie zdarzenia elementarne są równo prawdopodobne, to znaczy, że pierwsze zdarzenie elementarne pojawia się z prawdopodobieństwem p_1, drugie z prawdopodobieństwem p_2, i tak dalej oraz $N - te$ zdarzenie elementarne pojawia się zprawdopodobieństwem p_N i te prawdopodobieństwa są równe

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_N = p,$$

wtedy

$$N\,p = 1 \quad i \quad p = \frac{1}{N}$$

Skąd otrzymamy prawdopodobieństwo jako iloraz n zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A do wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{n}{N}.$$

Bardziej ogólnym modelem prawdopodobieństwa jest definicja aksjomatyczna, która obejmuje również zbiór zdarzenia elementarnych różno prawdopodobnych.

Definition 17.2 *Oznaczmy przez Ω zbiór zdarzeń elementarnych. Prawdopodobieństwem zdarzenia losowogo $A \in \Omega$ nazywamy funkcje rzeczywistą $P(A)$, która spełnia nastepujące warunki:*

(a) $P(A) \geq 0$, *dla każdego zdaerzenia* $A \in \Omega$.

(b) Dla każdej pary wyłączającej się zdarzeń losowych $A, B \in \Omega$ *zachodzi równość;* $P(A \cup B) = P(A) + P(B), 49 - ciuliczb$

(c) $P(\omega_1) = 1$.

Przykład 17.14 *Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania w totolotku ze zbioru liczb* $\{1, 2, ..., 49\}$ *(i) sześciu liczb, (ii) piętciu liczb, (iii) czterech liczb*

Rozwiązanie (i). Najpierw ustalmy zbiór zdarzeń elementarnych. Intuicyjnie jasne, że zdarzeniem elementarnym będzie sześć liczb $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$ wybranych losowo ze zbioru liczb $\{1, 2, ..., 49\}$, to znaczy $n_i \in \{1, 2, ..., 49\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Pytanie ile będzie różnych szóstek ze zbioru 49-ciu liczb?. Rozumiemy, że dwie szóstki są różne, jeżeli rożnią się co najmiej jedną liczbą. Prostą odpowiedQ́ na to pytanie znajdujemy w kombinatoryce. Mianowicie, ilość różnych szóstek równa jest ilości kombinacji z 49-ciu liczb po sześć liczb. Tą liczbę kombinacji określamy symbolem Newtona

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \; * (49-6)!} = \frac{49!}{6! \; * 43!} = 13983816$$

Zatem, zbiór wszystkich kombinacji $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$ sześciu liczb wybranych z 49-ciu liczb

$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49, \; i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych.
OdpowiedQ́: Niech $A \in \Omega$ oznacza zdarzenie wylosowania sześciu liczb ze zbiru Ω. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia równe jest

$$P(A) = \frac{1}{13983816}$$

Zauważmy, że zgodnie z aksomatyczną definicją prawdopodobieństw funkcja $P(A)$ określona na zbiorze zdarzeń elementarnych Ω spełnia warunki definicji. Mianowicie, mamy

(a) $P(A) = \dfrac{1}{13983816} \geq 0$, dla każdego zdarzenia $A \in \Omega$. Wszystkie zdarzenia elementarne są równo-prawdopodobne.

(b) Dla każdej pary wyłączającej się zdarzeń losowych $A, B \in \Omega$, jeżeli zdarzenie A zachodzi to zdarzenie B nie zachodzi.
Wtedy
$$P(A) = \frac{1}{13983816}, \quad \text{oraz} \quad P(B) = 0.$$
Zatem, mamy równość;
$$P(A \cup B) = \frac{1}{13983816} + 0 = P(A) + P(B)$$
Podobnie, lub jeżeli zdarzenie B zachodzi to zdarzenie A nie zachodzi.
Wtedy
$$P(A) = 0, \quad \text{oraz} \quad P(B) = \frac{1}{13983816}.$$
Zatem, mamy równość:
$$P(A \cup B) = 0 + \frac{1}{13983816} = P(A) + P(B)$$

(c) Jeżeli wybierzemy wszystkie możliwe szóstki, to wśród nich pojawi się napewno losowana szóstka. To znaczy prawdopodobieństwo od wszystkich zdarzeń elementarnych $P(\Omega) = 1$.

Rozwiązanie (ii). Niech sześć liczb $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ będzie wynikiem losowania totolotka. Wiemy z rozwiązania (i), że zbiór zdarzeń elementarnych
$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49, \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$
zawiera $\binom{49}{6} = 13983816$ elementów.
Oznaczmy przez A zdarzenie, że gracz wytypował liczby $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ wśród których pięć liczb jest trafnych. To znaczy, że w tym zbiorze liczb $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ cztery liczby jest ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$. Teraz policzmy ile jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A. Najpierw, zuważmy, że jedną liczbą nie trafioną może być k_1 lub k_2 lub k_3 lub k_4 lub k_5 lub k_6. Zatem, jedną z pięciu liczb trafionych możemy zastąpić liczbą nie trafioną otrzymując inną piątkę liczb trafionych. Taką zamianę można dokonać na $\binom{6}{1} = 6$ sześć sposobów. W ten sposób znajdujemy sześć różnych szóstek ́jako zdzarzenia sprzyjających zdarzeniu A. Ponadto, pozostało 43 liczby nie wylosowane w totolotka. Każdą z tych 43 nie wytypowanych w grze można wymienić na jedną z sześciu nie trafionych przez gracza. Zatem, zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A wylosowania poprawnych pięciu liczba jest $6 * 43 = 258$. Oznacza to, że prawdopodobieństwo wylosowania poprawnych 5 liczby z wylosowanych sześciu liczb równe jest
$$P(A) = \frac{258}{13983816} = 0.00001845$$

Rozwiązanie (iii). Niech sześć liczb $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ będzie wynikiem losowania totolotka. Wiemy z rozwiązania (i), że zbiór zdarzeń elementarnych
$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49, \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

zawiera $\binom{49}{6} = 13983816$ elementów.
Oznaczmy przez A zdarzenie, że gracz wytypował liczby $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ wśród których cztery liczby jest trafne. To znaczy, że w tym zbiorze liczb $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ cztery liczby jest ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$. Teraz policzmy ile jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A. Najpierw, zuważmy, że dwie liczby nie trafione to mogą być pary k_1, k_2 lub k_1, k_3 lub ...., lub k_4, k_5 lub ...,lub k_5, k_6 Ilość tych par równa jest $\binom{6}{2} = 15$. Zatem, dwie z czterech liczb trafionych możemy zastąpić liczbami wylosowanymi w totolotku, ale nie trafionionymi przez gracza. W ten sposób otrzymujemy inną czwórkę liczb trafionych. Taką zamianę można dokonać na $\binom{6}{2} = 15$ pietnaście sposobów. W ten sposób otrzymujemy 15 różnych czwórek ́jako zdzarzenia sprzyjających zdarzeniu A. Ponadto, pozostało 43 liczby nie wylosowane w totolotka. Każde dwie liczby z tych 43 nie wytypowanych w grze można wymienić na $\binom{43}{2} = 21 * 43$ sposobów na dwie liczby nie trafionych przez gracza. Zatem, zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A wylosowania poprawnych czterech liczba jest $15 * 21 * 43 = 13545$. Oznacza to, że prawdopodobieństwo wylosowania poprawnych czterech liczb z wylosowanych sześciu liczb równe jest

$$P(A) = \frac{13545}{1398316} = 0.000969$$

Zadanie 17.12 *Niech sześć liczb $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ będzie wynikiem losowania totolotka. Gracz wytypowł sześć liczb $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz trafił tylko w trzy liczby ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$, sześciu liczb, pozostałe trzy liczby były nie trafione.*

17.14 Prawdopodobeństwo warunkowe

Prawdopodobieństwo warunkowe zajścia dowolnego zdarzenia A pod warunkiem, że już zaszło zdarzenie B oznaczamy symbolem $P(A|B)$ i definiujemy wzorem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{gdy} \quad P(B) > 0.$$

Powyżesze określenie prawdopodobieństwa warunkowego wyjaśniamy na następującym przykładzie:

Przykład 17.15 *W stadzie jest razem N owiec i baranów. Wiadomo, że ilość owiec i baranów jest następująca:*

- *m baranów*
- *k baranów białych.*
- *razem białych owiec i baranów jest n, $k \leq n$.*

Niech A oznacza zdarzenie, że losowo wybrany czworonogi jest biały, natomiast niech B oznacza zdarzenie, że wybrany losowo czworonogi jest baranem. Zakładając, że prawdopodobieństwo wyboru każdego czworonogiego owcy czy barana jest to samo. Wtedy obliczamy łatwo następujące prawdopodobieństwa:

$$P(A) = \frac{n}{N}, \qquad P(B) = \frac{m}{N}, \qquad P(A \cap B) = \frac{k}{N}$$

Wybierając losowo białego barana pytamy o warunkowe prawdopodobieństwo $P(A|B)$. To warunkowe prawdopodobeństwo wylosowania białego barana jest równe

$$P(A|B) = \frac{k}{m}$$

Skąd otrzymamy następujący wzór:

$$P(A|B) = \frac{k}{m} = \frac{\frac{k}{N}}{\frac{m}{N}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Zgodnie z definicją, powyższy wzór określa warunkowe prawdopodobieństwo zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, gdy $P(B) > 0$.

17.15 Prawdopodobieństwo całkowite

Aby wprowadzić pojęcie prawdopodobieństwa całkowitego posłużymy się następującym przykładem:

Przykład 17.16 *Przypuśćmy, że jakaś fabryka produjkująca żarówki ma wadliwość 5 żarówek na 100 wyprodukowanych. Wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana żarówka z tej fabryki jest wadliwa wynosi* 0.05. *Przypuśćmy teraz , że zainstalowano w tej fabryce nową linię produkcji, która produkuje tylko 1 żarówkę wadliwą na 100 wyprodukowanych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana żarówka z tej fabryki jest wadliwa?*

Interesujące prawdopodobieństwo to tak zwane prawdopodobieństwo całkowite. Gdyby nowa linia produkcji produkowała tyle samo żarówek co stara linia produkcyjna, to prawdopodobieństwo całkowite powinno być równe średniej wadliwości, to znaczy $\frac{1}{2}(0.05 + 0.01) = 0.03$. Oczywistście zakładamy, że żarówki wyprodukowane przez obie linie produkcyjne zostały dokładnie wymieszane.. OdpowiedQ́ na pytanie w tym przykładzie wynika z następującego twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym

Twierdzenie 17.1 *Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, ..., B_n$ wyłaczają się parami i ich parwdopodobieństwa $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, ...n$. Ponadto, jeżeli alternatywa tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, to znaczy $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$, to dla każdego zdarzenia losowego $A \subset \Omega$ z przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω, zachodzi następujący wzór:*

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \cdots + P(B_n)P(A/B_n)$$

Stosując to twierdzenie do opisanego wyżej przykładu, załóżmy, że nowa linia produkcyjna produkuje trzy razy więcej żarówek niż stara linia produkcyjna. Oznaczmy przez A interesujące nas zdarzenie losowe, że wybrana żarówka jest wadliwa. Również oznaczmy przez B_1 i B_2 zdarzenia, że losowo wybrana żarówka została wyprodukowana na starej lini produkcyjnej i nowej lini produkcyjnej, odpowiednio. Stosując twierdzenie o całkowitym prawdopodobieństwie, sprawdzamy założenia tego twierdzenia. Po pierwsze, widzimy że zdarzenia B_1 i B_2 są rozłączne. Po drugie,żadne z tych zdarzeń nie jest zdarzeniem niemożliwym, czyli prawdopodobieństwa ich zajścia są dodatnie, $P(B_1) > 0$ i $P(B_2) > 0$. Następnie, alternatywa tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, to znaczy $B_1 \cup B_2 = \Omega$.
Z treści przykładu wynika, że

- $P(B_1) = 0.3$,
- $P(B_2) = 0.7$.

oraz, że dane prawdopodobieństwa warunkowe są następujące:

- $P(A/B_1) = 0.05$,
- $P(A/B_2) = 0.01$.

Z tezy twierdzenia wynika

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B2)P(A/B_2) = 0.3 * 0.05 + 0.7 * 0.01 = 0.036$$

Zatem średnio 36 żarówek na 1000 żarówek wyprodukowanych w fabryce to są żarówki wadliwe.
Zauważmy, że jeżeli obie linie produkcyjne produkują tą samą ilość żarówek, wtedy prawdopodobieństwa B_1 i B_2 są równe

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$$

i prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B2)P(A/B_2) = \frac{1}{2}(0.05 + 0.01) = 0.03$$

Rozpatrzmy inny przykład.

Przykład 17.17 *Powiedzmy, że stan pogody dla Warszawy w miesiącu kwietniu można schrakteryzować za pomocą jednego z trzech typów pogody I, II, III. Z długotrwałych obserwacji wywnioskowano, że prawdopodobieństwa tego, że w wybranym losowo dniu kwietnia będzie określony typ pogody są odpowiednio równe:* 0.2, 0.1, 0.7. *Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że w losowo wybranym dniu kwietnia będzie padał deszcz.*

Oznaczmy przez B_1, B_2, B_3 zdarzenia polegają na tym, że w losowo wybranym dniu kwietnia wystąpi odpowiednio I-szy lub II-gi, lub 3-ci typ pogody. Oznaczmy przez A interesujące nas zdarzenie, że w losowo wybranym dniu kwietnia będzie padał deszcz.
Teraz sprawdzamy założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.
Po pierwsze zauważamy, że zdarzenia B_1, B_2, i B_3 są parami rozłączne. To znaczy koniukcja tych par zdarzeń jest zbiorem pustym $\emptyset$

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset, \quad B_1 \cap B_3 = \emptyset, \quad B_2 \cap B_3 = \emptyset$$

Po drugie, prawdopodobieństwa zdarzeń $P(B_1) > 0$, $P(B_2) > 0$, $P(B_3) > 0$ są dodatnie.
Po trzecie alternatywa zdarzeń

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$$

jest zdarzeniem pewnym.
Z treści tego przykładu mamy dla losowo wybranego dnia kwietnia prawdopodobieństwa pojawienia się typu pogody

- $P(B_1) = 0.2$
- $P(B_2) = 0.1$
- $P(B_3) = 0.7$

oraz prawdopodobieństwa warukowe

- $P(A/B_1) = 0.9$
- $P(A/B_2) = 0.8$
- $P(A/B_3) = 0.15$

Z tezy twerdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym obliczamy prawdopodobieństwo interesującego nas zdarzenia A :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3) \\ &= 0.2 * 0.9 + 0.1 * 0.8 + 0.7 * 0.15 = 0.445 \end{aligned}$$

Chapter 18

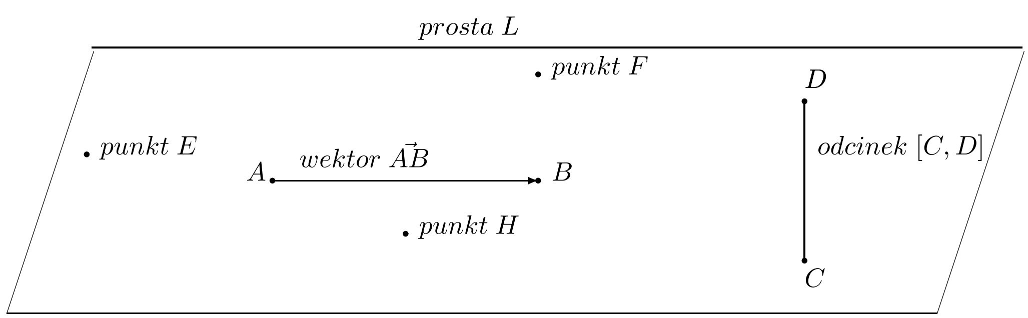
Geometria płaska. Planimetria

18.1 Wstęp

Geometria Euklidesowa, kt̀ora obejmje geometrię płaską i geometrie przestrzenną wchodzi do podstawy programu nauczania na poziomie podstawowym i średnim. W szkole podstawowej do programu rozszerzonnego matematyki wchodzą tylko niekt̀ore tematy wsparte ćwiczeniami, kt̀ore są opisane w rozdziale I.
Zakres geometrii płaskiej obejmuje konstrukcje z linijką i cyrklem figur płaskich oraz związki miarowe w tr̀ojkątach, prostokątach, r̀ownoległobokach, w okręgach i w wielokątach foremnych.

18.2 Punkty, odcinki i wektory na płaszczyźnie

Punkty, proste i płaszczyzny są pojęciami pierwotnymi, nie wymagają definicji. Punkt rozumiany jest jako figura geoametryczna bezwymiarowa. Prosta to przestrzeń euklidesowa jednowymiarowa, kt̀ora składa się z punkt̀ow wsp̀oł-liniowych. Podobnie płszczyzna tworzy przestrzeń euklidesową złożoną z punkt̀ow wsp̀oł-płaszczyźnianych. Punkty położone na prostej lub na płaszczyźnie oznaczamy dużymy literami $A, B, C, ...$; Odcinek o początku w punkcie A i końcu w punkcie B oznaczamy symbolem $[A, B]$. Długość odcinka $[A, B]$ o początku A i końcu B oznaczamy modułem $|AB|$.
Wektorem o paczątku w punkcie A i końcu w punkcie B nazywamy odcinek skierowany $\vec{AB}$ o zwrocie od A do B. Dḷugość wektora $|\vec{AB}|$ r̀owna jest długości odcinka $|AB|$.



18.3 Położenie fiugur geometrycznych na płaszczyźnie.

Położenie figur geometrycznych na płaszczyźnie określamy we współrzędnych kartezjńskich. W kartezjańskim układzie współrzędnych współrzędne punktów punkty

$$A = (a_1, a_2) \quad i \quad B = (b_1, b_2)$$

piszemy w nawiasach zwykłych. Natomiast wektor

$$\vec{AB} = [a_2 - a_1, b_2 - b_1]$$

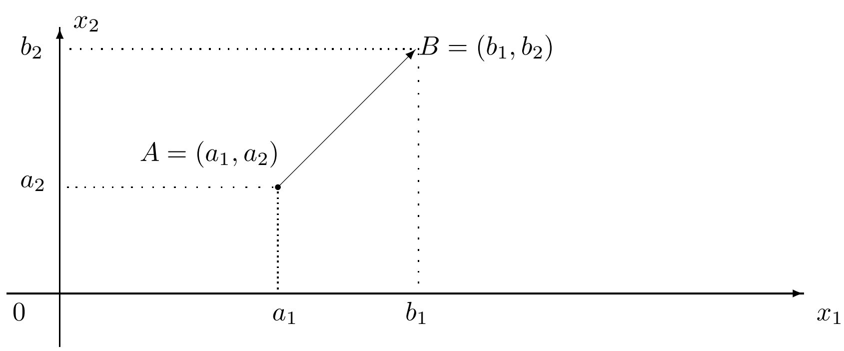
o współrzędnych różnicy współrzędnych piszemy w nawiasach kwadratowych.

Przykład 18.1 *Niech punkty $A = (3, 1.5)$ i $B = (5, 3.5)$ tworzą wektor $\vec{AB}$ o pucządku A i końcu B. Wtedy wektor*

$$\vec{AB} = [5 - 3, 3.5 - 1.5] = [2, 2]$$

ma współrzędne $x_1 = 2$, $x_2 = 2$.

Kartetezjański układ współrzędnych



18.3.1 Operacje arytmetyczne na punktach

Dodawanie punktów. Suma dwóch punktów

$$A = (a_1, a_2) \quad i \quad B = (b_1, b_2)$$

równajest punktowi

$$P = (p_1, p_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

o współrzędnych $p_1 = a_1 + b_1 \quad i \quad p_2 = a_2 + b_2$.

Przykład 18.2 *Oblicz sumę punktów*

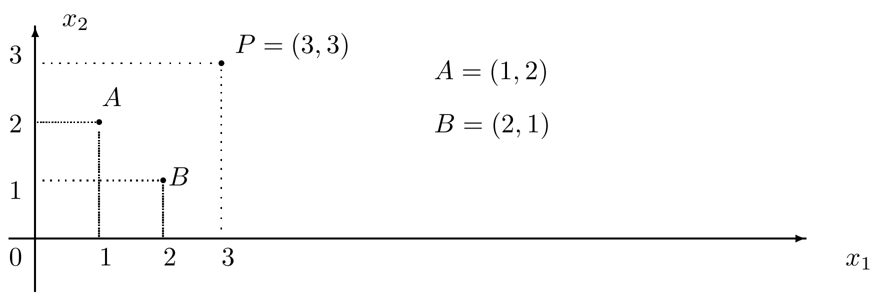
$$A = (1, 2) \quad i \quad B = (2, 1)$$

Rozwiązanie. Suma

$$A + B = (1, 2) + (2, 1) = (1 + 2, 2 + 1) = (3, 3)$$

Opowiedź: Sumą danych punktów $A = (1, 2)$ i $B = (2, 1)$ jest trzeci punkt $P = (3, 3)$. o współrzędnych $x_1 = 3$, $x_2 = 3$.
Niżej na rysunku podana jest geometryczna interpretacja sumy pnktów

$$A + B = (1, 2) + (2, 1)$$



Odejmowanie punktów. Różnica dwóch punktów

$$A = (a_1, a_2) \quad i \quad B = (b_1, b_2)$$

równa jest punktowi $P = (p_1, p_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$
o współrzędnych $p_1 = a_1 - b_1 \quad i \quad p_2 = a_2 - b_2$.

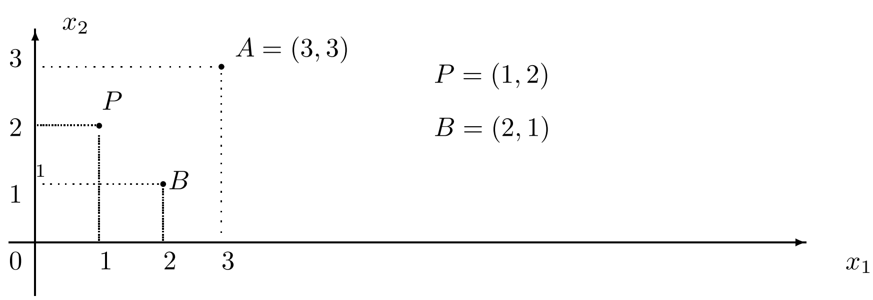
Przykład 18.3 *Oblicz różnicę punktów*

$$A = (1, 2) \quad i \quad B = (2, 1)$$

Rozwiązanie. Różnica

$$A - B = (3, 3) - (2, 1) = (3 - 2, 3 - 1) = (1, 2)$$

Opowiedź: Różnicą danych punktów $A = (3, 3)$ i $B = (2, 1)$ jest punkt $P = (1, 2)$.



18.3.2 Wektory na płaszczyźnie

Niech dane będą punkty $A = (a_1, a_2)$ i $B = (b_1, b_2)$.
Wektor $\vec{AB}$ o pacząktu w punkcie $A = (a_1, a_2)$ i końcu w punkcie $B = (b_1, b_2)$ określamy jako różnica punktów

$$\vec{AB} = B - A = [b_1 - a_1, b_2 - a_2].$$

[2] [3] Na przykład wektor związany o początku w punkcie $A = (0, 1)$ i końcu w punkcie $B = (2, 0)$ ma współrzędne

$$\vec{AB} = b - a = (2, 0) - (0, 1) = [2, -1].$$

[1] Nie ma pojęcia iloczynu lub ilorazu punktów

[2] Współrzędne v_1, v_2 wektora swobodnego $\vec{v} = [v_1, v_2]$ piszemy w nawiasach kwadrawtowych.

[3] Wektor swobodny określony jest przez jego długość, kierunek i zwrot, nie zależy od położenia na płaszczyźnie.

18.3.3 Operacje arytmetyczne na wektorach

Dodawanie wektorów
Suma dwóch wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2]$$

równajest wektorowi

$$\vec{Q} = [z_1, z_2] = [v_1 + w_1, v_2 + w_2]$$

o współrzędnych $z_1 = v_1 + w_1 \quad i \quad z_2 = v_2 + w_2$.

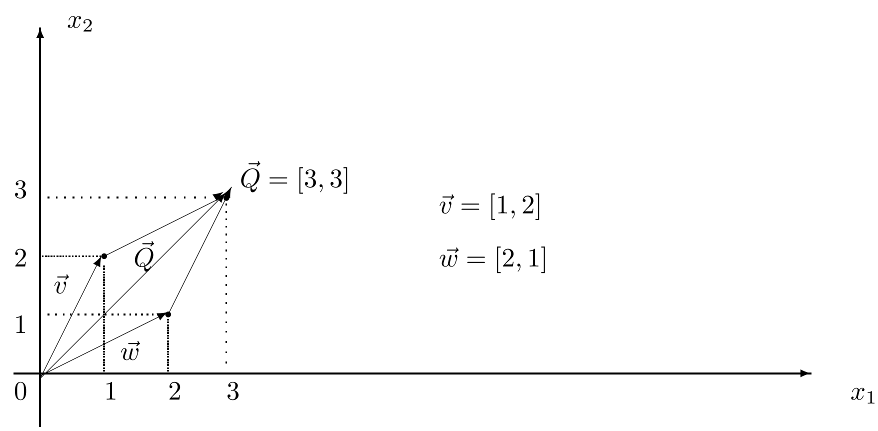
Przykład 18.4 *Oblicz sumę wektorów*

$$\vec{v} = [1, 2] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1]$$

Rozwiązanie. Suma

$$\vec{v} + \vec{w} = [1, 2] + (2, 1) = [1 + 2, 2 + 1] = [3, 3]$$

Opowiedź: Sumą danych punktów $\vec{v} = [1, 2]$ i $\vec{w} = [2, 1]$ jest wektor $\vec{Q} = [3, 3]$.



Odejmowanie wektorów
Różnica dwóch wektorów $\vec{v} = [v_1, v_2] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2]$ równa jest wektorowi

$$\vec{Q} = [z_1, z_2] = \vec{v} - \vec{w} = [v_1 - w_1, v_2 - w_2]$$

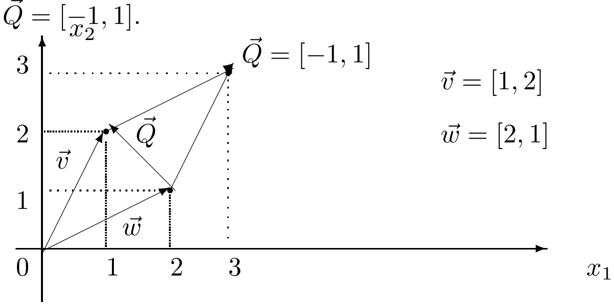
o współrzędnych $z_1 = v_1 - w_1 \quad i \quad z_2 = v_2 - w_2$.

Przykład 18.5 *Oblicz różnice wektorów* $\vec{v} = [1, 2] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1]$

Rozwiązanie. Oblkiczamy różnicę wektorów

$$\vec{v} - \vec{w} = [1, 2] - [2, 1] = [1 - 2, 2 - 1] = [-1, 1]$$

Opowiedź: Wynikiem odejmowania danych wektorów $\vec{v} = [1, 2]$ i $\vec{w} = [2, 1]$ jest wektor $\vec{Q} = [-1, 1]$.



18.3.4 Iloczyn skalarny wektorów

[4] Iloczyn skalarny wektorów jest ważną operacją na wektorach stosowaną w matematyce stosowanej, w fizyce, chemii i w innych przedmiotach ścisłych.

Definition 18.1 *Iloczynem skalarnym wektorów $\vec{v} = [v_1, v_2]$ i $\vec{w} = [w_1, w_2]$ nazywamy liczbę*

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2$$

Iloczyn skalarny wektorów nie jest wektorem, natomiast jest liczbą

Przykład 18.6 *Oblicz iloczyn skalarny wektorów*

$$\vec{v} = [2, 5] \qquad i \qquad \vec{w} = [7, 3]. \tag{18.1}$$

Rozwiązanie. Stosując wzór (19.1) obliczamy iloczyn skalarny danych wektorów, piszemy

$$(\vec{v}, \vec{w}) = ([2, 5] * [7, 3]) = 2 * 7 + 5 * 3 = 14 + 15 = 29.$$

Odpowiedź: Iloczyn skalarny danych wektorów $\vec{v} = [2, 5]$ i $\vec{w} = [7, 3]$ jest liczbą 29, piszemy

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 29.$$

Iloczyn skalarny wektorów zachowuje wszystkie własności operacji arytmetycznej mnożeni. Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2] \qquad i \qquad \vec{w} = [w_1, w_2]$$

- iloczn skalarny jest przemienny

  $$(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{v})$$

  Istotnie, sprawdzamy, że

  $$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2 = w_1 * v_1 + w_2 * v_2 = (\vec{w}, \vec{v})$$

- mnożenie skalarne wektorów jest rozdzielne względem dodawania

  $$(\vec{v}, (\vec{w} + \vec{Q})) = (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{Q})$$

  Istotnie sprawdzamy, że

  $$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w} + \vec{Q}) &= v_1 * (w_1 + z_1) + v_2 * (w_2 + z_2) \\ &= v_1 * w_1 + v_1 * z_1 + v_2 * w + 2 + v_2 * z_2 \\ &= \underbrace{v_1 * w_1 + v_2 * w_2}_{(\vec{v}, \vec{w}} + \underbrace{v_1 * z_1 + v_2 * z_2}_{(\vec{v}, \vec{Q})} \\ &= (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{Q}) \end{aligned}$$

- Iloczyn skalarny wektora $\vec{v}$ przez siebie równy jest kwadratowi jego długości

  $$(\vec{v}, \vec{v}) = v_1 * v_1 + v_2 * v_2 = v_1^2 + v_2^2 = |\vec{v}|^2$$

[4] Wielokość skalarna to znaczy wielkość określona liczbą

Teraz podamy ważne w zastosowniach następujące twierdzenie

Twierdzenie 18.1 *Wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, jeżeli ich iloczyn skalarny równy jest zero, piszmy*

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Longleftrightarrow (\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Dowód. Istnieje kilka dowodów tego twierdzenia. Tutaj podamy dowód oparty na twierdzeniu Pitagorasa. Mianowicie, udowodnimy, że trójkąt o ramionach $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Obliczamy kwadrat długości różnicy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$

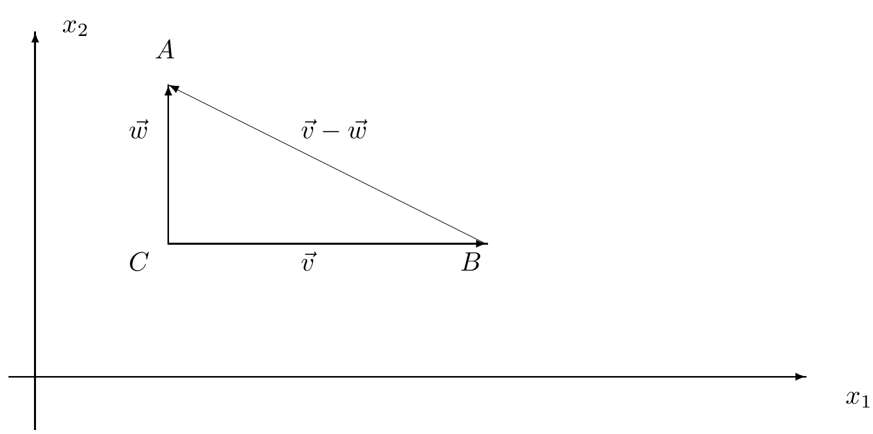
$$\begin{aligned} |\vec{v} - \vec{w}|^2 &= (\vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) \\ &= (\vec{v}, \vec{v}) - 2(\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{w}) \\ &= |\vec{v}|^2 - 2(\vec{v}, \vec{w}) + |\vec{w}|^2 \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

to boki trójkąta ΔABC

$$|AB| = |\vec{v}|, \qquad |AC| = |\vec{w}|, \qquad |BC| = |\vec{v} - \vec{w}|$$



spełniają równość

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = |v \vec{-} w|^2 \tag{18.2}$$

wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Z drugiej strony z twierdzenia Pitagorasa wynika, że suma kwadratów dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości boku trzeciego (cf. (19.2)) wtedy i tylko wtedy, jeżeli ten trójkąt jest prostokątny.
Zatem kąt $\angle ACB$ pomiędzy wektorami $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest prosty wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny tych wektorów równy jest zero.
Koniec dowodu.
Zauważmy, że iloczyn skalarny wektorów jest związany z twierdzeniem Pitagorasa, Istotnie, warunek prostopadłości wektorów [5] [6]

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

jest równoważny z tezą twierdzenia Pitagorasa o trójkącie prostokątnym.

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = |v \vec{-} w|^2.$$

Przykład 18.7 *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [6, 8], \qquad \vec{w} = [9, 12].$$

Rozwiązanie. Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzór (19.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [6, 8], \qquad i \qquad \vec{w} = [w_1, w_2] = [9, 12]$$

Zatem iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 6 * 9 + 8 * 12 = 54 + 96 = 150.$$

równy jest 100.
Wiemy, że kwadrat długości wektora $\vec{v} = [6, 8]$ jest równy iloczynowi skalarnemu tego wektora przez siebie.

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = 6 * 6 + 8 * 8 = 36 + 64 = 100$$

Skąd długość wektora

$$|\vec{v}| = \sqrt{100} = 10.$$

Podobnie obliczamy długość wektora $\vec{w} = [9, 12]$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(\vec{w}, \vec{w})} = \sqrt{9 * 9 + 12 * 12} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15.$$

Przykład 18.8 *Dla jakiej wartości parametru m wektory*

$$\vec{v} = [m, 6], \qquad \vec{w} = [3, 2].$$

są prostopadłe?

Rozwiązanie. Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzór (19.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [m, 6], \qquad i \qquad \vec{w} = [w_1, w_2] = [3, 2]$$

Wektory są prostopadłe jeżeli ich iloczyn skalarny równy jest zero. Obliczamy iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = m * 3 + 6 * 2 = 3m + 12 = 0.$$

[5] Wartość iloczynu skalarnego wektorów nie jest wektorem, natomiast jest liczbą.
[6] Zauważmy, że znikanie iloczynu skalarnego $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym prostopadłości wektorów $\vec{v}, \vec{w}$, w symbolach piszemy $\vec{v} \perp \vec{w} \iff (\vec{v}, \vec{w}) = 0$.

Skąd iloczyn skalarny ròwny jest zero

$$6m + 12 = 0, \qquad dla \qquad m = -\frac{12}{3} = -4.$$

Istotnie sprawdzamy, że dla $m = -4$ iloczyn skalarny wektora $\vec{v} = [m, 6]$ przez wektor $\vec{w} = [3, 2]$ ròwny jest zero

$$(\vec{v}, \vec{w}) = -4 * 3 + 6 * 2 = 0$$

Odpowiedź: Wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [m, 6], \qquad i \qquad \vec{w} = [w_1, w_2] = [3, 2]$$

są prostopadłe dla parametru $m = -4$.

Zadanie 18.1 *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [12, 16], \qquad \vec{w} = [15, 20].$$

Zadanie 18.2 *Dla jakiej wartości parametru m wektory*

$$\vec{v} = [m, 15], \qquad \vec{w} = [5, 3].$$

są prostopadłe?

18.4 Konstrukcje podstawowe z cyrklem i linijką

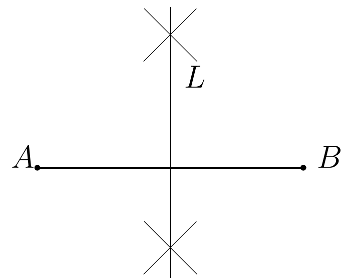
Do konstrukcji podstawowych przy pomocy cyrkla i linijki zaliczamy tutaj [7]

- konstrukcja symetralnej danego odcinka,
- konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej, ktòra przechodzi przez dany punkt poza prostą,
- konstrukcja dwusiecznej danego kąta,
- konstrukcja prostych ròwnoległych,
- konstrukcja tròjką o danch bokach,
- konstrukcja czworokąta o danych bokach.

18.4.1 Konstrukcja symetralnej odcinka.

Niech dany będzie odcinek $[A, B]$ o długości $a = |AB|$. Stawiamy cyrkiel w punkcie A i rozwartością cyrkla większą od połowy odcinka $[A, B]$ zakreślamy dwa łuki nad odcinkiem i pod odcinkiem. Rysujemy prostą L przez punkty przecię łuków. Prosta L jest symetralną odcinka $[A, B]$.

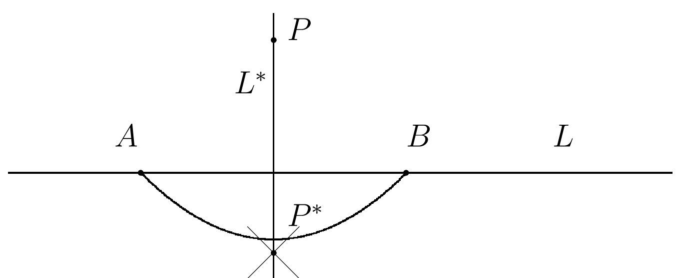
[7] Długość odcineka $[A, B]$ o początku A i końcu B oznaczamy symbolem $|AB|$



Zadanie 18.3 *Narusuj odcinek o początku w punkcie A długości* 6*cm i o końcu w punkcie B. poprowadź symetralną odcinka $[A, B]$ przy pomocy cyrkla i linijki.*

18.4.2 Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej

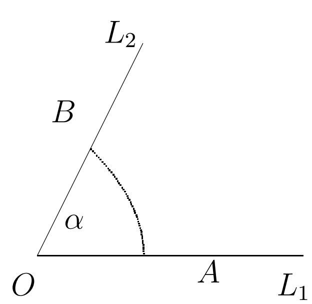
Niech dana będzie prosta L i punkt P. Stawiamy cyrkiel w danym punkcie P i zakreślamy łuk przeciający prostą L w punktach A i B. Stawiamy cyrkiel w punkcie A i zakreślamy łuk. Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie B i zakreślamy łuk. Punkt przecięcia łuków oznaczamy literą P^*. Przez punkty P^* i P rysujemy prostą L^*, jak na rysunku niżej.



Zadanie 18.4 *Narusuj prostą L. Poprowadź prostą prostopadłą do prostej L przez dowolnie wybrany punkt P leżący poza prostą L, przy pomocy cyrkla i linijki.*

18.4.3 Konstrukcja dwusiecznej danego kąta

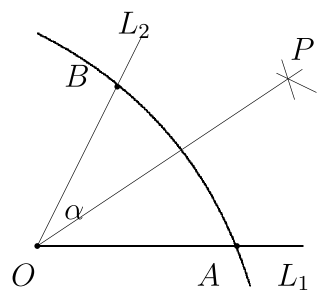
Niech będzie dany kąt α o wierzchołku w punkcie O i ramionach L_1 i L_2. [8]



Stawiamy cyrkiel w wierzchołku O kąta α i zakreślamy łuk przecinający ramiona L_1 i L_2 w punktach A i B. Punkty A i B są równo odległe od punktu O, piszemy $|OA| = |OB|$. Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie A i zakreślamy

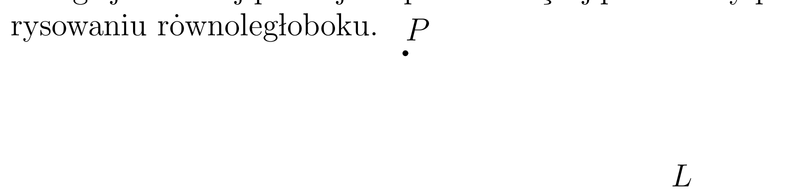
[8] Kąt α o wierzchołku O i ramionach L_1 i L_2 określonych przez punkty A i B oznaczamy symbolem $\angle AOB$

łuk. Podobnie stawiammy cyrkiel w punkcie B i zakreślamy łuk. Punkt przecię cia łuków oznaczamy literą P. Przez punkty O i P prowadzimy dwusieczną kąta

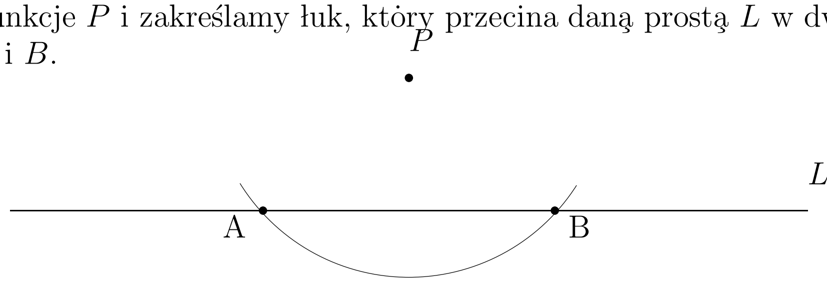


Zadanie 18.5 *Poprowadź dwusieczną kąta α danego niżej na rysunku przy pomocy cyrkla i linijki.*

Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej L. Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej L i przechodzącej przez dany punkt P oparta jest na rysowaniu równoległoboku.

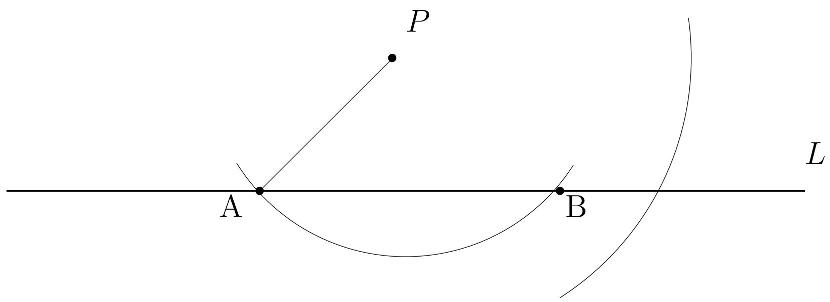


Opis konstrukcji. W pierwszym kroku konstrukcji stawiamy cyrkiel w danym punkcje P i zakreślamy łuk, który przecina daną prostą L w dwóch punktach A i B.

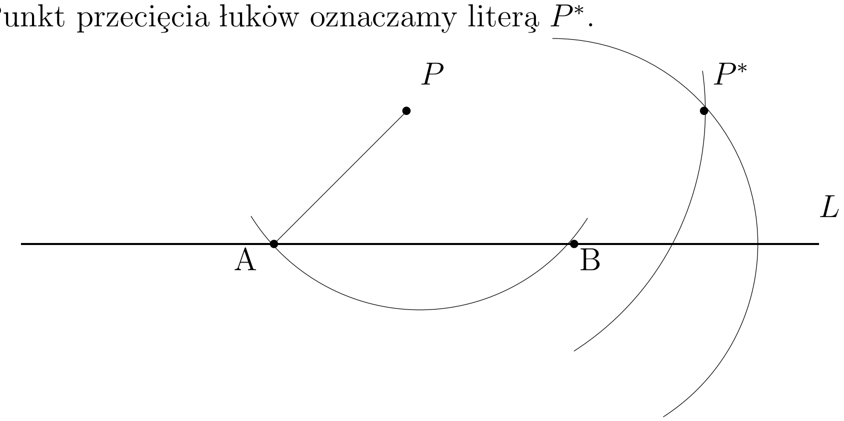


W drugim kroku konstrukcji łączymy punkt A przecięcia z danym punktem P

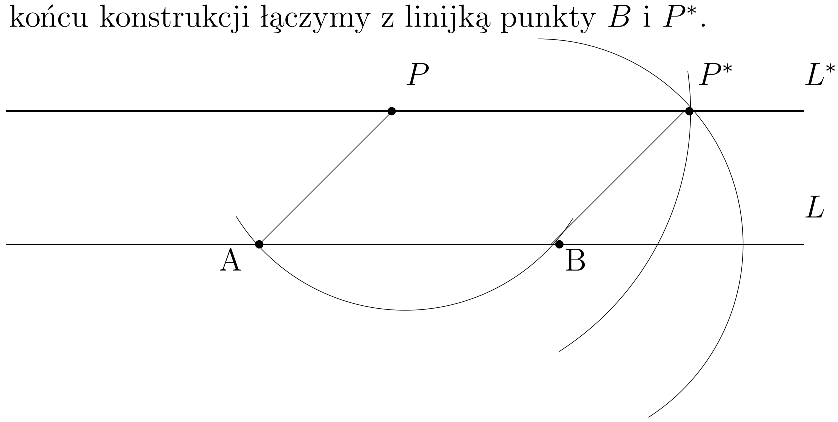
linijką. Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie B i rozwartością cyrkla równą odległości $|AP|$ punktu A od punktu P zakreślamy łuk.



W trzecim kroku konstrukcji stawiamy cyrkiel w punkcie P i rozwartością cyrkla równą odległości $|AB|$ punktu A od punktu B zakreślamy drugi łuk. Punkt przecięcia łuków oznaczamy literą P^*.

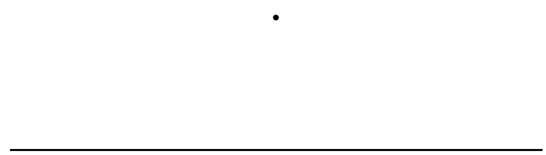


W czwartym kroku konstrukcji, rysyjemy z linijką prostą przez punkty P i P^*. W końcu konstrukcji łączymy z linijką punkty B i P^*.



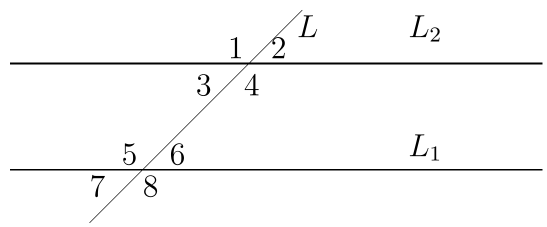
Widzimy, że w ten sposób narysowaliśmy równoległobok $ABPP^*$, którego bok $[P, P^*]$ leży na prostej L^* równoległej do prostej L przechodzącej przez dany punkt P.

Zadanie 18.6 *Narysuj prostą równoległą do prostej na rysunku i przechodzącej przez dany ponkt*



18.4.4 Dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą

Rozpatrzmy dwie proste równoległe L_1 i L_2 przecięte trzecią prostą L. Niżej na rysunku mamy zaznaczone kąty parami równe



Dwie linie proste równoległe L_1 i L_2 przecięte trzecią prostą L

- kąty wierzchołkowe parami równe

$$\angle 1 = \angle 4, \quad \angle 2 = \angle 3, \quad \angle 5 = \angle 8, \quad \angle 6 = \angle 7$$

- kąty odpowiadające parami równe

$$\angle 1 = \angle 5, \quad \angle 3 = \angle 7, \quad \angle 2 = \angle 6, \quad \angle 4 = \angle 8$$

- kąty naprzemianległe wewnętrzne parami równe

$$\angle 3 = \angle 6, \quad \angle 4 = \angle 5,$$

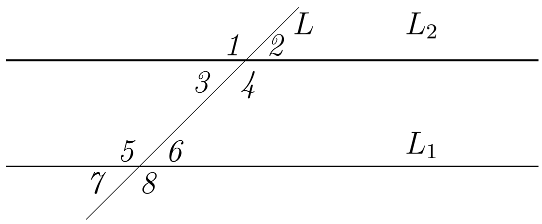
- kąty naprzemianległe zewnętrzne parami równe

$$\angle 1 = \angle 8, \quad \angle 2 = \angle 7,$$

- kąty przyległe, których suma równa jest 180^o

$\angle 1$ *przylega do* $\angle 2$, $\angle 3$ *przylego do* $\angle 4$, $\angle 1$ *przylega do* $\angle 3$,
$\angle 2$ *przylega do* $\angle 4$, $\angle 5$ *przylega do* $\angle 6$, $\angle 7$ *przylega do* $\angle 8$,
$\angle 5$ *przylega do* $\angle 7$, $\angle 6$ *przylega do* $\angle 8$

Zadanie 18.7 *Jeden z kątów wierzchołkowych równy jest* 30^0.



Dwie linie proste równoległe przecięte trzecią prostą

Oblicz wszystkie kąty
(a) wierchołkowe
(b) naprzemian ległe
(c) odpowiadające
(d) przyległe wewnętrzne
(e) przyległe zewnętrzne
Zaznacz wartości wszystkich kątów na rysunku

18.5 Okrąg i koło

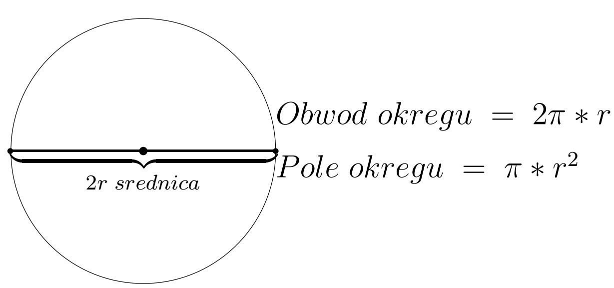
Obszar wewnątrz okręgu nazywamy kołem.

Obwód okręgu

$$O_{obwod} = 2 * \pi * r,$$

pole koła

$$P_{okregu} = \pi * r^2, \qquad \pi \approx \frac{314}{100} = 3.14.$$

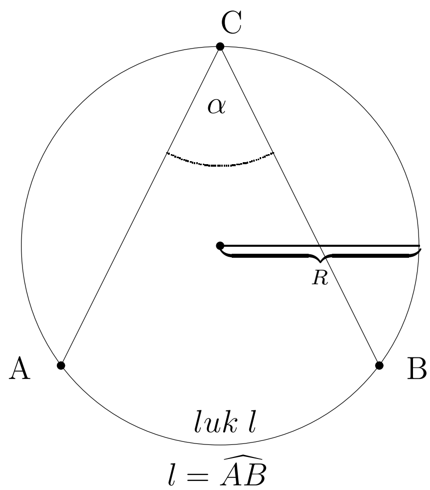


średnica okręgu równa jest 2 razy promień okręgu.

Zadanie 18.8 *Narysuj cyrklem okrąg o promieniu 3cm. Zaznacz kredką wnętrze okręgu jako koło o promieniu 3cm.*
Oblicz średnicę okręgu, obwód okręgu, pole koła.

18.5.1 Miara łukowa kąta

Rozpatrzmy okrąg o promieniu R



Miarę łukową kąta $\alpha = \angle BCA$ opartym na łuku $l = \widehat{AB}$ określamy jako stosunek długości łuku l do promienia R

$$\alpha = \frac{l}{R}$$

Kąt pełny, który w mierze kątowej ma 360^0 oparty jest na łuku

$$l = 2\pi * R$$

równym obwodowi okręgu.
Zatem miara łukowa kąta pełnego równa jest

$$\alpha = \frac{2\pi * R}{R} = 2\pi$$

Podobnie kąt półpełny, który w mierze kątowej ma 180^0 oparty jest na łuku

$$l = \pi * R$$

równym połowie obwodu okręgu. To znaczy, że miara łukowa kąta półpełnego równa jest

$$\alpha = \frac{\pi * R}{R} = \pi$$

Również kąt prosty, który w mierze kątowej ma 90^0 oparty jest na łuku

$$l = \frac{2\pi * R}{4} = \frac{\pi * R}{2}$$

równym czwartej części obwodu okręgu. To znaczy, że miara łukowa kąta prostego równa jest

$$\alpha = \frac{\pi * R}{2R} = \frac{\pi}{2}$$

W istocie, miara łukowa kąta nie zależy od długowci promienia R. Dlatego możemy przyjąć promień okręgu $R = 1$.
Jednostką miary łukowej kąta jest 1 radian. Kąt pełny ma $2 * \pi$ radianów, któremu w mierze kątowej odpowiada kąt 360^0. Zatem, jeden stopnień

$$1^0 \; = \frac{2 * \pi}{360} = \frac{\pi}{180} radianow$$

natomiast

$$1 \; radian = \frac{180^0}{\pi} \; \; stopni$$

Przykład 18.1 *Oblicz miarę łukową kąta* 30^0*.*
Rozwiązanie. *Korzytamy z proporcji, kątowi* 180^0 *odpowiada miara łukowa tego kąta* π *radianów. Zatema kątowi* 30^0 *odpowiada miara łukowa* x *radianów. Tą proporcję zapisujemy równaniem*

$$\frac{\pi}{180} = \frac{x}{30}$$

Skąd obliczamy miarę łukową kąta 30^0

$$x = \frac{30 * \pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

Zadanie 18.9 *Oblicz miarę łukwą kąta* α*, jeżeli jego miara kątowa równa jest*

$$(i) \qquad \alpha = 30^0$$

$$(ii) \qquad \alpha = 60^0$$

$$(iii) \qquad \alpha = 120^0$$

Zadanie 18.10 *Ile stopni ma kąt* α*, jeżeli jego miara łukowa równa jest*

$$(i) \qquad \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$(ii) \quad \alpha = \frac{5\pi}{4}$$

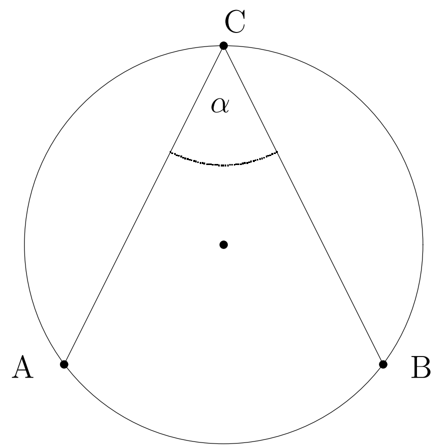
$$(iii) \quad \alpha = \frac{4\pi}{3}$$

$$(iv) \quad \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

$$(iii) \quad \alpha = \frac{7\pi}{6}$$

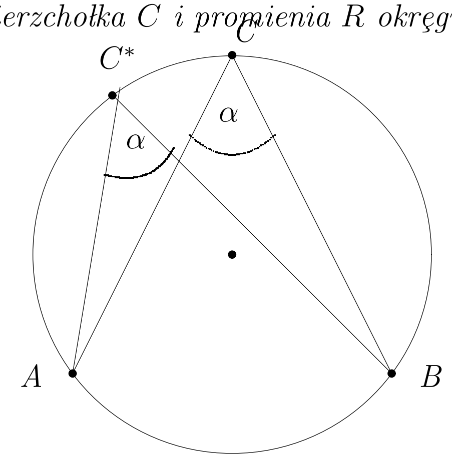
18.5.2 Kąt wpisany w okrąg i kąt środkowy

kąt wpisany e okrąg **Kąt wpisany.** Kątem wpisanym α nazywamy kąt, którego wierzchołek C leży na okręgu a ramiona AC i BC przecinają okrąg w punktach A i B



Z określenia miary łukowej i miary kątowej wiemy, że wartość kąta wpisanego $\angle BCA = \alpha$ nie zależy od wielkości promienia R. Zatem zakładamy, że promień $R = 1$.

Lemma 18.1 *Wartość kąta $\angle BCA = \alpha$ wpisanego w okrąg jest stała niezależna od położenia wierzchołka C i promienia R okręgu o środku w punkcie O.*



Położenie kąta $\Delta BCA = \alpha$ wpisanego w okrąg w pozycji $C^* = \angle BC^*A = \alpha$, nie zmienia wartości α kąta wpiesanego w okrąg.
Istotnie kąt wpisany α o wierzchołku w punkcie C i o ramionach AC i BC przecina okrąg w punktach A i B. Kąt α oparty jest na łuku $l = \widehat{AB}$ radianów, w mierze kątowej równy jest

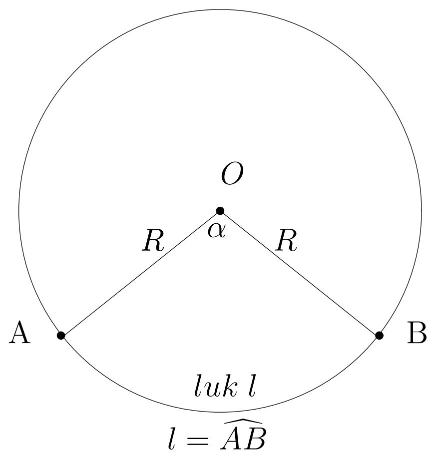
$$\alpha = \frac{l * \pi}{180^0}.$$

Jeżeli wierzchołek C porusza się po okręgu w kierunku punktu A to kąt wpisany

$\alpha = \dfrac{l * \pi}{180^0}$, nie zmienia warotości, ponieważ długość łuku $l = \widehat{AB}$ pozostaje ta sama.
Jednak, jeżeli wierzchołek C pokryje się z punktem A to ramie AC zredukuje się do punktu A. Wtedy kąt wierzchołkowy α jest nieokreślony. Jeżeli wierzchołek C przekroczy punt A i dalej porusza się w kierunku punktu B to wtedy kąt wpisany α będzie oparty na łuku o długości $2\pi - l$, a jego miara kątowa

$$\alpha = \frac{(2\pi - l) * 180^0}{\pi}.$$

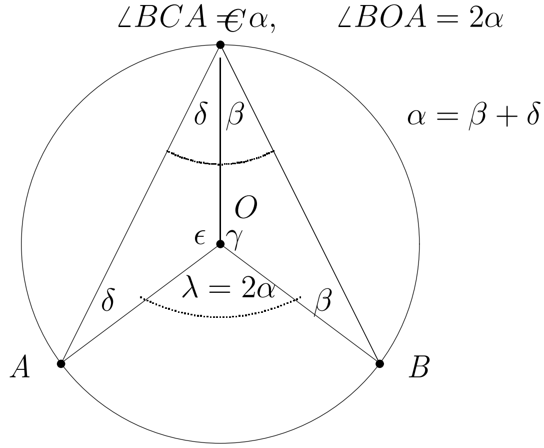
Kąt środkowy. Kątem środkowym nazywamy kąt pomiędzy promieniami okręgu $R = |AO|$ i $R = |BO|$ o wierzchołku w środku okręgu O.



18.5.3 Związek pomiędzy kątem środkowym i kątem wpisanym

Twierdzenie 18.2 *Kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany w okrąg jest dwa razy wiekszy od kąta wpisanego. Zatem mamy równość*

$$\angle BCA = \alpha, \qquad \angle BOA = 2\alpha$$



Podamy dwa dowody twierdzenia o kącie wpisanym i kącie środkowym.
Dowód 1. Z lematu 1 wiemy, że wartość kąta wpisanego α nie zależy od

położenia jego wierzchołka C na okręgu.
Zatem możemy przyjąć położenie wierzchołka C na średnicy okręgu przechodzącej przez wierzchołek C i środek okręgu O.
Promienie okręgu $AO,\ BO$ i CO tworzą trójkąty ΔAOC i ΔBCO równorammienne i przystające.
Zatem ich kąty $\beta,\ \gamma$ i kąt środkowy $\angle BOA = \lambda$ spełniają równania

$$\alpha = 2\beta,$$

$$\gamma + 2\beta = \pi$$

$$2\gamma + \lambda = 2\pi.$$

Skąd obliczamy kąt środkowy

$$\lambda = 2\pi - 2\gamma = 2\pi - 2\underbrace{(\pi - 2\beta)}_{\gamma} = 4\beta = 2\alpha.$$

Dowód 2. Najpierw dowód podamy w przypadku, gdy środek okręgu O leży pomiędzy ramionami AC i BC kąta wpisanego $\angle BCA = \alpha$, następnie w przypadku, gdy środek okręgu O leży poza ramionami kąta wpisanego.
W przypadku pierwszym zauważamy, że trójkąty równoramienne ΔAOC, ΔBCO o ramionach równych promieniowi okręgu R mają kąty przy podstawach kąty równe. Trójkąt ΔAOC ma przy podstawie AC kąty równe δ i trójkąt ΔBCO ma przy podstawie BC kąty równe β. Kąt wpisany $\angle BCA = \alpha$ oznaczamy literą grecką α, a kąt środkowy $\angle AOB$ oznaczamy literą grecką λ, jak na rysunku.
Następnie zauważamy, że kąty $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \lambda$ spełniają układ równań liniowych

$$\begin{array}{ll} \alpha = \beta + \delta, & \angle BCA \ \mathit{wpisany}\ \alpha \\ 2\beta + \gamma = \pi, & \mathit{suma\ katow\ w\ trojkacie}\ \Delta\ BCO\ \mathit{rowna}\ \pi \\ 2\delta + \epsilon = \pi, & \mathit{suma\ katow\ w\ trokacie}\ \Delta\ AOC\ \mathit{rowna}\ \pi \\ \gamma + \epsilon + \lambda = 2\pi, & \mathit{kat\ pelny\ rowny}\ 2\pi \end{array} \tag{18.3}$$

Układ równań liniowych (18.3) rozwiążemy metodą podstawiania.
Mianowicie, z równanania drugiego i trzeciego w układzie (18.3) obliczamy

$$\gamma = \pi - 2\beta,$$
$$\epsilon = \pi - 2\delta$$

Skąd suma kątów

$$\gamma + \epsilon = 2\pi - 2(\beta + \delta)$$

Z równania czwartego w układzie równa(18.3) obliczamy kąt środkowy

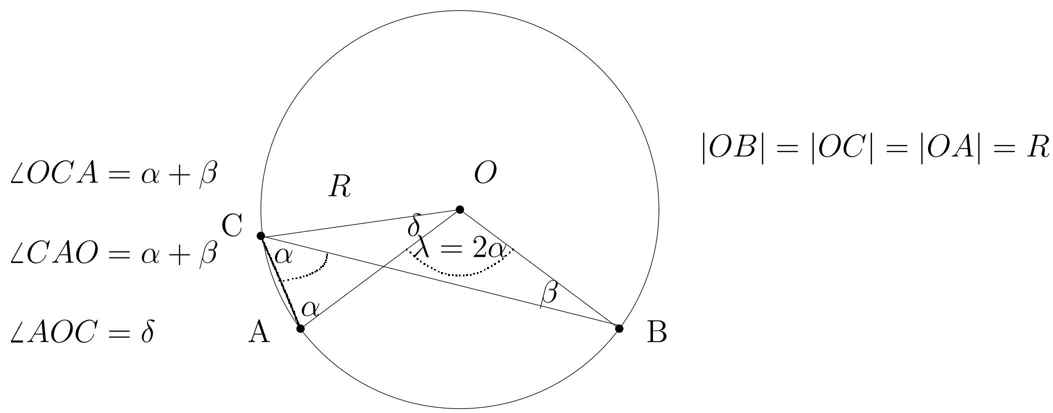
$$\lambda = 2\pi - (\gamma + \epsilon) = 2\pi - \underbrace{(2\pi - 2(\beta + \delta))}_{\gamma+\epsilon} = 2\underbrace{(\beta + \delta)}_{\alpha} = 2\alpha$$

Zatem, obliczyliśmy, że kąt środkowy λ jest dwa razy większy od kąta wpisanego α, piszemy

$$\lambda = 2\alpha$$

Koniec dowodu przypadku pierwszego.

Dowód. Dowód w przypadku drugim, gdy środek okręgu O leży poza ramionami AC i BC kąta wpisanego $\angle BCA = \alpha$.



Zauważamy, że trójkąty równoramienne ΔAOC i ΔBOC o ramionach równych promieniowi okręgu R mają przy podstawach $[AC]$ i $[CB]$ kąty równe, odpowiednio

$$\angle OCA = \angle CAO = \alpha + \beta \quad i \quad \angle CBO = \angle OCB = \beta.$$

Suma kątów w trójkątach ΔAOC i BOC równa jest 180^0 lub π, piszemy

$$\begin{array}{ll} \underbrace{\angle OCA + \angle CAO}_{2(\alpha+\beta)} + \underbrace{\angle AOC}_{\delta} = \pi & 2(\alpha+\beta) + \delta = \pi \\ \underbrace{\angle OBC + \angle OCB}_{2\beta} + \underbrace{\angle BOC}_{\delta+\lambda} = \pi & 2\beta + \delta + \lambda = \pi \end{array} \tag{18.4}$$

Układ równań liniowych (18.4) rozwiążemy metodą podstawiania. Mianowicie, z pierweszgo równania obliczamy

$$\delta = \pi - 2(\alpha + \beta)$$

i podstawiamy do równania drugiego

$$2\beta + (\pi - 2(\alpha + \beta)) + \lambda = \pi, \qquad \lambda - 2\alpha = 0.$$

Skąd kąt środkowy $\angle BOA = 2\alpha$ jest dwa razy większy od kąta wpisanego $\angle OCA = \alpha$, piszemy

$$\lambda = 2\alpha$$

lub

$$\angle BOA = 2\angle OCA.$$

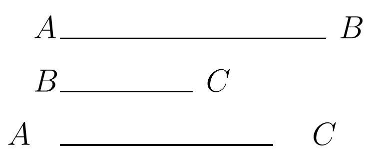
Koniec dowodu przypadku 2.

Wniosek: Kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest prosty, ma 90^0, w mierze łukowej ma $\frac{\pi}{2}$ radianów.

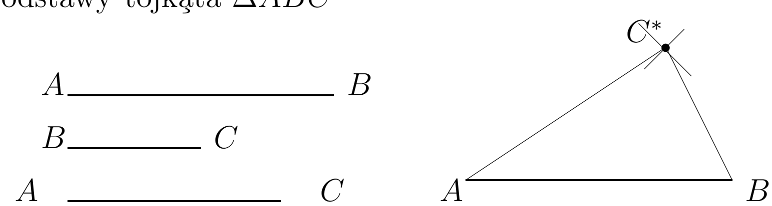
18.6 Trójkąty

18.6.1 Konstrukcja trójkąta o danych bokach

Niech będą dane trzy odcinki $[A, B]$, $[B, C]$, i $[A, C]$



Wybierzmy odcinek $[AB]$ jako podstawę trójkąta ΔABC. Rozwartością cyrkla równą dłu gości odcinka $[A, C]$ zakreślamy łuk stawiając cyrkiel w punkcie A. Następnie rozwartością cyrkla równą długości odcinka $[B, C]$ zakreślamy łuk stawiając cyrkiel w punkcie B. Punkt przecięcia łuków C^* łączymy z punktami A i B podstawy tójkąta ΔABC^* [9]



Zauważmy, że trójkąt można zbudować z odcinków, które spełniają następującą nierówność trójkąta
Suma długości dwóch boków trójkąta jest większa od długości boku trzeciego, piszemy

$$|AB| + |BC| \geq |AC|,$$

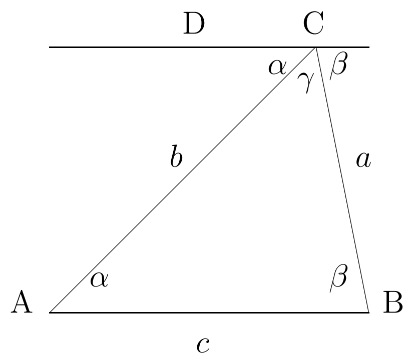
$$|AB| + |AC| \geq |BC|,$$

$$|AC| + |BC| \geq |AB|$$

18.6.2 Suma kątów trójkąta

Suma kątów każdego trójkąta równa jest 180^0, w mierze łukowej π radianów. Niżej rozpatrzmy geometryczną interpretaje sumy kątów trójkąta.

[9] Odcinek o początku w punkcie A i końcu w punkcie B oznaczamy symbolem $[A, B]$



Z rysunku, zauważamy, że suma kątów każdego trójkąta równa jest 180^0. Rzeczywiście, prosta DC jest równoległa do podstawy AB trójkąta ABC . Kąty naprzemianległe wewnętrzne α przy podstawie i α przy odcinku DC są równe, podobnie β przy podstawie AB i β przy odcinku DC są równe. Widzmy, że

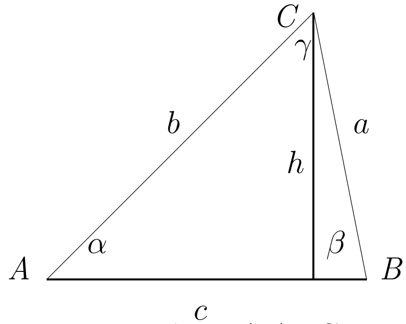
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

To znaczy, że suma kątów każdego trójkąta równa jest 180^0.

18.6.3 Konstrukcja trójkąta o tych samych kątach i o bokach proporcjonalnych.

Na płaszczyżnie wybieram trzy różne punkty A, B i C i łączymy te punkty używając linijki. W ten sposób narysowaliśmy trójkąt. Boki AB i AC przedłużamy. Na przedłużonych bokach odkładamy odcinki równe długości boków AB i AC, odpowiednio. Łączymy zaznaczone końce odcinków. Widzimy, że w ten sposób narysowaliśmy drugi trójką który ma kąty te same co wcześniej narysowny trójkąt, natomiast boki ma dwa razy dłuższe. Rzeczywiście, oba trójkąty mają te same kąty, ponieważ bok BC jest równoległy odpowiedniego boku większego trójkąta, jako kąty odpowiadające.

Przykład 18.2 *Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy dłuższych używając linijki i cyrkla. Zmierz kąty tego trójkąta. Oblicz sumę kątów tego trójkąta.*



$Trojkata\ \Delta ABC$

Pole trójkąta

$$P_\Delta = \frac{a * h}{2}$$

Obwód trójkąta

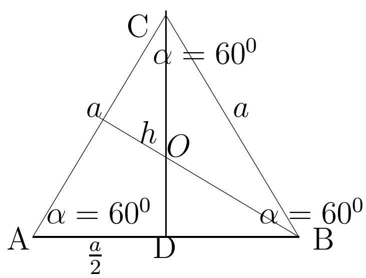
$$Ob_{\Delta} = a + b + c.$$

Rozróżniamy następujące trójkąty: trójkąty równoboczne, trójkąty równoramienne, trójkąty prostokątne i trójkąty dowolne.

18.6.4 Trójkąt równoboczny.

Trójkąt równoboczny ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe $\alpha = 60^0$, w mierze łukowej $\alpha = \frac{\pi}{3}$ jak na rysunku

Konstrukcja trójkąta równobocznego. Rysujemy odcinek o ustalonej długości boków trójkąta. Stawiamy nóżkę cyrkla na początku odcinka i zakreślamy okrąg o promieniu równym długości odcinka. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla na drugim końcu odcinka i tym samym promieniem zakreślamy okrąg. Łączymy punkt przecięcia okręgów z końcami odcinka. Widzimy, że w ten spoób powstał trójkąt o równych bokach i równych kątach.



$Trojkat\ rownoboczny\ \Delta ABC$

Wysokość h trójkąta $\Delta\ ABC$ jest dwusiecznną kąta α i dzieli podstawę a na połowę w punkcie D. Podobnie wysokości trójkąta równobocznego spuszczone na pozostałe boki dzielą ich na połowy i przecinają się w jednym punkcie O. Punkt przecięcia wysokości O dzieli te wysokości w stosunku $1 : 3$. To znaczy zachodzi następująca proporcja

$$\frac{|DO|}{|DC|} = \frac{1}{3}, \quad |DC| = h$$

Stąd mamy

$$|DO| = \frac{1}{3}h, \quad \text{i} \quad |OC| = \frac{2}{3}h$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość h trójkąts $\Delta\ ABC$

$$h^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

Wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

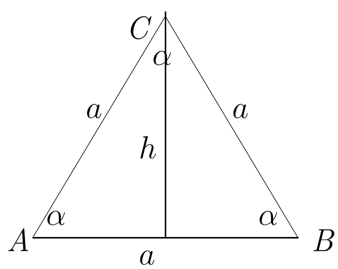
Obliczamy pole trójkąta równobocznego

$$P = h * \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole trójkąta równobocznego o boku a

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Zadanie 18.11 *Zmierz boki i kąty trójkąta ΔABC niżej na rysunku*



(i) *Oblicz pole i obwód trójką równoramiennego ΔABC, o boku $a = 3cm$.*
(ii) *Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy dłuższych używając linijki i cyrkla.*
(iii) *Zmierz kąty i oblicz sumę kątów tego trójkąta.*

18.6.5 Trójkąt równoramienny

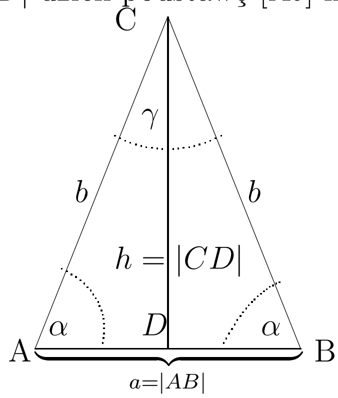
Trójkąt równoramienny o podstawie równej odcinkowi $[A, B]$ i równych ramionach $[A, C] = [B, C]$ ma przy podstawie $[A, B]$ kąty równe $\angle CAB = \angle ABC = \alpha$.
Wysokość $h = |CD|$ dzieli podstawę $[A, B]$ na połowę.
Kąt przy wierzchołku C w mierze kątowej

$$\beta = 180^0 - 2 * \alpha$$

lub w mierze łukowej

$$\beta = \pi - 2 * \alpha$$

Wysokośċ $h = |CD|$ dzieli podstawę $[Ab]$ na połowę



Pole trȯjkąta rȯwnoramiennego ΔABC obliczamy stosując wzȯr ogȯlny

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\underbrace{|AB| * |CD|}_{a*h} = \frac{1}{2}a * h.$$

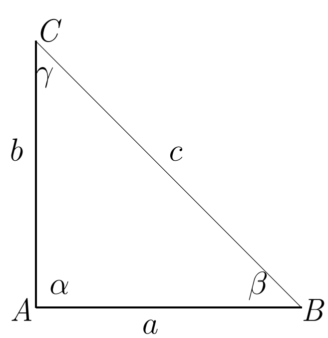
Zadanie 18.12 *Zmierz boki i kąty trȯjkąta rȯwnoramiennego ΔABC. Oblicz obwȯd, pole i sumę kątȯw trȯjkąta rẇnoramiennego, jeżeli długość jego podstawy $|AB| = 3cm$, a rȯwne ramiona $|AC| = |BC| = 4cm$.*

18.6.6 Trȯjkąt prostokątny

Pole trȯjkąta $= \dfrac{a*b}{2}$, obwȯd trȯjkąta $=a + b + c$

W trȯjkącie prostokątnym wyrȯżniamy przyprostokątne AB i AC, o długości a i b, przeciwprostokątną BC, o długości c, kąt prosty $\alpha = 90^0$ i dwa kąty przyległe β, γ

Zadanie 18.13 *Zmierz boki i kąty tego trȯjkąta.*



Trȯjkąt prostokątny ΔABC

Narysuj trȯjkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy krȯtszych używając linijki i cyrkla. Oblicz sumę kątȯw tego trȯjkąta

18.7 Cechy przystawania i podobieństwo trójkątów

18.7.1 Trójkąty przystające

Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe. Jasne, że na to żeby dwa trójkąty były przystające wystarczy, żeby miały równe boki, gdyż wtedy automatycznie wszystkie kąty muszą mieć równe. O tym mówi pierwsza cecha przystawania trójkcatów.
Pierwsza checha przystawania trójkątów. Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają wszystkie boki równe.
Narysuj trójkąt o tych samych o bokach używając linijki i cyrkla. Zmierz kąty tego trójkąta. Oblicz sumę kątów tego trójkąta

Druga cecha przystawania trójkątów. Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają dwa boki równe i kąty przyległe do tych boków równe. Sprawdzamy, że wtedy pozostałe boki muszą być równe i kąty też równe.
Trzecia cecha przystawania trójkątów. Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają dwa boki równe i kąt pomiędzy tymi bokami równy.

18.7.2 Trójkąty podobne

Dwa trójkąty ΔABC i $A^{'}B^{'}C^{'}$ są podobne, piszemy

$$\Delta ABC \simeq \Delta A^{'}B^{'}C^{'}$$

jeżeli mają opowiednie boki proporcjonalne w skali proporcji k, to znaczy

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = k,$$
$$|AB| = k * |A^{'}B^{'}|,$$
$$|AC| = k * |A^{'}C^{'}|,$$
$$|BC| = k * |B^{'}C^{'}|.$$

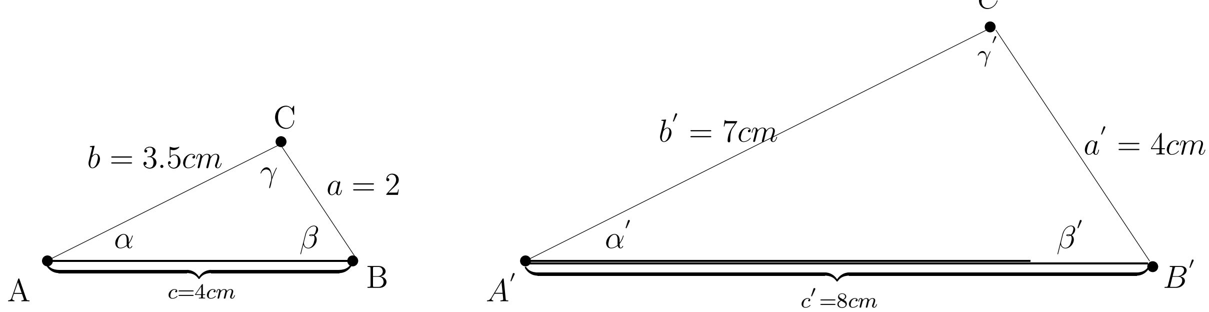
Rozpatrzmy trójkąt ΔABC o bokach

$$|AB| = c = 4cm, \quad |BC| = c = 2cm, \quad |AC| = b = 3.5cm$$

i trójkąt $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ o bokach

$$|A^{'}B^{'}| = c^{'} = 8cm, \quad |B^{'}C^{'}| = c^{'} = 4cm, \quad |A^{'}C^{'}| = b = 7cm$$

Zauważmy, że skala proporcji trójkątów ΔABC i $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ jest równa $k = 2$.



Niżej podamy trzy cechy podobieństwa trójkątów.

Pierwsza chacha podobieństwa trójkątów. Dwa trójkąty ΔABC i $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ są podobne, jeżeli mają wszystkie boki proporcjonalne w skali proporcji k, to znaczy

$$|AB| = k * |A^{'}B^{'}|,$$

$$|AC| = k * |A^{'}C^{'}|,$$

$$|BC| = k * |B^{'}C^{'}|.$$

Zadanie 18.14 *Narysuj trójkąt ΔABC o bokach*

$$|AB| = c = 5cm, \qquad |AC| = b = 4cm, \qquad |BC| = a = 3cm$$

używając linijki i cyrkla.

Narysuj drugi trójkąt $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ o bokach dwa razy większych od boków trójkąta ΔABC.

Druga cecha podobieństwa trójkątów. Dwa trójkąty ΔABC i $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ są podobne, jeżeli mają dwa boki proporcjonalne w skali proporcji k i kąty pomiędzy tymi bokami równ, to znaczy $\alpha = \alpha^{'}$

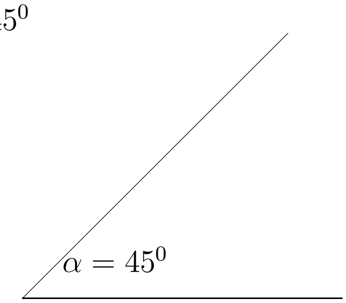
$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = k,$$
$$|AB| = k * |A^{'}B^{'}|,$$

$$|AC| = k * |A^{'}C^{'}|,$$

Zadanie 18.15 *Narysuj trójkąt ΔABC o bokach*

$$|AB| = c = 3cm, \qquad |AC| = b = 5cm,$$

danym kącie $\alpha = 45^0$



używając linijki i cyrkla.

Narysuj drugi trójkąt $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ *o bokach dwa razy większych od boków trójkąta* ΔABC.

Trzecia cecha przystawania trójkątów.
Dwa trójkąty ΔABC i $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ są podobne, jeżeli mają boki AB i $A^{'}B^{'}$ proporcjonalne w skali k i kąty do nich przyległe równe, to znaczy $\alpha = \alpha^{'}$ i $\beta = \beta^{'}$ oraz boki AB i $A^{'}B^{'}$ w skali k

$$\frac{|AB|}{|A^{'}B^{'}|} = k,$$
$$|AB| = k * |A^{'}B^{'}|.$$

Zadanie 18.16 *Narysuj trójkąt* ΔABC *o boku*

$$|AB| = c = 6cm,$$

i danych kątach przyległych $\angle\alpha = 30^0$, $\angle\beta = 60^0$ *do boku* AB.

Narysuj drugi trójkąt $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ *o bokach dwa razy większych od boków trójkąta* ΔABC.

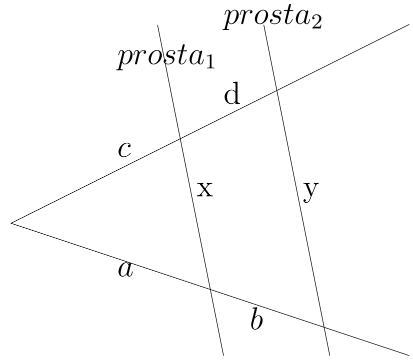
18.7.3 Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta

Jeżeli $prosta_1 \; || \; prosta_2$ to :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$
$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{x}{y}$$

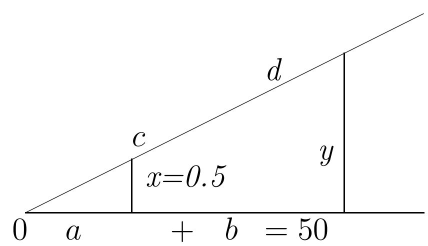
Interpretacja geometryczna powyższej proporcji podana jest niżej na rysunku



Przykład 18.3 *Oblicz wysokość drzewa z odległości 50m. Stosując twierdzenie Talesa obliczamy wysokość drzewa y z proporcji*

$$\frac{a}{a+b} = \frac{x}{y}, \quad y = \frac{(a+b)*x}{a}$$

Dane: $a + b = 50m$, *Dokonujemy pomiarów* $a = 2m$, $x = 0.5m$ *do proporcji, zobacz na rysunku.*



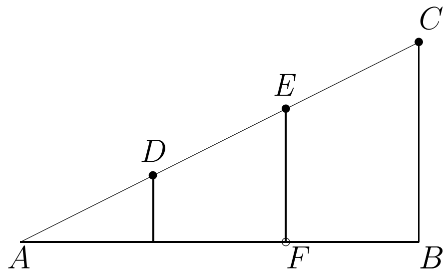
$$\textit{Podstawiając dane obliczamy wysokość drzewa } y = \frac{(a+b)*x}{a} = \frac{50*0.5}{2} = 12.5$$

Twierdzenie Talesa stosujemy w zadaniach dzielenia odcinka w danej proporcji.

Przykład 18.4 *Podzielić odcinek AB w stosunku* $2:3$
Rozwiązanie. *Na ramieniu AC zaznaczamy dowolną rozwartością cyrkla trzy punkty D, E i punkt C. Następnie, łączymy punkt C z punktem B używając linijki. Rysujemy równoległe do odcinka BC przechodzące przez punkty D i E. W ten sposób dostajemy podział odcinka AB punktem F w stsunku* $2:3$, *Zatem, z twierdzenia Talesa mamy proporcje*

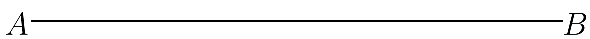
$$\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{2}{3}$$

Interpretacja geometryczna tej proporcji podana jest niżej na rysunku



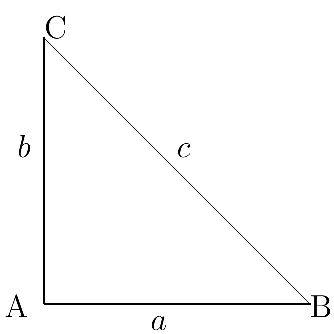
Zadanie 18.17 *Oblicz wysokość drzewa z odległości 150m, wiedząc, że wysokość listwy geodezyjnej równa jest 2m i jej odległość od punktu pomiaru 10m.*

Zadanie 18.18 *Podzielić odcinek AB w stosunku* $1 : 3$



18.7.4 Twierdzenie Pitagorasa

Figury płaskie, twierdzenie Pitagorasa, wielokąty foremne, okrąg: kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg, miara łukowa k ątów, konsrukcje figur płaskich, figury przestrzenne granastosłupy proste, walce, stożki, ostrosłupy, sfery i kule, obliczanie objętości i pola powierzchni.
Związki miarowe w trójkącie prostokątnym wynikają ztwierdzenia Pitagorasa.



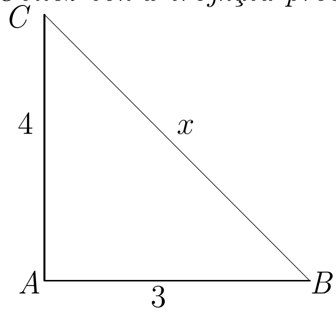
Trójkąt prostokątny ΔABC

Twierdzenie 18.3 *W trójkącie prostokątnym suma kwadratów przyprostokątnych równa jest kwadratowi przeciwprostokątnej*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

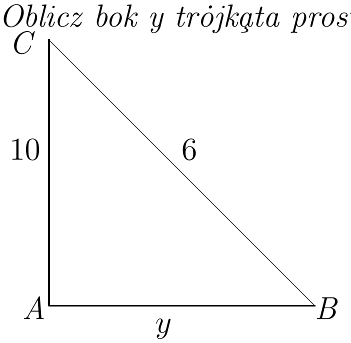
Tutaj przez a i b oznaczone są przyprostokątne, literą c oznaczona jest przeciwprostokątna

Przykład 18.5 *Oblicz bok x trójkąta prostokątnego*



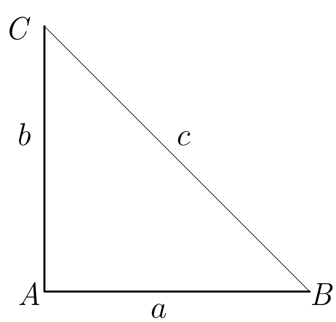
Trójkąt prostokątny ΔABC

Przykład 18.6 *Oblicz bok y trójkąta prostokątnego*



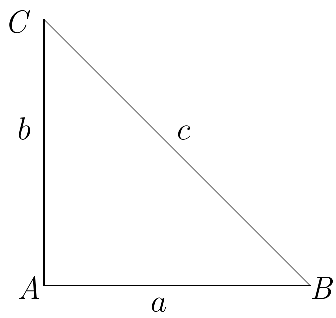
Trójkąt prostokątny ΔABC

Przykład 18.7 *Oblicz przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, wiedząc, że przyprostokątne $a = 9,\ b = 12$*



Trójkąt prostokątny ΔABC

Przykład 18.8 *Oblicz wszystkie boki trójkąta prostokątnego, wiedząc, że przyprostokątna $a = 12cm$, przyprostokątna b jest o $4cm$ dłuższa od przyprostokątnej* *a, natomiast przeciwprostokątna c jest dłuższa o* $8cm$ *od przyprostokątnej a.*



Trójkąt prostokątny ΔABC

18.7.5 Wzór Herona. Związek pomiędzy obwodem i polem trójkąta.

Obwód trójkąta ΔABC równy jest sumie długości jego boków

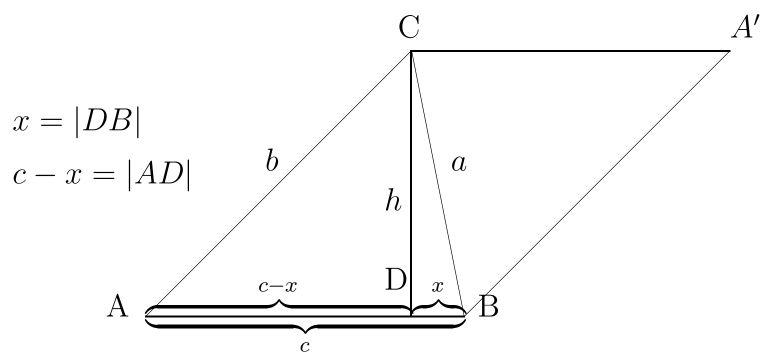
$$Ob = |AB| + |AC| + |CA| \quad lub \quad Ob = a + b + c$$

Pole trójkąta ΔABC obliczmy stosując wzór Herona. [10]
Wzór Herona.

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie połowa obwodu $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Dowód. Rozpatrzmy dwa trójkąty identyczne ΔABC i $\Delta BA^{'}C$, jak na rysunku



Zauważmy, że pole równoległoboku $ABA^{'}C$ równe jest

$$P_{ABA'C} = c * h$$

Wysokość $h = |DC|$ obliczamy z twierdzenienia Pitagorasa. Mianowiecie, z twierdzenia Pitagorasa wynikają następujące związki
Z trójkąta prostokątnego ΔADC mamy równość

$$h^2 = b^2 - (c-x)^2$$

[10]Wzór Herona stosujemy do trójkąta ΔABC o różnej długości boków

Podobnie z trójkąta prostokątnego $\Delta DA^{'}C$

$$h^2 = a^2 - x^2$$

Skąd obliczamy długość odcinka $x = |AD|$

$$b^2 - (c-x)^2 = a^2 - x^2$$

$$b^2 - c^2 + 2c * x - x^2 = a^2 - x^2$$

$$2c * x = a^2 - b^2 + c^2$$

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$$

Teraz obliczamy kwadrat wysokości równoległoboku $ABA^{'}C$ stosując wzory uproszczonego mnożenia

$$\begin{aligned}
h^2 = a^2 - x^2 &= a^2 - (\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c})^2 \\
&= \frac{4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4c^2} \\
&= \frac{(2ac)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4c^2} \\
&= \frac{(2ac - a^2 + b^2 - c^2)(2ac + a^2 - b^2 + c^2)}{4c^2} \\
&= \frac{(b^2 - (a-c)^2)((a+c)^2 - b^2)}{4c^2} \\
&= \frac{(b - a + c)(b + a - c)((a + c - b)(a + c + b)}{4c^2} \\
&= \frac{(a + b + c - 2a)(a + b + c - 2c)((a + b + c - 2b)(a + c + b)}{4c^2} \\
&= \frac{2(p-a)2(p-c)2(p-b)2p}{4c^2}, \qquad p = \frac{a+b+c}{2} \\
&= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}, \qquad p = \frac{a+b+c}{2}
\end{aligned}$$

Pole trójkąta ΔABC o danej długości boków równe jest połowie pola równoległoboku $ABA^{'}C$. Zatem mamy wzór Herona na pole trójkąta ΔABC

$$\begin{aligned}
P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} c * h &= \frac{c}{2}\sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}} \\
&= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
\end{aligned}$$

Przykład 18.9 *Oblicz obwód i pole trójkąta ΔABC o długości boków*

$$a = |AB| = 3cm, \quad b = |CA| = 4cm, \quad c = |AB| = 5cm$$

Rozwiązanie. Obwód trójkąta ΔABC równy jest sumie długości jego boków

$$Ob = a + b + c = 3cm + 4cm + 5cm = 12cm,$$

polowa obwodu

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3cm + 4cm + 5cm}{2} = 6cm,$$

Pole trójkąta ΔABC obliczamy stosując wzrór Herona

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{6cm(6cm-3cm)(6cm-4cm)(6cm-5cm)} \\ &= = \sqrt{6*3*2*1cm^4} = \sqrt{36cm^4} = 6cm^2. \end{aligned}$$

Zadanie 18.19 *Oblicz obwód i pole trójkąta ΔABC o długości boków*

$$a = |AB| = 6cm, \quad b = |CA| = 8cm, \qquad c = |AB| = 10cm$$

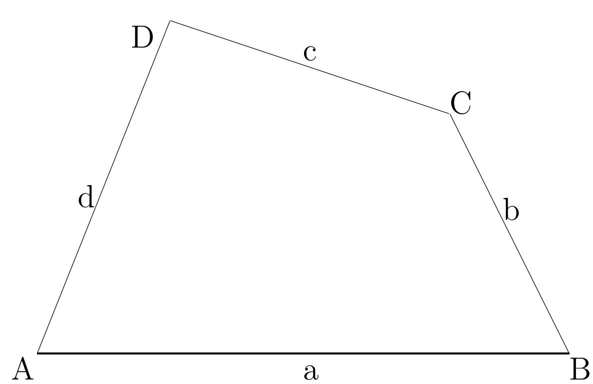
18.8 Czworokąty

Rozpatrzmy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A,\ B,\ C,\ D$ o czterech bokach długości $a,\ b,\ c,\ d$, i o kącie $\angle ABC$ o wierzchołku B, kątcie $\angle BCD$ o wierzchołku C, kątcie $\angle CDA$ o wierzchołku D.
Suma długości dowolnie wybranych trzech boków czworokąta jest nie mniejsza od długości boku czwartego, piszemy

$$|AB| + |BC| + |CD| \geq |AD|.$$

Suma kątów czworokąta równa jest 360^0, w mierze łukowej 2π, piszemy

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 360^0$$



Zadanie 18.20 *Zmierz boki i kąty tego czworokąta. Oblicz obwód i sumę kątów czworokąta czworokąt $ABCD$.*

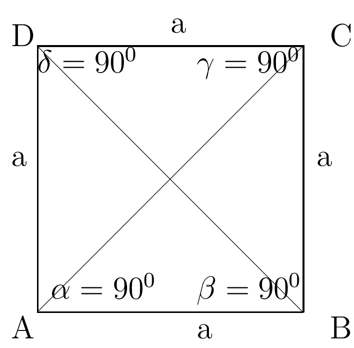
Rozpatrzymy następujące czworokąty

- kwadrat
- prostokąt
- trapez
- równoległobok
- romb
- deltoid
- czworokąt dowolny
- okrąg wpisany i okrąg opisany na czworokącie

[11]

18.8.1 Czworokąt foremny. Kwadrat.

Kwadrat $ABCD$ jest figurą foremną o czterych bokach równych a i o czterech kątach prostych równych 90^0 lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$.



Kwadrat ma dwie pzekątne AC i BD, które przecinają się pod kątem prostym równym 90^0 lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$. Z twoerdzenia Pitagorasa obliczamy długość przekątnej

$$|AC|^2 = |BC|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, \qquad |AC| = |BC| = a\sqrt{2}.$$

Promień okręgu wpisanego w kwadrat równy jestpołowie boku

$$r = \frac{a}{2}$$

[11] Konstrukcja kwadratu przy pomocy cyrkla i linijki opisana jest w projekcie *Figury podstawowe. Konstrukcja.*

Promień okręgu opisanego na kwadracie ròwny jest połowie przekątnej

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Pole kwadratu

$$P_{ABCD} = a * a^2, \qquad obwod\ kwadratu\ \ Ob = 4 * a.$$

Zadanie 18.21 *Oblicz obwòd Ob i pole P kwadratu, długość przekątnych, promień r okręgu wpisanego w kwadrat i promień R okręgu opisanego na kwadracie, jeżeli bok kwadratu ma długość a = 4..*

18.8.2 Prostokąt.

Prostokąt $ABCD$ ma cztery boki parami ròwne

$$a = c,\ b = d,$$

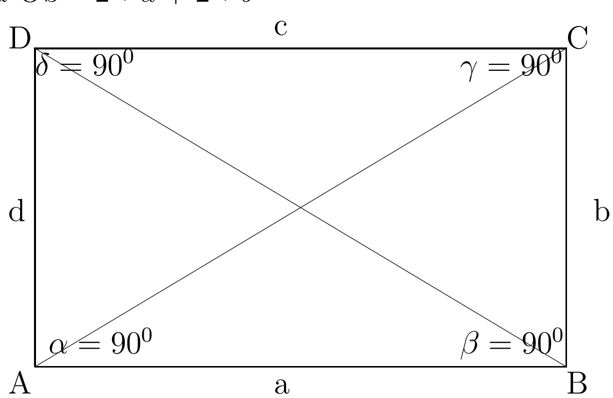
i cztery kąty proste ròwne 90^0
Z twierdzenia Pitagorasa obliczmy przekątne prostokąta

$$|AC| = |BD| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pole prostokąta

$$P_{ABCD} = a * b.$$

Obwòd prostokąta Ob $=2 * a + 2 * b$



Okrąg opisany na prostokącie ma promień R ròwny połowie przekątnych

$$R = \frac{1}{2}|AC| == \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Natomiast nie istnieje okrąg wpisany w prostokąt, z wyjątkiem kwadratu, ktòry jest szczegòlnym prostokątem o bokach ròwnych.

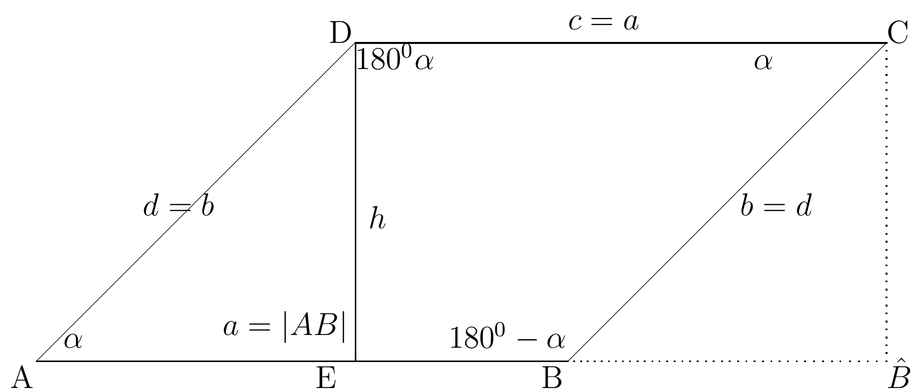
18.8.3 Równoległobok.

Równoległobok $ABCD$ ma cztery boki parami równe

$$a = c, \qquad b = d$$

i cztery kąty parami równe

$$\alpha = \angle DAB = \angle BCD, \qquad 180^0 - \alpha = \angle ABC = \angle CDA.$$



Wysokść równoległoboku oznavczamy literą h.
Pole równoległoboku

$$P_{ABCD} = a * h.$$

Istotnie, zauważmy, że pole równoległoboku $ABCD$ równe jest polu prostokąta $E\hat{B}CD$. To znaczy, że

$$P_{A\hat{B}CD} = P_{ABCD} = a * h.$$

i obwód równoległoboku

$$Ob = 2 * a + 2 * b.$$

18.8.4 Romb.

Romb $ABCD$ ma cztery boki równe

$$a = |AB| = BC| = |CD|$$

i cztery kąty parami równe

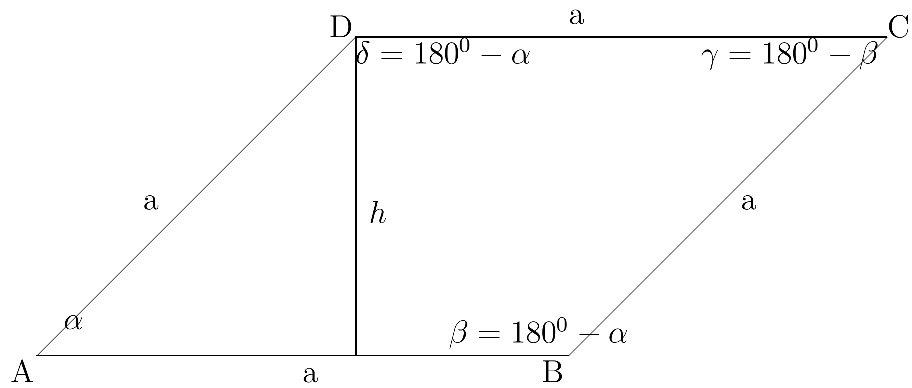
$$\alpha = \gamma, \qquad \beta = \delta.$$

Wysokść rombu oznaczamy literą h.
Zauważmy, że obwód rombu

$$Ob = 4 * a.$$

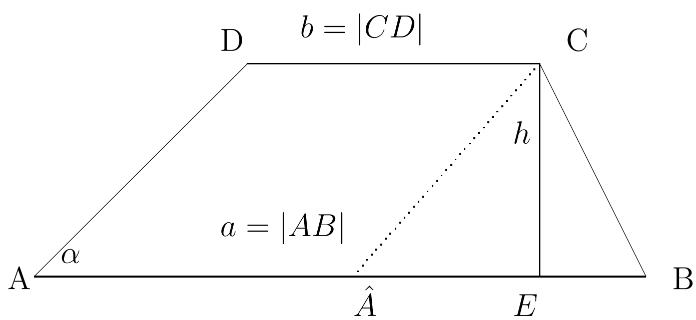
Pole rombu

$$P = a * h.$$



18.8.5 Trapez

Trapez $ABCD$



jest czworokątem o długości podstawy dolnej $a = |AB|$ równoległym do podstawy górnej o długości $b = |CD|$.
Pole trapezu

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b) * h.$$

Istotnie, zauważmy, że pole trapezu P_{ABCD} równe jest sumie pola równoległoboku

$$\hat{P}_{AECD} = (b * h$$

i pola trójkąta

$$P_{\hat{A}BC} = \frac{1}{2}(a-b) * h.$$

Zatem pole trapezu

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \hat{P}_{AECD} + P_{\hat{A}BC} \\ &= b * h + \frac{1}{2}(a-b) * h \\ &= \frac{1}{2}(a+b) * h \end{aligned}$$

Obwód trapezu

$$Ob = |AB| + |BC| + |CD| + |AC|.$$

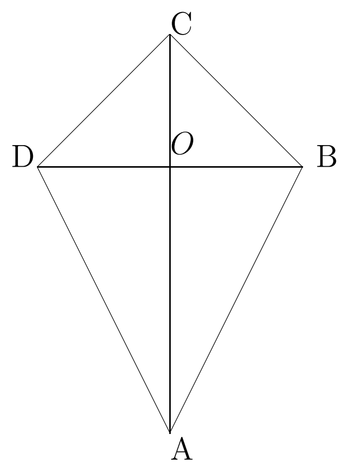
[12]

18.8.6 Deltoid.

Deltoid jest czworokątem o równych bokach parami

$$|AB| = |AD|, \qquad |CD| = |AD|$$

i o kątach $\angle ADC = \Delta ABC$
Deltoid ma dwie prostopadłe przekątne L_1 i L_2, jedna z nich jest symetralą drugiej, jak niżej na rysunku



$L_2 = |DB|$ przekątna pozioma

$L_1 = |AC|$ przekątna pionowa

Pole deltoidu równe jest połowie iloczyny przekątnych

$$P_{Deltoid} = \frac{1}{2} L_1 * L_2$$

Istotnie, zauważamy, że pole deltoidu P_{ABCD} równe jest sumie pól trójkątów ΔABD i ΔBCD

$$\begin{aligned} P_{Deltoid} = P_{ABD} + P_{DBC} &= \tfrac{1}{2} L_2 * |AO| + \tfrac{1}{2} L_2 * |OC| \\ &= \tfrac{1}{2} \underbrace{(|AO| + |OC|)}_{L_1} \\ &= \tfrac{1}{2} * L_1 * L_2. \end{aligned}$$

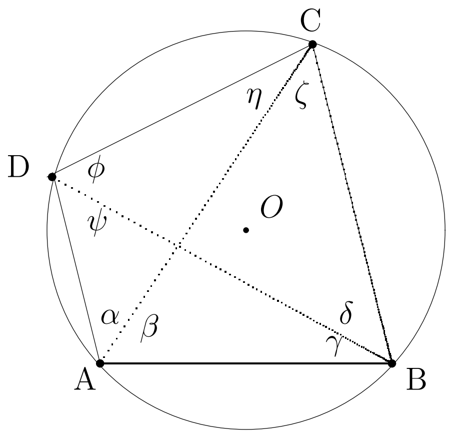
[13]

---

[12] Twierdzenie o okręgu opisanym na czworokącie i wpisanym w czworokąt jest opisane w paragrafie o czworokątach Twierdzenie to dotyczy wszystkich czworokątów w tym trapezów
[13] Twierdzenie o okręgu opisanym na czworokącie i wpisanym w czworokąt jest opisane w paragrafie o czworokątach Twierdzenie to dotyczy wszystkich czworokątów w tym deltoidu

18.8.7 Okrąg opisany na czworokącie.

Nie na kadym czworokącie można opisać okrąg i nie w każdy czworokąt można wpisać okrąg. Warunki istnienia okręgu opisanego na czworokącie i okręgu wpisanego w czworokąt podamy niżej. Mianowicie rozpatrzmy czworokąt $ABCD$ wpisany okręgu o promieniu R i środku w punkcie O.



$\zeta = \psi$ kąty $\angle BCA = \angle BDA$ opate na łuku $\widehat{AB}$

$\eta = \gamma$ kąty $\angle BDA = \angle ACD$ opate na łuku $\widehat{AD}$

$\delta = \alpha$ kąty $\angle ABD = \angle ACD$ opate na łuku $\widehat{DC}$

$\beta = \phi$ kąty $\angle CAB = \angle CDB$ opate na łuku $\widehat{BC}$

Jak wiemy, kąty środkowe oparte na tym samym łuku są równe.
Zatem zauważamy na rysunku, że

$$\begin{aligned} \zeta = \psi &\quad oparte \quad na \quad luku \quad \widehat{AB} \\ \eta = \gamma &\quad oparte \quad na \quad luku \quad \widehat{AD} \\ \delta = \alpha &\quad oparte \quad na \quad luku \quad \widehat{DC} \\ \beta = \phi &\quad oparte \quad na \quad luku \quad \widehat{BC} \end{aligned} \tag{18.5}$$

Warunek konieczny i wystarczający na to, żeby można było opisać okrąg na danym czworokącie o wierzchołkach A, B, C, D podamy w formie następującego twierdzenia

Twierdzenie 18.4 *Na czworokącie $ABCD$ o wierzchołach A, B, C, D można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma kątów naprzeciwległych jest równa*

$$\angle ABC + \angle CDA = \angle BCA + \angle DAB \tag{18.6}$$

[14] **Dowód.** Dowód twierdzenia wytnika z równości (18.5) kątów $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \zeta$, które tworzą przekątne z bokami czworokąta. Teraz sprawdzamy równość (18.6)

[14]Tutaj $\angle ABC$ oznacza kąt o wierzchołku B i ramionach $[A, B]$ i $[A, D]$.

$$
\begin{aligned}
\angle ABC + \angle CDA &= \underbrace{(\delta+\gamma)}_{\angle ABC} + \underbrace{(\phi+\psi)}_{\angle CDA} \\
&= (\alpha+\eta) + (\beta+\zeta) \\
&= \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\angle DAC} + \underbrace{(\eta+\zeta)}_{BCD} \\
&= \angle BCA + \angle DAB
\end{aligned}
$$

Wzór na pole czworokąta opisanego na okręgu

$$P_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

gdzie długości boków

$$a = |AB|, \quad b = |BC|, \quad c = |CD|, \quad d = |DA|,$$

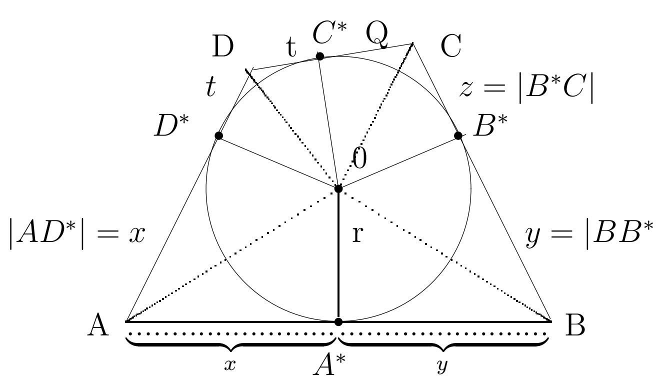
a litera p oznacza połowę obwodu czworokąta

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c+d) = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CD + |AD|).$$

18.8.8 Okrąg wpisany w czworokąt

Opis okręgu wpisanego w czworokąt o wierzchołkach A, B, C, D zacznijmy od następujących obserwacji:
(**a**) Boki czworokąta są styczne do okręgu wpisanego w punktach styczności A^*, B^*, C^*, D^*
(**b**) Styczne do okręgu poprowadzone z wierzchołków czworokąta wyznaczają odcinki parami równej długości, piszemy

$$
\begin{aligned}
x &= |A, A^*| = |AD^*|, \qquad y = |A^*B| = |BC^*| \\
z &= |B^*C| = |CC^*|, \qquad t = |C^*D| = |DD^*|
\end{aligned}
\tag{18.7}
$$



Warunek konieczny i wystarczający na to, żeby można było wpisać okrąg w danym czworokąt o wierzchołkach A, B, C, D podamy w formie następującego twierdzenia

Twierdzenie 18.5 *W czworokąt $ABCD$ o wierzchołach A, B, C, D można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma długości sumy boków naprzeciwległych jest równa*

$$|AB| + |CD| = AD| + |BC| \tag{18.8}$$

Dowód. Dowód twierdzenia wynika z własności (a) i (b) stycznej do okręgu i z równości (18.7), parami równych boków naprzeciwległych. Mianowicie, sprawdzamy, że lewa strona równości (18.8)

$$\begin{aligned} |AB| + |CD| &= \underbrace{(x+y)}_{bok\ |AB|} + \underbrace{(z+t)}_{bok\ |CD|} \\ &= \underbrace{(x+t)}_{bok\ |AD|} + \underbrace{(y+z)}_{bok\ BC|} \\ &= |AD| + |BC|, \end{aligned}$$

równa jest prawej stronie równości (18.8).[15]

Pole czworokąta i promień okręgu wpisanego w czworokąt. Zauważmy, że promień r okręgu wpisanego w czworokąt jest równy z wysokościami trójkątów

$$\Delta AOB, \quad \Delta BCO, \quad \Delta DCO, \quad \Delta DAO$$

spuszconymi na boki

$$[A, B], \quad [B, C], \quad [C, D], \quad [D, A]$$

czworokąta $ABCD$.

Zatem pola tych trójkątów są równe odpowiednio

$$P_{\Delta ABO} = \tfrac{1}{2} r * |AB|$$

$$P_{\Delta BCO} = \tfrac{1}{2} r * |BC|$$

$$P_{\Delta CDO} = \tfrac{1}{2} r * |CD|$$

$$P_{\Delta DAO} = \tfrac{1}{2} r * |DA|$$

Pole czworokąta $ABCD$ równe jest sumie pól czterech trójkątów, piszemy

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{\Delta ABO} + P_{\Delta BCO} + P_{\Delta CDO} + P_{\Delta DAO} \\ &= \frac{1}{2} r * |AB| + \frac{1}{2} r * |BC| + \frac{1}{2} r * |CD| + \frac{1}{2} r * |DA| \\ &= \frac{1}{2} r (|AB| + |BC| + |CD| + |DA|) \\ &= r * p \end{aligned}$$

[15] Tutaj korzystamy z lacznosci dodawania

gdzie litera p oznacza połowę obwodu czworokąta $ABCD$.

$$p = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|).$$

18.8.9 Związki miarowe w trȯjkącie prostokątnym

Rozpatrzmy trȯjkąt prostokątny oparty na średnicy AB okręgu
Z twiedzenia Pitagorasa wynika związek pomiędzy bokami trȯjkątata prostokątnego

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

Związek ten implikuje inne miary w trȯjkątach prostokątnych, rȯwnoramiennych i rȯwnobocznych.
Zauważmy, że trȯjkąty

$$\Delta\ ABC, \quad \Delta\ ADC, \quad \Delta\ DBC$$

są podobne. Zatem na przeciw rȯwnych kątȯw mają proporcjonalne boki.
Z proporcji

$$\tfrac{h}{|AD|} = \tfrac{|DB|}{h}$$

lub

$$h^2 = |AD| * |DB|$$

wynika, że wysokość h rȯwna jest średniej geometrycznej rzutȯw przyprostokątnych na przeciwprostkątną. To znaczy

$$h = \sqrt{|AD| * |DB|}$$

18.9 Zastosowanienie iloczynu wektorowego do obliczania pola czworokąta dowolnego.

Pole dowolnego czworokąta $ABCD$ o danych wierzchołkach A, B, C, D we wspȯłrzędnych kartezjańskich możemy obliczyć stosując iloczyn wektorowy w przestrzeni kartezjańskiej R^3 cf. (18.9)

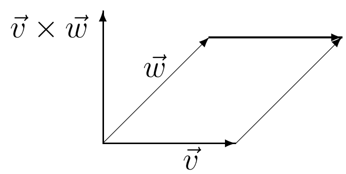
18.9.1 Iloczyn wektorowy w przestrzeni trȯjwymiarowej R^3

Naturalnie iloczyn wektorowy wykonalny jest w przestrzeni kartezjańskiej trȯjwymiarowej i opisany jest w rozdziale geometrii przestrzennej. W tym rozdziale, geometrii płaskiej, stosujemy iloczyn wektorowy do obliczania pola czorokąta dowolnego.
Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad i \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

w przestrzeni tròjwymiarowej

$$R^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : \ -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty \}$$



Wynikiem mnożenia wektorowego wektora $\vec{v}$ przez wektor $\vec{w}$ jest trzeci wector $\vec{v} \times \vec{w}$, którego wpółrzędne obliczamy z rozwinięcia Laplace'a macierzy utworzenej ze współrzędnych wektorów

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \right\}$$

Mianowicie iloczyn

$$\vec{v} \times \vec{w} = [Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\}, -Det(\left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right\}), Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right\}]$$

gdzie wyznaczniki -determinants

$$Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\} = v_2 * w_3 - v_3 * w_2,$$

$$-Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right\} = -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1),$$

$$Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right\} = v_1 * w_2 - v_2 * w_1$$

Skąd otzymamy wzòr na wspòłrzędne iloczynu wektorowego

$$\vec{v} \times \vec{w} = [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]. \qquad (18.9)$$

Wektor $\vec{v} \times \vec{w}$ jest prostopadły do wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$, piszemy

$$\vec{v} \times \vec{v} \perp \vec{w}, \qquad \vec{w} \times \vec{v} \perp \vec{w}$$

Wiemy, że wektory są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, jeżeli ich iloczy skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

ròwny jest zero.
Zatem, sprawdzamy iloczyn skalarny

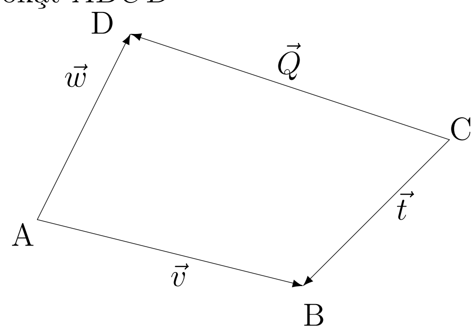
$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}) &= ([v_1, v_2, v_3], [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]) \\ &= v_1(v_2 * w_3 - v_3 * w_2) - v_2(v_1 * w_3 - v_3 * w_1) + v_3(v_1 * w_2 - v_2 * w_1) \\ &= (v_1 v_2 w_3 + v_2 v_3 w_1 + v_3 v_1 w_2) - (v_1 v_3 w_2 + v_2 v_1 w_3 + v_3 v_2 w_1) = 0 \end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{v} \times \vec{w}$ równa jest polu równoległoboku o bokach $\vec{v}$ i $\vec{w}$.
[16] Zatem długość wektora

$$|\vec{v}\times\vec{w}| = \sqrt{|v_2 * w_3 - v_3 * w_2|^2 + |-(v_1 * w_3 - v_3 * w_1)|^2 + |v_1 * w_2 - v_2 * w_1|^2}$$

18.9.2 Pole czworokąta. Przykłady

Rozpatrzymy czworokąt $ABCD$



o wierzchołkach

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3)$$

$$C = (c_1, c_2, c_3), \quad D = (d_1, d_2, d_3)$$

rozpięty na wektorach

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = \vec{AD},$$

$$\vec{Q} = [z_1, z_2, z_3] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [t_1, t_2, t_3] = \vec{CD},$$

gdzie współrzędne wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{Q}$, $\vec{t}$ określamy przez różnice współrzędnych wierzchołków A, B, C, D czworokąta $ABCD$

$$v_1 = b_1 - a_1, \quad v_2 = b_2 - a_2, \quad v_3 = b_3 - a_3,$$

$$w_1 = d_1 - a_1, \quad w_2 = d_2 - a_2, \quad w_3 = d_3 - a_3,$$

$$z_1 = b_1 - c_1, \quad z_2 = b_2 - c_2, \quad z_3 = b_3 - c_3,$$

$$t_1 = d_1 - c_1, \quad t_2 = d_2 - c_2, \quad t_3 = d_3 - c_3.$$

Stosując iloczyn wektorowy (cf. (18.9)) możemy obliczyć pole dowolnego czworokąta o danych współrzędnych jego wierzchołków. Mianowicie, pole czworokąta wypukłego $ABCD$ równe jest połowie sumy iloczynu wektorowego wektorów [17]

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{Q} \times \vec{t} \tag{18.10}$$

[16] Długość iloczynu wektorowego $|\vec{v} \times \vec{w} = |\vec{v}| * |\vec{w}| * cos\alpha$, gdzie α oznacza kąt pomiędzy wektorami $\vec{v}, \vec{w}$. Pole czworokąta $P_{ABCD} = |\vec{v} \times \vec{w} = |\vec{v}| * |\vec{w}| * cos\alpha$ równe jest długości ioczynu wektorowego.

[17] Pole czworokąta wklęsłego równe jest różnicy iloczynów wektorowych $P_{ABCD} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{w} - \frac{1}{2}\vec{Q} \times \vec{t}$

Przykład 18.10 *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [3, 0, 0] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [0, 3, 0] = \vec{AD},$$

$$\vec{Q} = [0, -6, 0] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [-3, -3, 0] = \vec{CD}$$

Iloczyn wektorowy

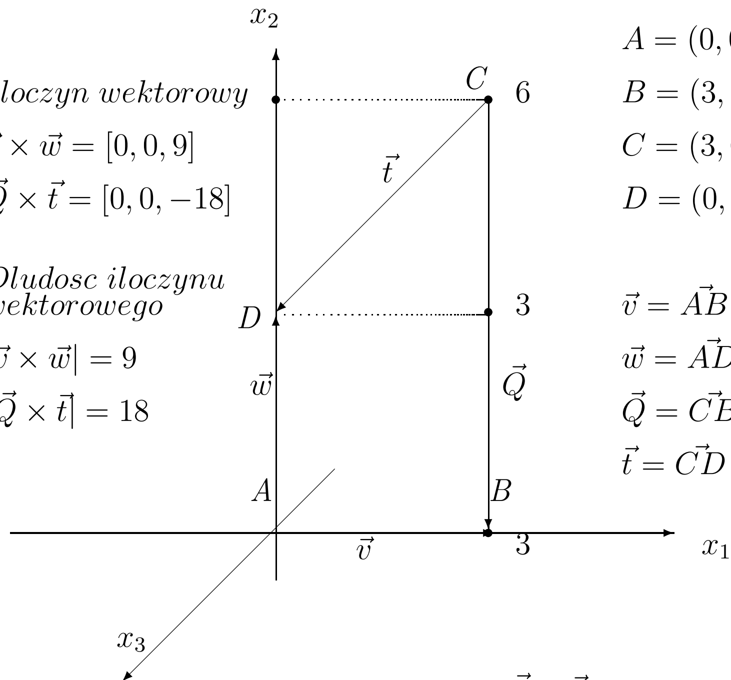
$\vec{v} \times \vec{w} = [0, 0, 9]$

$\vec{Q} \times \vec{t} = [0, 0, -18]$

Dludosc iloczynu wektorowego

$|\vec{v} \times \vec{w}| = 9$

$|\vec{Q} \times \vec{t}| = 18$



$A = (0, 0, 0)$

$B = (3, 0, 0)$

$C = (3, 6, 0)$

$D = (0, 3, 0)$

$\vec{v} = \vec{AB} = [3, 0, 0]$

$\vec{w} = \vec{AD} = [0, 3, 0)$

$\vec{Q} = \vec{CB} = [0, -6, 0]$

$\vec{t} = \vec{CD} = [-3, -3, 0]$

Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{Q} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (18.9))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 3 * 0, -(3 * 0 - 0 * 0), 3 * 3 - 0 * 0] \\ &= [0, 0, 9] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{Q} \times \vec{t} &= [-6 * 0 - 3 * 0, -(0 * 0 - 3 * 0), 0 * 3 - 6 * 3] \\ &= [0, 0, -18] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$ i $\vec{Q}$, $\vec{t}$.
Mianowicie

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{Q} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 9^2} + \frac{1}{2}|\sqrt{0^2 + 0^2 + (-18)^2} \\ &= \frac{1}{2} * 9 + \frac{1}{2} * 18 \\ &= 4.5 + 9 = 13.5 \end{aligned}$$

[18]

Rozpatrzmy inny przykład obliczania pola czworokąta stosując iloczyn wektorowy.

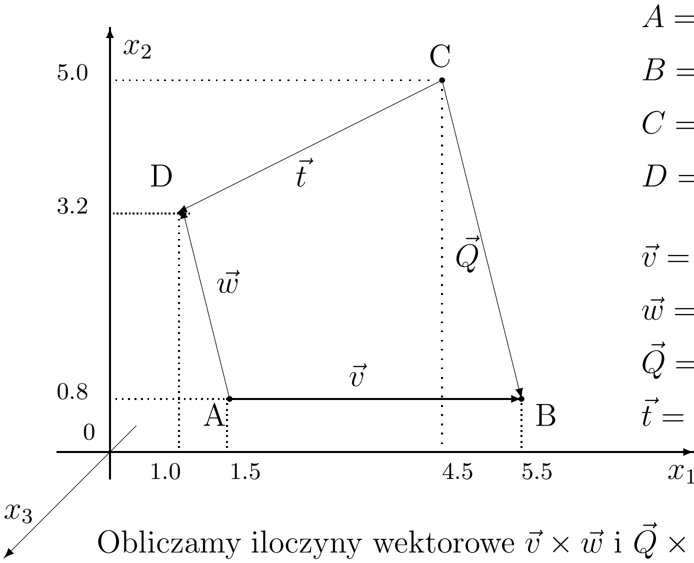
Przykład 18.11 *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [4.0, 0, 0] = \vec{AB},$$

$$\vec{w} = [-0.5, 2.4, 0] = \vec{AD},$$

$$\vec{Q} = [-1.0, 4.2, 0] = \vec{CB},$$

$$\vec{t} = [-3.5, -1.8, 0] = \vec{CD}$$



$A = (1.5, 0.8, 0)$
$B = (5.5, 0.8, 0)$
$C = (4.5, 5.0, 0)$
$D = (1.0, 3.1, 0)$

$\vec{v} = \vec{AB} = [4.0, 0, 0]$
$\vec{w} = \vec{AD} = [-0.5, 2.4, 0)$
$\vec{Q} = \vec{CB} = [-1.0, 4.2, 0]$
$\vec{t} = \vec{CD} = [-3.5, -1.8, 0]$

Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{Q} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (18.9))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 0 * 2.4, -(4 * 0 + 0.5 * 0), 4 * 2.4 + 0.5 * 0] \\ &= [0, 0, 9.6] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{Q} \times \vec{t} &= [4.2 * 0 + 1.8 * 0, -((-1) * 0 - (-3.5) * 0), 1 * 1.8 + 4.2 * 3.5] \\ &= [0, 0, 16.5] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v},\ \vec{w}$ i $\vec{Q},\ \vec{t}$.

[18] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 w przestrzeni kartezjńskiej R^3 obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Mianowicie

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v}\times\vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{Q}\times\vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+9.6^2} + \frac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+16.5^2} \\ &= \frac{1}{2}*9.6 + \frac{1}{2}*16.5 \\ &= 4.8 + 8.25 = 13.05 \end{aligned}$$

[19]

Zadanie 18.22 *Oblicz długości wektorẃ*

$$(i)\ \ \vec{v} = [3,0,4], \qquad \vec{w} = [8,-6,0]$$

(ii) *Oblicz iloczyn wektorowy* $\vec{v}\times\vec{w}$ *wektorów*

$$\vec{v} = [3,0,4], \qquad \vec{w} = [8,-6,0]$$

(iii) *Sprawdź, że wektory*

$$\vec{v}\perp\vec{w}\times\vec{w}$$

są prostopadłe.

Zadanie 18.23 *Sprawdź, że wektor*

$$\vec{w} = [w_1, w_2, 0]$$

jest prostopadły do wektora

$$\vec{v}\times\vec{w},$$

gdzie wektor

$$\vec{v} = [v_1, v_2, 0]$$

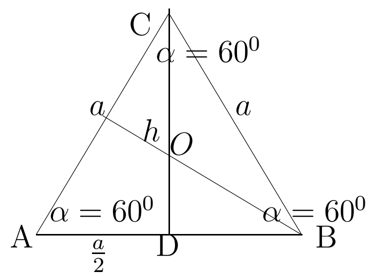
18.10 Figury płaskie foremne

Figurami foremnymi na płaszczyźnie nazywamy figury płaskie, które mają wszystkie boki i wszystkie kąty równe.

18.10.1 Trójkąt foremnym

Trójkąt równoboczny jest trójkątem foremnym
Trójkąt równoboczny ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe $\alpha = 60^0$, w mierze łukowej $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ jak na rysunku

[19] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 w przestrzeni kartezjńskiej R^3 obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$



Trójkąt równoboczny ΔABC

Wysokość h trójkąta Δ ABC jest dwusieczną kąta α i dzieli podstawę a na połowę w punkcie D. Podobnie wysokości trójkąta równobocznego spuszcone na pozostałe boki dzielą podstawę na połowy i przecinają się w punkcie O, to jest w środku okręgu wpisanego w trójką równoboczny. Punkt przecięcia wysokości O dzieli te wysokości w stosunku $1 : 3$. To znaczy zachodzi następująca proporcja

$$\frac{|DO|}{|DC|} = \frac{1}{3}, \quad |DC| = h$$

Stąd mamy

$$|DO| = \frac{1}{3}h, \quad \text{i} \quad |OC| = \frac{2}{3}h$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość h trójkąts Δ ABC

$$h^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

Wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Obliczamy pole trójkąta równobocznego

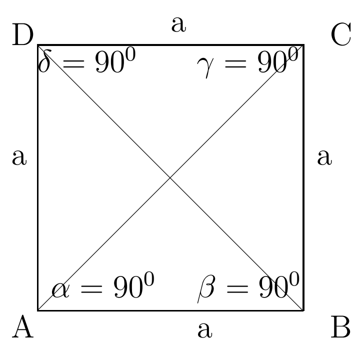
$$P = h * \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole trójkąta równobocznego o boku a

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

18.10.2 Czworokąt foremny

Kwadrat $ABCD$ jest figurą foremną o czterych bokach równych a i o czterech kątach prostych równych 90^0 lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$.



Kwadrat ma dwie pzekątne AC i BD, które przecinają się pod kątem prostym równym 90^0 lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$. Z twoerdzenia Pitagorasa obliczamy długość przekątnej

$$|AC|^2 = |BC|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, \qquad |AC| = |BC| = a\sqrt{2}.$$

Promień okręgu wpisanego w kwadrat równy jestpołowie boku

$$r = \frac{a}{2}$$

Promień okręgu opisanego na kwadracie równy jest połowie przekątnej

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Pole kwadratu

$$S = a * a^2, \qquad obwod\ kwadratu\ \ Ob = 4 * a.$$

Zadanie 18.24 *Oblicz obwód, długość przekątnych i pole kwadratu o boku* $a =$ 4

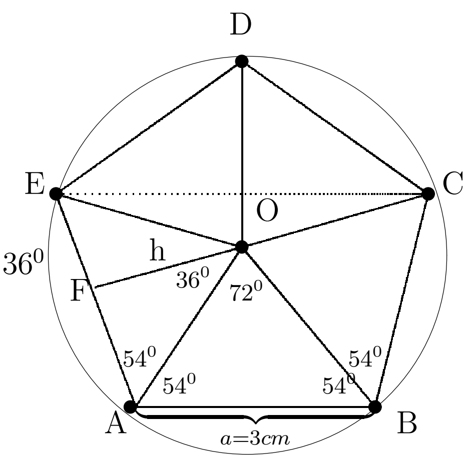
18.10.3 Pięciokąt foremny

Pięciokąt foremny o bokach równych a i kątach równych

$$\angle EAB = \alpha = 108^0$$

lub w mierze łukowej $\alpha = \dfrac{3\pi}{5}$ ma 5 równych przekątnych.

$\angle AOF = 36^0$



$\angle EAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = \alpha = 108^0$

Pole pieciokąta foremnego. Pole pięciokąta foremnego składa się z $5 - ciu$ pól trójkątów równoramiennych i przystających o wysokości h i podstawie a. Pola jednego z pięciu trójkątów ΔAOE

$$P_{\Delta AOE} = \frac{1}{2} a * h$$

gdzie wysokość

$$\begin{aligned} h = \tfrac{1}{2} a * ctg\, 36^0 &= \frac{a}{2} * \frac{1}{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} \\ &= \frac{a}{2} * \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{25 - 20}} \\ &= \frac{a}{2} * \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{a}{2} * \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{5} \end{aligned}$$

Zatem pole pięciokąta foremnego o boku a obliczamy ze wzoru

$$P = 5 * P_{\Delta AOE} = 5 * \frac{1}{2} * a * h = \underbrace{\frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10 * \sqrt{5}}}_{Pole\ pieciokata\ foremnego}$$

Promień okręgu opisanego na pieciokącie foremnym. Promień $R = |AO|$ okręgu opisanego na pięciokącie foremnym, obliczymy z trójkcata prostokątnego ΔAOF stosując twierdzenie Pitagoroasa.

Mianowicie, kwadrat promienie R^2 równy jest sumie kwadratów przyprostokątnych $|FO|^2 + |FA|^2|$, pisamy

$$\begin{aligned} R^2 &= \underbrace{|FO|^2}_{h^2} + |FA|^2| \\ &= h^2 + (\frac{a}{2})^2 \\ &= \underbrace{(\frac{a}{10} * \sqrt{25 + 10\sqrt{5}})^2}_{h^2} + (\frac{a}{2})^2 \\ &= \frac{a^2}{100}(25 + 10\sqrt{5}) + \frac{25a^2}{100} \\ &= \frac{a^2}{100}(50 + 10\sqrt{5}) \end{aligned}$$

Skąd obliczmy promień okręgu opisanego na pieciokącie foremnym

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{a^2}{100}(50 + 10\sqrt{5})} \\ &= \underbrace{\frac{a}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}_{R} \end{aligned}$$

Promień okręgu wpisanego w pieciokąt foremny. Promień $r = |FO|$ okręgu wpisanego w pięciokąt foremny, obliczymy z trójkcata prostokątnego ΔAOF stosując twierdzenie Pitagoroasa.
Mianowicie, kwadrat promienie R^2 równy jest sumie kwadratów przyprostokątnych $|FO|^2 + |FA|^2|$, pisamy Zauważmy, że promień $r = |FO| = h$ okręgu wpisanego w pieciokąt foremny równy jest

$$r = \frac{a}{10} * \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

Przekątne pieciokąta foremnego. Pieciokąt foremny ma 5 przekątnych równych o długości

$$\begin{aligned} d = |EC| &= 2a * cos\frac{\pi}{5} \\ &= 2a * \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

18.10.4 Sześciokąt foremny

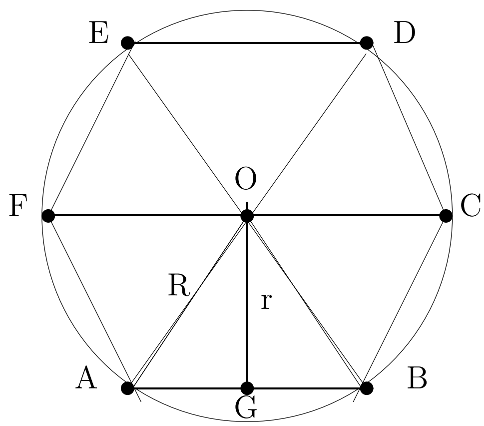
Sześciokąt foremny o sześciu bokach a równych

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FE| = a = R$$

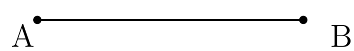
promieniowi R okręgu opisanego na sześciokącie i sześciu równych kątach

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEF = \angle EFC = \angle FAB = \alpha = 120^0.$$

w mierze łukowej $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.



Konstrukcja sześciokąta formnego przy pomocy cyrkla i linijki. Konstrukcja sześciokąta formnego przy pomocy cyrkla i linijki jest bardzo prosta, najbardziej prosta ze wszystkich konstrukcji figur foremnych.
Mianowicie, niech bedzie dany bok szściokąta jako odcinek $[A, B]$



Stawiamy cyrkiel w dowolniie wybranym punkcie O, środku okręgu i rozwartością cyrkla równą odcinkowi $[A, B]$ zakreślamy okrąg o promieniu $R = |AB| = a$ równym bokowi sześciokąta $ABCDEF$.
Następnie, stawiamy cyrkiel w dowolnym punkcie okręgu A i rozwartością cyrkla $R = a$ zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie B,dalej stawiamy cyrkiel w punkcie B i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie C, dalej stawiamy cyrkiel w punkcie C i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie D, dalej stawiamy cyrkiel w punkcie D i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie E, ,dalej stawiamy cyrkiel w punkcie E i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie F.

Łączymy punkty A, B, C, D, E, F na okręgu przy pomocy linijki. W ten sposób narysowaliśmy sześciokąt foremny $ABCDEF$.
Zauważmy, że sześciokąt foremny składa się z $6 - ciu$ trójkątów przystających i równobocznych obokach równych R i o wszystkich kątach równych $60^0 \sim \dfrac{\pi}{3}$.

Wszystkie z $6 - ciu$ trójkątów

$$\Delta ABO,\ \Delta BCO,\ \Delta CDO,\ \Delta DEO,\ \Delta EFO,$$

mają wysokości równe $h = r = |OG|$ promieniowi okręgu wpisanego w sześciokąt. Wysokość h obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ΔAGO. Mianowicie

$$h^2 = R^2 - (\frac{R}{2})^2 = \frac{3R^2}{4}, \qquad h = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Pole sześciokąta foremnego składa się z 6-ciu pól trójkątów równobocznych o bokach równych $a = R = |AO|$.
Pole jednego trójkąta równobocznego równe jest

$$P_\Delta = \frac{1}{2}a * h = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Zatem, pole sześciokąta równe jest

$$P = 6 * P_\Delta = 6 * \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \underbrace{\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}}_{pole\ P\ szesciokata}.$$

Obwód sześciokąta foremnego równy jest

$$Ob = 6 * a \qquad lub \qquad Ob = 6 * R, \ \ bo \quad a = R.$$

18.10.5 Ośmiokąt foremny

Ośmiokąt foremny o ośmiu bokach równych

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FE| = |FG| = a$$

i o ośmiu równych kątach rówmych

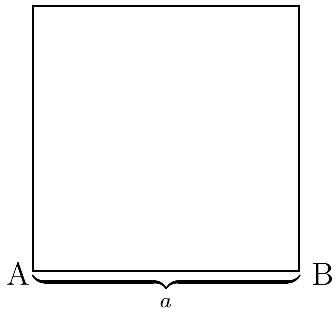
$$\begin{aligned} \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE &= \angle DEF = \angle EFG = \angle FGH \\ &= \angle GHA = \angle HAB = \alpha = 135^0 \end{aligned}$$

w mierze łukowej $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$.

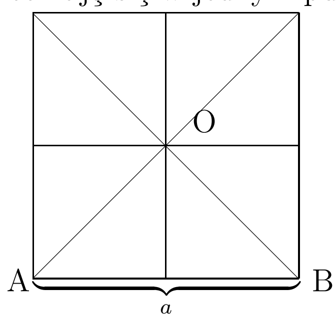
18.10.6 Konstrukcja ośmiokąta foremnego.

Konstrukcja ośmiokąta formnego o danym boku wykonamy przy pomocy cyrkla i linijki.
1. Konstruujemy kwadrat o danym boku $a = |AB|$ przy pomocy cyrkla i linijki. [20]

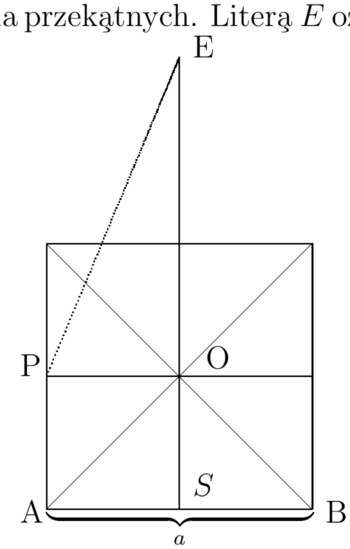
[20] Konstukcje elementarne opisane w oprzednich paragrafach



2. Rysujemy przekątne i symetralne boków kwadratu. Przekątne i symetralne boków kwadratu przecinają się w jednym punkcie O.



3. Na przdłużeniu symetralnej podstawy kwadratu odkładamy rozwartością cyrkla równą połowie przekątnej, to jest odcinek $|AO|$, stawiając cyrkel w punkcie O przecięcia przekątnych. Literą E oznaczamy wierzchołek ośmiokąta.



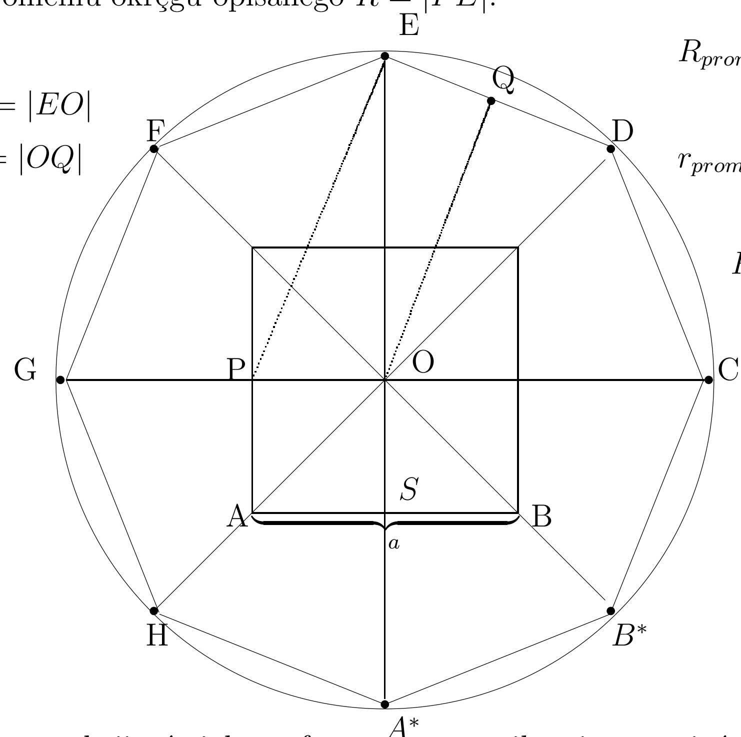
4. Rozwartością cyrkla równą promieniowi $R = |PE|$ rysujemy okrąg stawiając cyrkiel w punkcie O. Następnie przedłużamy przekątne kwadratu i środkowe boków do punktów przecięcia $A^*, B^*, C, D, E, F, G, H$ z okręgiem, to jest do wierzchołków ośmiokąta formnego A^*B^*CDEFH o danym boku $a = |AB|$. Łączymy wierzhołki $A^*, B^*, C, D, E, F, G, H$ ośmiokąta przy pomocy linijki. W ten spoòb skonstruowaliśmy ośmiokąt foremny

$$A^*B^*CDEFGH$$

o promeniu okręgu opisanego $R = |PE|$.

$R = |EO|$

$r = |OQ|$



$$R_{promien_R} = \underbrace{a\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}}_{prom.okr.\ opisan.}$$

$$r_{promien_r} = \underbrace{\frac{a}{2}(1+\sqrt{2})}_{prom.\ okr.wpisan.}$$

$$P_{pole} = \underbrace{2a^2(1+\sqrt{2})}_{pole\ osmiok.}$$

Z konstrukcji ośmiokąta foremnego wynika, że promień $R = |EO|$ okręgu opisanego na ośmiokącie równy jest przeciwprostokątnej $R = |EO|$ trójkąta prostokątnego ΔQEO.

$$\angle OEP = 22.5^0 \sim \frac{\pi}{8}, \qquad \angle EPO = 67.5^0 \sim \frac{3\pi}{8}.$$

Pole ośmiokąta foremnego. Zauważmy, że øśmiokąt foremny składa się z $8 - miu$ trójkątów przystających i równoramiennych o równych rammionach promieniowi R okręgu opisanego na ośmiokącie i o wszystkich kątach równych $135^0 \sim \dfrac{3\pi}{4}$.
Wszystkie z $8 - miu$ trójkątów

$$\Delta A^*B^*O,\ \Delta B^*CO,\ \Delta CDO,\ \Delta DEO,$$

$$\Delta EFO,\ \Delta FGO,\ \Delta GHO,\ \Delta HA^*O$$

mają wysokości równe $h = r = |OQ|$ promieniowi $r = h$ okręgu wpisanego w ośmiokąt.
Stosując twierdzenia Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ΔOQE obliczamy kwadrat wysokości

$$h^2 = |OE|^2 - |QE|^2 = \underbrace{(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{2})^2 + (\frac{a}{2})^2}_{R^2} - (\frac{a}{2})^2$$

$$= \frac{a^2}{4}(1+\sqrt{2})^2.$$

Skąd obliczamy wysokości i promień okręgo wpisanego w ośmiokąt

$$h = r = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{2})$$

Promień R okręgu opisanego na ośmiokącie. Promień okręgu opisanego na ośmiokącie wynika z konstrukcji ośmiokąta foremnego. Jego wartość obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąt prostokątnego ΔOQE. Mianowicie kwadrat przeciwprostokątnej $R = |EO|$ rówmny jest

$$\begin{aligned} R^2 = |EO|^2 &= |QO|^2 + |ES|^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2 \\ &= (\frac{a}{2}(1 + \sqrt{2}))^2 + (\frac{a}{2})^2 \\ &= \frac{a^2}{4}(3 + 2\sqrt{2}) + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{2}\sqrt{2} \\ &= a^2(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Skąd obliczamy promień okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym

$$R = a\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}$$

Pole ośmiokąta foremnego. Pole ośmiokąta foremnego składa się z $8 - miu$ pòl trójkątów równoramiennych o podstawie długości a i bokach długości R. Pole jednego trójkąta równoramiennego równe jest

$$P_\Delta = \frac{1}{2}a * h = \frac{a^2}{4}(1 + \sqrt{2})$$

Zatem, pole ośmiokąta równe jest

$$P = 8 * P_\Delta = 8 * \frac{a^2}{4}(1 + \sqrt{2}) = \underbrace{2a^2(1 + \sqrt{2})}_{pole\ P\ osmiokata}.$$

Obwód ośmiokąta foremnego równy jest $Ob = 8 * a$.

Promień r okręgu wpisanego w ośmiokąt i promień R okręgu opisanego na śmiokącie foremnym o danym boku, obliczymy również stosując związki trygonometryczne w trójkącie prostokątnym ΔOQE. Mianowicie, promień okręgu wpisanego w ośmiokąt

$$r = \frac{1}{2}a * ctg\frac{\pi}{8}$$

Wartość funkcji $ctg\frac{\pi}{8}$ obliczamy stosując tożsamość trygonometryczną

$$ctg\alpha - \frac{1}{ctg\alpha} = ctg2\alpha$$

dla $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$

$$\begin{aligned} ctg\tfrac{\pi}{8} - tg\tfrac{\pi}{8} &= \frac{cos\frac{\pi}{8}}{sin\frac{\pi}{8}} - \frac{sin\frac{\pi}{8}}{cos\frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{cos^2\frac{\pi}{8} - sin\frac{\pi}{8}}{sin\frac{\pi}{8} * cos\frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{2 * cos\frac{\pi}{4}}{sin\frac{\pi}{4}} = 2ctg\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Skąd mamy równość

$$ctg\frac{\pi}{8} - \frac{1}{tg\frac{\pi}{8}} = ctg\frac{\pi}{8} \qquad lub \qquad ctg^2\frac{\pi}{8} - 2ctg\frac{\pi}{8} - 1 = 0$$

Dla $z = ctg\frac{\pi}{8}$ znajdujemy wartość z rozwiązując równanie kwadratowe

$$z^2 - 2z - 1 = 0, \quad wyroznik \;\; \Delta = 8, \quad wartosc \;\; z = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Zatem $ctg\frac{\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$ i promień okręgu wpisanego w ośmiokąt foremny

$$r = \frac{1}{2} a * ctg\frac{\pi}{8} = \underbrace{\frac{a}{2}(1+\sqrt{2})}_{r}$$

Zadanie 18.25 *Oblicz obwód i pole ośmiokąta foremnego $ABCDCEFG$ o długości boku $|AB| = 2$*

Zadanie 18.26 *Mając promień $r = 8$ ośmiokąta foremnego, oblicz promień R okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym.*

Zadanie 18.27 *Mając dany bok $a = 3cm$ oblicz promień r okręgu wpisanego i promień R okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym.*

Zadanie 18.28 *Skonstruuj ośmiokąt fororemny o boku $a = 3cm$ przy pomocy cyrkla i linijki. Zmierz promień r okręgu wpisanego w ośmiokąt i promień R kręgu opisanego na ośmiokącie foremnym.*

Zadanie 18.29 (i) *Oblicz obwód i pole tr.ojkąta ΔABC o długości boków*

$$|AB| = 10, \quad |BC| = 8, \quad |AC| = 6$$

(ii) *Sprawdź czy trójkąt ΔABC jest prostokątny.*

Zadanie 18.30 *Oblicz obwód i pole trójkąta ΔABC o długości boków*

$$|AB| = 3, \quad |BC| = 5, \quad |AC| = 7$$

stosując wzór Herona

Zadanie 18.31 *Oblicz obwód i pole równoległoboku* $ABCD$ *o długości boków*

$$|AB| = |CD| = 4, \quad |BC| = |AD| = 5,$$

stosując wzór Herona

Zadanie 18.32 *Oblicz obwód i pole sześciokąta foremnego* $ABCDCE$ *o długości boku* $|AB| = 5$

Chapter 19

Geometria w przestrzeni. Stereometria

19.1 Wstęp.

Stereometria to geometria figur w przestrzeni. W tym rozdziale zajmiemy się następującymi figurami:

1. Punkty i wektory w przestrzeni.
2. Parametryczne równanie prostej
3. Proste i płaszczyzny w przestrzeni, objętośċ i pole powierzchni
4. Graniastosłupy i prostopadłościany, objcetośċ i pole powierzchni
5. Ostrosłópy.
6. Bryły obrotowe: walec, kula, stożek, objętość i pole powierzchni.

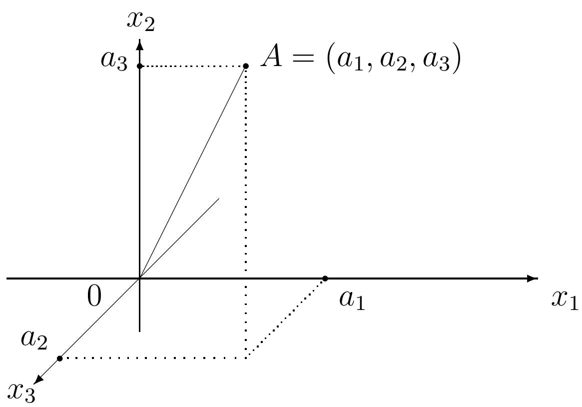
Wśród brył w przestrzeni, wyróżniamy bryły foremne i bryły platońskie. Bryły formne mają wszystkie ściany przystające. Bryły platońskie, do których należą czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan, uważane były w czasach starożytnych w Akademi Platona (427-347, B.C.) za figury idealne.

19.2 Punkty i wektory w przestrzeni

Położenie punktów i wektorów w przestrzeni określamy we współrzędnych kartezjańskich.

19.2.1 Punkty. Kartetezjański układ współrzędnych.

Podobnie jak na płaszczyźnie położenie figur geometrycznych w przestrzeni określamy we współrzędnych kartezjańskich



Na osiach liczbowych o kierunku i zwrocie osi x_1, x_2, x_3 odkładamy współrzędne punktów w przestrzeni kartezjańskiej

$$R^3 = \{(x_1, x_2, x_2) : \ -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty.\}$$

Punkt $A = (a_1, a_2, a_3)$ w układzie współrzędnych kartezjańskich x_1, x_2, x_3 ma współrzędne

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = a_3.$$

Na punktach

$$A = (a_1, a_2, a_3) \qquad i \qquad B = (b_1, b_2, b_3)$$

wykonujemy następujące operacje:

- Dodawanie punktów

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1, a_2, , a_3) + (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3). \end{aligned}$$

  Zatem suma punktów

$$A + B = C$$

  jest równa punktowi $C = (c_1, c_2, c_3)$ o współrzędnych

$$c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2, \quad c_3 = a_3 + b_3.$$

- Odejmowanie punktów

$$\begin{aligned} A - B &= (a_1, a_2, , a_3) - (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3). \end{aligned}$$

Zatem różnica punktów

$$A - B = C$$

jest równa punktowi $C = (c_1, c_2, c_3)$ o współrzędnych

$$c_1 = a_1 - b_1, \quad c_2 = a_2 - b_2, \quad c_3 = a_3 - b_3.$$

- Mnożenie punktu przez liczbę t

$$t * A = t * (a_1, a_2, , a_3) = (t * a_1, t * a_2, t * a_3).$$

Zatem iloczyn punktu przez liczbę t jest równy punktowi

$$C = (c_1, c_2, c_3)$$

o współrzędnych

$$c_1 = t * a_1,\ c_2 = t * a_2,\ c_3 = t * a_3.$$

Przykład 19.1 *Niech dane będą punkty* $A = (2, -3, 4)$ *i* $B = (2, -1, 3)$. *Oblicz*

$$(i) \quad A + B, \quad (ii) \quad a - b, \quad (iii) \quad 2 * A + 3 * B.$$

Rozwiązanie. Obliczamy

$$\begin{aligned} (i)\ A + B &= (2, -3, 4) + (2, -1, 3) \\ &= (2 + 2, -3 - 1, 4 + 3) \\ &= (4, -4, 7). \end{aligned}$$

$$Odpowiedz:\ A + B = C, \quad C = (4, -4, 7).$$

$$\begin{aligned} (ii)\ A - B &= (2, -3, 4) - (2, -1, 3) \\ &= (2 - 2, -3 - (-1), 4 - 3) \\ &= (0, -2, 1) \end{aligned}$$

$$Odpowiedz:\ A - B = C, \quad C = (0, -2, 1).$$

$$\begin{aligned} (iii)\ 2 * A + 3 * B &= 2 * (2, -3, 4) + 3 * (2, -1, 3) \\ &= (2 * 2 + 3 * 2, 2 * (-3) + 3 * (-1), 2 * 4 + 3 * 3) \\ &= (10, -9, 17). \end{aligned}$$

OdpowiedĆ: $2 * A + 3 * B = C, \quad C = (10, -9, 17)$.

Zadanie 19.1 *Niech dane będą punkty*

$$A = (3, 2, -1), \qquad B = (1, -1, 2).$$

Oblicz

$$(i) \quad A + B, \quad (ii) \quad A - B, \quad (iii) \quad 3 * A + 5 * B.$$

19.2.2 Wektory w przestrzeni

Niech dane będą punkty

$$A = (a_1, a_2, a_3), \qquad B = (b_1, b_2, b_3).$$

Wektor $\vec{AB}$ o paczątku w punkcie

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

i końcu w punkcie

$$B = (b_1, b_2, b_3)$$

określamy jako różnica punktów

$$\vec{AB} = B - A = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3].$$

[1] [2] Na przykład wektor związany o początku w punkcie $A = (0, 1, 3)$ i końcu w punkcie $B = (2, 0, 5)$ ma współrzędne

$$\vec{AB} = B - A = (2, 0, 5) - (0, 1, 3) = [2, -1, 2].$$

Dodawanie wektorów
Suma dwóch wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

równa jest wektorowi

$$\vec{Q} = [z_1, z_2, z_3] = [v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3]$$

o współrzędnych

$$z_1 = v_1 + w_1, \quad z_2 = v_2 + w_2, \quad z_3 = v_3 + w_3.$$

Przykład 19.2 *Oblicz sumę wektorów*

$$\vec{v} = [1, 2, 1] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1, 2]$$

Rozwiązanie. Suma

$$\vec{v} + \vec{w} = [1, 2, 1] + (2, 1, 2) = [1 + 2, 2 + 1, 1 + 2] = [3, 3, 3]$$

Opowiedź: Sumą danych punktów $\vec{v} = [1, 2, 1]$ i $\vec{w} = [2, 1, 2]$ jest wektor $\vec{Q} = [3, 3, 3]$.

Odejmowanie wektorów
Różnica dwóch wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

[1] Współrzędne v_1, v_2, v_3 wektora swobodnego $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ piszemy w nawiasach kwadrwtowych.

[2] Wektor swobodny określony jest przez jego długość, kierunek i zwrot, nie zależy od położenia na płaszczyźnie.

równajest wektorowi

$$\vec{Q} = [z_1, z_2, z_3] = \vec{v} - \vec{w} = [v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3]$$

o współrzędnych

$$z_1 = v_1 - w_1 \quad i \quad z_2 = v_2 - w_2, \quad z_3 = v_3 - w_3.$$

Przykład 19.3 *Oblicz różnice wektorów*

$$\vec{v} = [1, 2, 6] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1, 5]$$

Rozwiązanie. Obliczamy różnicę wektorów

$$\vec{v} - \vec{w} = [1, 2, 6] - [2, 1, 5] = [1 - 2, 2 - 1, 6 - 5] = [-1, 1, 1]$$

Opowiedź: Wynikiem odejmowania danych wektorów $\vec{v} = [1, 2, 6]$ i $\vec{w} = [2, 1, 5]$ jest wektor $\vec{Q} = [-1, 1, 1]$.

19.2.3 Iloczyn skalarny wektorów

[3] Iloczyn skalarny wektorów jest ważną operacją na wektorach stosowaną w matematyce stosowanej, w fizyce, chemii i w innych przedmiotach ścisłych.

Definition 19.1 *Iloczynem skalarnym wektorów $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ i $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ nazywamy liczbę*

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + v_3 * w_3$$

Zatem, iloczyn skalarny wektorów nie jest wektorem, natomiast jest liczbą

Przykład 19.4 *Oblicz iloczyn skalarny wektorów*

$$\vec{v} = [2, 5, 3] \quad i \quad \vec{w} = [7, 3, -2]. \tag{19.1}$$

Rozwiązanie. Stosując wzór (19.1) obliczamy iloczyn skalarny danych wektorów, piszemy

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w}) &= ([2, 5, 3] * [7, 3, -2]) \\ &= 2 * 7 + 5 * 3 + 3 * (-2) = 14 + 15 - 6 = 23. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Iloczyn skalarny danych wektorów $\vec{v} = [2, 5, 3]$ i $\vec{w} = [7, 3, -2]$ jest liczbą 23, piszemy

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 23.$$

Iloczyn skalarny wektorów zachowuje wszystkie własności operacji arytmetycznej mnożeni.
Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

[3] Wielokość skalarna to znaczy wielkość określona liczbą

- iloczn skalarny jest przemienny

$$(\vec{v},\vec{w}) = (\vec{w},\vec{v})$$

Istotnie, sprawdzamy,że

$$\begin{aligned}(\vec{v},\vec{w}) &= v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + v_3 * w_3 \\ &= w_1 * v_1 + w_2 * v_2 + w_3 * v_3 \\ &= (\vec{w},\vec{v})\end{aligned}$$

- mnożenie skalarne wektorów jest rozdzielne względem dodawania

$$(\vec{v},(\vec{w}+\vec{Q})) = (\vec{v},\vec{w}) + (\vec{v},\vec{Q})$$

Istotnie sprawdzamy, że

$$\begin{aligned}(\vec{v},\vec{w}+\vec{Q}) &= v_1 * (w_1 + z_1) + v_2 * (w_2 + z_2) + v_3(w_3 + z_3) \\ &= v_1 * w_1 + v_1 * z_1 + v_2 * w + 2 + v_2 * z_2 + v_3 * w_3 + v_3 * z_3 \\ &= \underbrace{v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + v_3 * z_3}_{(\vec{v},\vec{w})} + \underbrace{v_1 * z_1 + v_2 * z_2 + v_3 * z_3}_{(\vec{v},\vec{Q})} \\ &= (\vec{v},\vec{w}) + (\vec{v},\vec{Q})\end{aligned}$$

- Iloczyn skalarny wektora $\vec{v}$ przez siebie równy jest kwadratowi jego długości

$$\begin{aligned}(\vec{v},\vec{v}) &= v_1 * v_1 + v_2 * v_2 + v_3 * v_3 \\ &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = |\vec{v}|^2.\end{aligned}$$

Teraz podamy ważne twierdzenie w postaci warunku dostatecznego i koniecznego

Twierdzenie 19.1 .
Warunek dostateczny: Jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0$$

wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest równy zero to wektory $\vec{v}$, $\vec{w}$ są prostopadłe, piszemy

$$\vec{v} \perp \vec{w}$$

Warunek konieczny: Jeżeli wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe

$$\vec{v} \perp \vec{w}$$

to ich iloczyn sklarny jest równy zero

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0.$$

Razem warunek konieczny i dostateczny piszmy w symbolach

$$\vec{v} \perp \vec{w} \iff (\vec{v},\vec{w}) = 0.$$

Istnieje kilka dowodów tego twierdzenia. Tutaj podamy dowód oparty na twierdzeniu Pitagorasa. Mianowicie, udowodnimy, że trójkąt o ramionach $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Dowód warunku dostatecznego. Zakładamy, że iloczyn skalarny wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest równy zero

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Udowodnimy, że wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe.
Obliczamy kwadrat długości różnicy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$

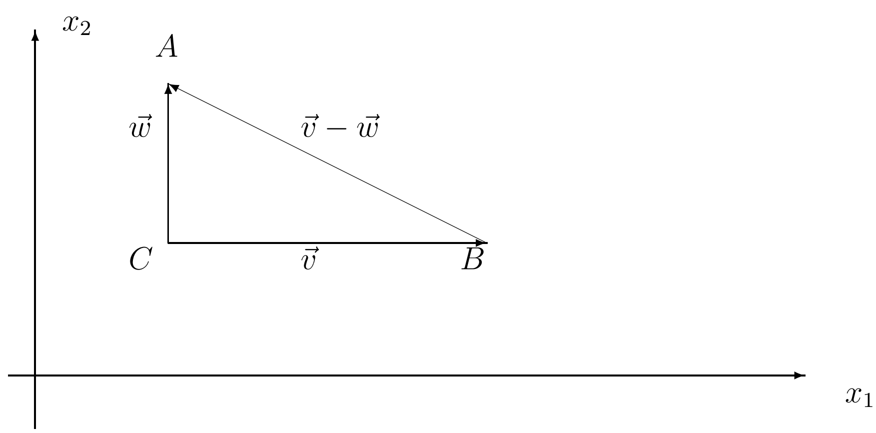
$$\begin{aligned} |\vec{v} - \vec{w}|^2 &= (\vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) \\ &= (\vec{v}, \vec{v}) - 2(\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{w}) \\ &= |\vec{v}|^2 - 2(\vec{v}, \vec{w}) + |\vec{w}|^2 \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

to boki trójkąta ΔABC

$$|AB| = |\vec{v}|, \qquad |AC| = |\vec{w}|, \qquad |BC| = |\vec{v} - \vec{w}|$$



spełniają równość

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = |v \vec{-} w|^2 \tag{19.2}$$

Z drugiej strony z twierdzenia Pitagorasa wynika, że suma kwadratów dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości boku trzeciego (cf. (19.2)) wtedy i tylko wtedy, jeżeli ten trójkąt jest prostokątny.
Zatem kąt $\angle ACB$ pomiędzy wektorami $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest prosty, jeżeli iloczyn skalarny tych wektorów równy jest zero. Koniec dowodu warunku dostatecznego.
Dowód warunku koniecznego. Zauważmy, że wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe.

$$\vec{v} \perp \vec{w}.$$

Udowodnimy, że iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

W tym celu obliczmy poraz drugi kwadrat dłudości różnicy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

$$\begin{aligned} |\vec{v} - \vec{w}|^2 &= (\vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) \\ &= (\vec{v}, \vec{v}) - 2(\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{w}) \qquad (19.3) \\ &= |\vec{v}|^2 - 2(\vec{v}, \vec{w}) + |\vec{w}|^2 \end{aligned}$$

Z założenia wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe. Zatem boki AB i AC trójkąta ΔABC są prostopadłe. Wobec tego trójkąt ΔABC jest trójkątem prostym. Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że kwadrat długości przeciwprostokątnej $[B, C]$ równy jest sumie kwadratów długości przyprostokątnych $[A, B]$ i $[A, C]$, piszemy

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 \quad lub \quad |\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2, \qquad (19.4)$$

gdzie

$$|AB| = |\vec{v}|, \quad |AC| = |\vec{w}|, \quad |BC| = |\vec{v} - \vec{w}|.$$

Z równości (19.3) i (19.4) wynika równość stron

$$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 - 2(\vec{v}, \vec{w}) + |\vec{w}|^2$$

$$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = \vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2,$$

$$|\vec{v}|^2 - 2(\vec{v}, \vec{w}) + |\vec{w}|^2 = \vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2,$$

$$-2(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Zatem iloczyn skalarny wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest równy zero

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0,$$

jeżeli wektory $\vec{v} \perp \vec{w}$ są prostopadłe. Koniec dowodu warunku koniecznego. [4]

Przykład 19.5 *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [6, 8, 0], \qquad \vec{w} = [9, 12, 0].$$

[4] Iloczyn skalarny $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$, wtedy i tylko wtedy, jeżeli $\vec{v} \perp \vec{w}$, w symbolach piszemy

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Longleftrightarrow (\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Rozwiązanie. Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzòr (19.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = [6, 8, 0], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = [9, 12, 0]$$

Zatem iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 6 * 9 + 8 * 12 + 0 * 0 = 54 + 96 = 150.$$

równy jest 100.
Wiemy, że kwadrat długości wektora $\vec{v} = [6, 8, 0]$ jest równy iloczynowi skalarnemu tego wektora przez siebie.

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = 6 * 6 + 8 * 8 + 0 * 0 = 36 + 64 = 100$$

Skąd długość wektora

$$|\vec{v}| = \sqrt{100} = 10.$$

Podobnie obliczamy długość wektora $\vec{w} = [9, 12, 0]$

$$\begin{aligned} |\vec{w}| &= \sqrt{(\vec{w}, \vec{w})} \\ &= \sqrt{9 * 9 + 12 * 12 + 0 * 0} \\ &= \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15. \end{aligned}$$

Przykład 19.6 *Dla jakiej wartości parametru m wektory*

$$\vec{v} = [m, 6, 3], \quad \vec{w} = [3, 2, 4].$$

są prostopadłe?

Rozwiązanie. Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzòr (19.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [m, 6, 3], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2] = [3, 2, 4]$$

Wektory są prostopadłe jeżeli ich iloczyn skalarny równy jest zero. Obliczamy iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = m * 3 + 6 * 2 + 3 * 4 = 3m + 24 = 0.$$

Skąd iloczyn skalarny równy jest zero

$$6m + 24 = 0, \quad dla \quad m = -\frac{24}{3} = -8.$$

Istotnie sprawdzamy, że dla $m = -8$ iloczyn skalarny wektora $\vec{v} = [m, 6, 3]$ przez wektor $\vec{w} = [3, 2, 4]$ równy jest zero

$$(\vec{v}, \vec{w}) = -8 * 3 + 6 * 2 + 3 * 4 = 24 - 24 = 0$$

Odpowiedź: Wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = [m, 6, 3], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = [3, 2, 4]$$

są prostopadłe dla parametru $m = -8$.

Zadanie 19.2 *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [12, 16, 0], \qquad \vec{w} = [15, 20, 0].$$

Zadanie 19.3 *Dla jakiej wartości parametru m wektory*

$$\vec{v} = [m, 15, 2], \qquad \vec{w} = [5, 3, 4].$$

są prostopadłe?

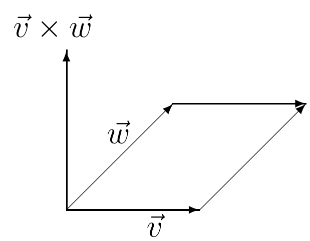
19.2.4 Iloczyn wektorowy w przestrzen trójwymiarowej R^3

Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad i \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

w przestrzeni trójwymiarowej

$$R^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : \ -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty \}$$



Wynikiem mnożenia wektorowego wektora $\vec{v}$ przez wektor $\vec{w}$ jest trzeci wector $\vec{v} \times \vec{w}$, którego wpółrzędne obliczamy z rozwinięcia Laplace'a macierzy utworzenej ze współrzędnych wektorów

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ & & \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ & & \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \right\}$$

Mianowicie iloczyn

$$\vec{v} \times \vec{w} = [Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\}, -Det(\left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right\}), Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right\}]$$

gdzie wyznaczniki -determinants

$$Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\} = v_2 * w_3 - v_3 * w_2,$$

$$-Det\begin{Bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{Bmatrix} = -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1),$$

$$Det\begin{Bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{Bmatrix} = v_1 * w_2 - v_2 * w_1$$

Skąd otzymamy wzór na współrzędne iloczynu wektorowy

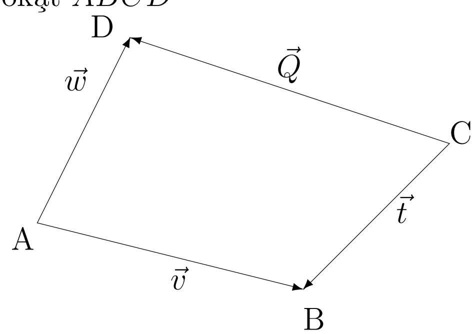
$$\vec{v} \times \vec{w} = [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]. \quad (19.5)$$

Wektor $\vec{v} \times \vec{w}$ jest prostopadły do wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$, a jego o długość równa jest polu równoległoboku o bokach $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Zatem długość wektora

$$|\vec{v}\times\vec{w}| = \sqrt{|v_2 * w_3 - v_3 * w_2|^2 + |-(v_1 * w_3 - v_3 * w_1)|^2 + |v_1 * w_2 - v_2 * w_1|^2}$$

19.2.5 Pole czworokąta. Przykłady

Rozpatrzymy czworokąt $ABCD$



o wierzchołkach

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3)$$

$$C = (c_1, c_2, c_3), \quad D = (d_1, d_2, d_3)$$

rozpięty na wektorach

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = \vec{AD},$$

$$\vec{Q} = [z_1, z_2, z_3] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [t_1, t_2, t_3] = \vec{CD},$$

gdzie współrzędne wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{Q}$, $\vec{t}$ określamy przez różnice współrzędnych wierzchołków A, B, C, D czworokąta $ABCD$

$$v_1 = b_1 - a_1, \quad v_2 = b_2 - a_2, \quad v_3 = b_3 - a_3,$$

$$w_1 = d_1 - a_1, \quad w_2 = d_2 - a_2, \quad w_3 = d_3 - a_3,$$

$$z_1 = b_1 - c_1, \quad z_2 = b_2 - c_2, \quad z_3 = b_3 - c_3,$$

$$t_1 = d_1 - c_1, \quad t_2 = d_2 - c_2, \quad t_3 = d_3 - c_3.$$

Stosując iloczyn wektorowy (cf. (19.5)) możemy obliczyć pole dowolnego czworokąta o danych współrzędnych jego wierzchołków. Mianowicie, pole czworokąta $ABCD$ równe jest połowie iloczynu wektorowego wektorów

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{Q} \times \vec{t}$$

Przykład 19.7 *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [3,0,0] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [0,3,0] = \vec{AD},$$

$$\vec{Q} = [0,-6,0] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [-3,-3,0] = \vec{CD}$$

Iloczyn wektorowy

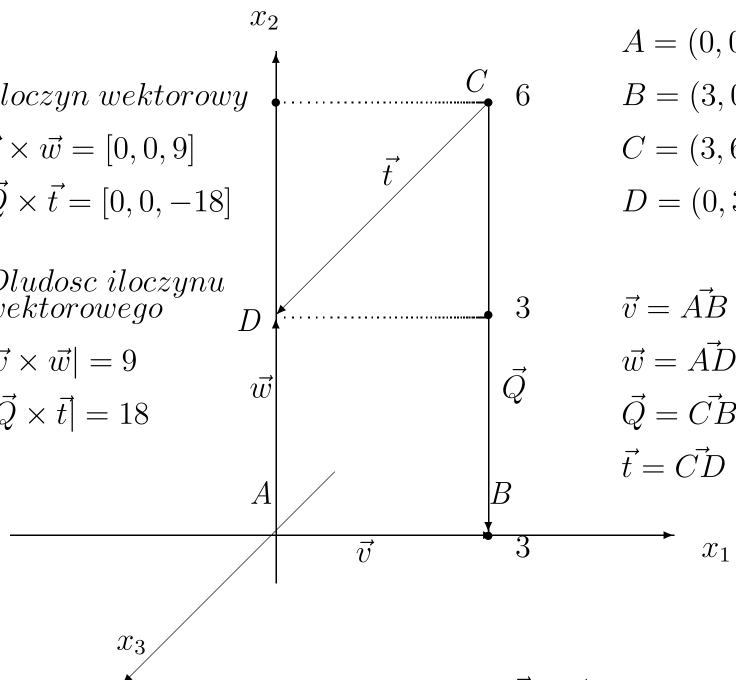
$\vec{v} \times \vec{w} = [0,0,9]$

$\vec{Q} \times \vec{t} = [0,0,-18]$

Dludosc iloczynu wektorowego

$|\vec{v} \times \vec{w}| = 9$

$|\vec{Q} \times \vec{t}| = 18$



$A = (0,0,0)$

$B = (3,0,0)$

$C = (3,6,0)$

$D = (0,3,0)$

$\vec{v} = \vec{AB} = [3,0,0]$

$\vec{w} = \vec{AD} = [0,3,0)$

$\vec{Q} = \vec{CB} = [0,-6,0]$

$\vec{t} = \vec{CD} = [-3,-3,0]$

Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{Q} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (18.9))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0*0-3*0, -(3*0-0*0), 3*3-0*0] \\ &= [0,0,9] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{Q} \times \vec{t} &= [-6*0-3*0, -(0*0-3*0), 0*3-6*3] \\ &= [0,0,-18] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$ i $\vec{Q}$, $\vec{t}$.

Mianowicie

$$
\begin{aligned}
P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{Q} \times \vec{t}| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 9^2} + \frac{1}{2}|\sqrt{0^2 + 0^2 + (-18)^2} \\
&= \frac{1}{2} * 9 + \frac{1}{2} * 18 \\
&= 4.5 + 9 = 13.5
\end{aligned}
$$

[5]

Rozpatrzmy inny przykład obliczania pola czworokąta stosując iloczyn wektorowy.

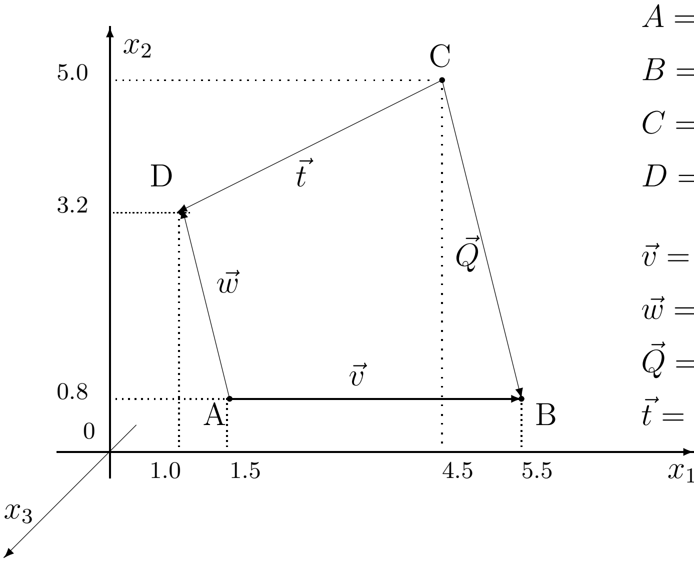
Przykład 19.8 *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [4.0, 0, 0] = \vec{AB},$$

$$\vec{w} = [-0.5, 2.4, 0] = \vec{AD},$$

$$\vec{Q} = [-1.0, 4.2, 0] = \vec{CB},$$

$$\vec{t} = [-3.5, -1.8, 0] = \vec{CD}$$



$$
\begin{aligned}
A &= (1.5, 0.8, 0) \\
B &= (5.5, 0.8, 0) \\
C &= (4.5, 5.0, 0) \\
D &= (1.0, 3.1, 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{AB} = [4.0, 0, 0] \\
\vec{w} &= \vec{AD} = [-0.5, 2.4, 0) \\
\vec{Q} &= \vec{CB} = [-1.0, 4.2, 0] \\
\vec{t} &= \vec{CD} = [-3.5, -1.8, 0]
\end{aligned}
$$

Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{Q} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (18.9))

$$
\begin{aligned}
\vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 0 * 2.4, -(4 * 0 + 0.5 * 0), 4 * 2.4 + 0.5 * 0] \\
&= [0, 0, 9.6]
\end{aligned}
$$

[5] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 w przestrzeni kartezjńskiej R^3 obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned}\vec{Q} \times \vec{t} &= [4.2 * 0 + 1.8 * 0, -((-1) * 0 - (-3.5) * 0), 1 * 1.8 + 4.2 * 3.5] \\ &= [0, 0, 16.5]\end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v},\ \vec{w}$ i $\vec{Q},\ \vec{t}$.
Mianowicie

$$\begin{aligned}P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{Q} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 9.6^2} + \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 16.5^2} \\ &= \frac{1}{2} * 9.6 + \frac{1}{2} * 16.5 \\ &= 4.8 + 8.25 = 13.05\end{aligned}$$

6

19.2.6 Parametryczne równanie prostej w przestrzeni

Proste operacje na punktach i wektorach w przestrzeni prowadzą do parametrycznego określenia równania prostej.
Mianowicie, rozpatrzmy dwa punkty

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad A = (b_1, b_2, b_3),$$

i wektor

$$\vec{AB} = B - A.$$

Wtedy łatwo piszemy równanie parametryczne prostej L

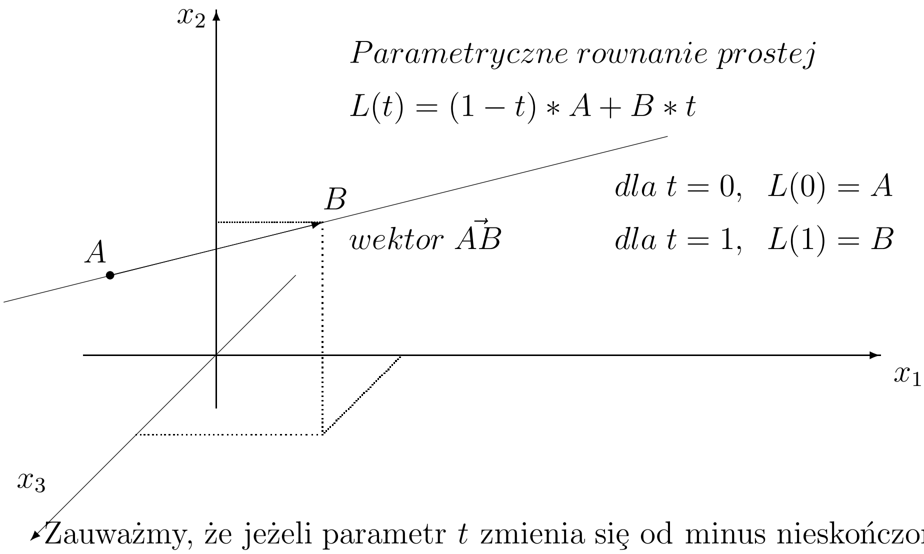
$$L(t) = A + t * \vec{AB}$$

lub

$$L(t) = (1 - t) * A + B * t.$$

Tutaj parametrem jest liczba t przebiegająca cały zbiór liczb rzeczywisty od minus nieskonoczności do plus nieskonoczności, piszemy $-\infty < t < \infty$.

[6] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 w przestrzeni kartezjńskiej R^3 obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$



Zauważmy, że jeżeli parametr t zmienia się od minus nieskończoności $-\infty$ do plus nieskończoności ∞, to punkt $L(t)$ poruszasza się wzdłuż prostej L. Parametryczne równanie prostej, wyrażamy również w terminach danych punktów A i B. Ponieważ wektor $\vec{AB} = B - A$, to równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty A i B ma następującą postać:

$$L(t) = A + (B - A) * t,$$

$$\text{lub} \qquad L(t) = A + \vec{AB} * t,$$

$$\text{lub} \qquad L(t) = (1-t) * A + B * t, \quad -\infty < t < \infty.$$

Przykład 19.9 *Napisz parametryczne równanie prostej*

(i) o począdku w punkcie $A = (1, 2, -1)$ i kierunku wektora $\vec{v} = [2, -1, 4]$

(ii) przechodzącej przez punkty $A = (1, -1, 2)$ i $B = (2, 1, 2)$

Rozwiązanie.

(i) Podstawiamy dane:

1. punkt $A = (1, -1, 2)$ i wektor $\vec{v} = (2, -1, 4)$ do ogólnego równania

$$\begin{aligned} L(t) &= A + t * \vec{v} \\ &= (1, -1, 2) + t * (2, -1, 4) \\ &= (1 + 2t, -1 - t, 2 + 4t). \end{aligned}$$

OdpowiedQ́: $L(t) = (1 + 2t, -1 - t, 2 + 4t), \quad -\infty < t < \infty.$

(ii) Podstawiamy dane: punkt $a = (1, -1, 2)$ i punkt $B = (2, 1, 2)$ do ogólnego równania

$$\begin{aligned} L(t) &= (1-t)A + t * B = (1-t)(1, -1, 2) + t * (2, -1, 4) \\ &= ((1-t) + 2t, (1-t) - t, 2(1-t) + 4t) \\ &= (1 + t, 1 - 2t, 2 + 2t) \end{aligned}$$

OdpowiedQ́: $L(t) = (1 + t, 1 - 2t, 2 + 2t), \quad -\infty < t < \infty.$

Zadanie 19.4 *Napisz parametryczne równanie prostej*

(i) o początku w punkcie $A = (0, 1, -1)$ *i kierunku wektora* $\overrightarrow{v} = [2, 1, 3]$

(ii) przechodzącej przez punkty $A = (3, 1, 2)$ *i* $B = (0, 2, 2)$

19.3 Graniastosłupy

Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany, zwane podstawami, są przystaj̨cymi wielokątami leżącymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany są równoległobokami. Wśród graniastosłupów, wyróżniami postopadłościany proste i prostopadłościany pochyłe.

19.3.1 Sześcian foremny

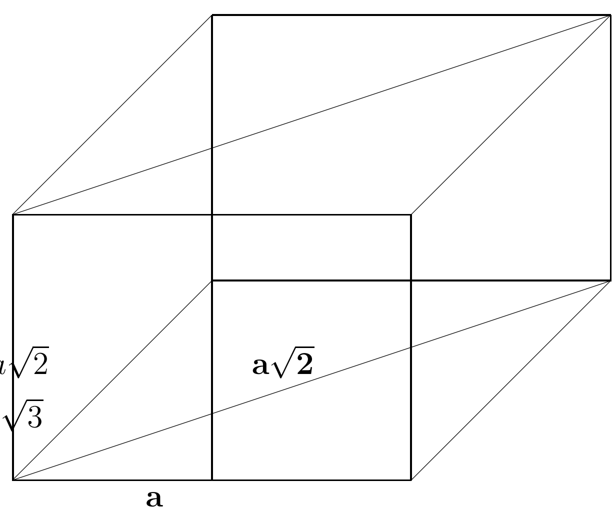
Sześcian foremny jest prostopadłościanem, który ma wszystkie sześć ścian kwadratami o boku a.

Powierzchnia $P_c = 6a^2$

Ojetošč $V = a^3$

Przekątna podstawy $= a\sqrt{2}$

Przekątna sześcianu $= a\sqrt{3}$



Szešcian Foremny

W sposób oczywisty znajdujemy, że

Pole powierzchni calkowitej	$P_c = 6a^2.$
Objetosc	$V_c = a^3.$
Przekatna podstawy	$d_p = a\sqrt{2}.$
Przekatna szescianu	$d = a\sqrt{3}.$

Przykład 19.10 *Dla sześcianu o boku $a = 4$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu,

(ii) objętość sześcianu.

(iii) przekątną podstawy sześcianu.

(iv) przekątna sześcianu.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów, obliczamy

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu $P_c = 6a^2 = 6 * 4^2 = 96,$

(ii) objętość sześcianu $V_c = a^3 = 4^3 = 64.$

(iii) przekątną podstawy sześcianu $d_p = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$

(iv) przekątna sześcianu $d = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$

Zadanie 19.5 *Dla sześcianu o boku $a = 5$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu,

(ii) objętość sześcianu.

(iii) przekątną podstawy sześcianu.

(iv) przekątna sześcianu.

19.3.2 Prostopadłościan o podstawie prostokąta

Prostopadłościan o podstawie prostokąta o wymiarach podstawy $a,\ b$ i wysokości h ma pole powierzchni całkowitej składające się z dwóch podstaw i czterech ścian bocznych.

$$P_c = 2a * b + 2a * h + 2b * h.$$

Objętość prostopadłościanu obliczamy z prostego wzoru

$$V = a * b * h$$

Przykład 19.11 *Dla prostopadłościanu o podstawie prostokąta o wymiarach $a = 4,\ b = 5$ i wysokości $h = 6$, oblicz* *(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu,*

(ii) objętość prostopadłościanu.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów, obliczamy

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu

$$P_c = 2a * b + 2a * h + 2b * h = 2 * 4 * 5 + 2 * 4 * 6 + 2 * 5 * 6 = 148.$$

(ii) objętość prostopadłościanu $V = a * b * h = 4 * 5 * 6 = 120.$

Zadanie 19.6 *Dla prostopadłościanu o podstawie prostokąta o wymiarach $a = 2,\ b = 3$ i wysokości $h = 5$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu,

(ii) objętość prostopadłościanu.

19.3.3 Graniastosłup o podstawie trójkąta równobocznego

Prostopadłościan o podstawie trójkąta równobocznego o boku a ma ściany prostokątne o wymiarach $a \times h$, gdzie h jest wysokością tego prostopadłościanu.

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu $P_c = 2 * \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

(ii) objętość prostopadłościanu $V_c = h * \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

Przykład 19.12 *Dla prostopadłościanu o boku podstawy trójkąta równobocznego $a = 2$, i wysokości $h = 4$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość sześcianu.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów na całkowitą powierzchie i objętość oblicamy

(i) pole całkowitej powierzchni $P_c = 2\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}.$

(ii) objętość sześcianu $V_c = h * \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4 * \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}.$

Zadanie 19.7 *Dla prostopadłościanu o boku podstawy trójkąta równobocznego $a = 3$, i wysokości $h = 2$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość sześcianu.

19.3.4 Graniastosłup o podstawie sześciokąta foremnego

Powierzchnia całkowita i objętość graniastosłupa o podstawie sześciokąta foremnego składa się z dwóch podstaw i sześciu ścian. Łatwo obliczamy pole całkowitej powierzchni i ojętość graniastosłupa o podstawie sześciokąta formnego znając bok podstawy a i wysokość h. Mianowicie, mamy następujące wzory:
Pole podstawy składa się z pól 6-ciu trójkątów róocznych

$$P_t = 6 * \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Pole całkowite prostopadłościanu o podstawie sześciokąta foremnego

$$P_c = 2P_t + 6 * a * h = 12\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6a * h, \quad P_c = 3a^2\sqrt{3} + 6a * h.$$

Objętość prostopadłościanu o pdstawie sześciokąta foremnego

$$V == 3a^2\sqrt{3} * h.$$

Przykład 19.13 *Dla prostopadłościanu o podstawie sześciokąta foremnego o boku $a = 2$ wysokości $h = 4$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów na całkowitą powierzchie i objętość, oblicamy

(i) pole całkowitej powierzchni $P_c = 3a^2\sqrt{3} + 6a * h = 3 * 2^2\sqrt{3} + 6 * 2 * 4 = 12\sqrt{3} + 48.$

(ii) objętość sześcianu $V = P_c * h = 3a^2\sqrt{3} * h = 3 * 2^2\sqrt{3} * 4 = 48\sqrt{3}.$

Zadanie 19.8 *Dla prostopadłościanu o podstawie sześciokąta foremnego o boku $a = 4$ wysokości $h = 5$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość.

19.4 Ostrosłupy

Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego podstawą jest dowolny wielokąt a ściany boczne są trójkąmi o wspólnym wierzchołku. Wśród ostrosłupów wyróżniamy ostrosłupy foremne, których podstawą jest wielokąd foremny i spodek wysokości leży w środku okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.

19.4.1 Czworościan foremny

Czworościan foremny ma wszystkie cztery ściany, które są trójkątami równobocznymi. Zatem, kąty ścian mają 60^o lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{3}$ radianów. Pole powierzchni każdej ze ścian $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, gdzie a oznacza długość każdej z krawędzi czworościanu. Pole powierzchni całkowitej czwrościanu foremnego równa się czterem razy pole powierzchni jednej ze ścian.

$$P_c = a^2\sqrt{3}.$$

KrawędǬ l czworościanu obliczamy z twierdzenia Pitagorasa. Mianowicie, wiemy, że wysokość ściany bocznej $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Jej spodek leżey w połowie krawędzi podstawy $\frac{a}{2}$. Zatem obliczamy

$$l^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2 = (\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{a^2}{4}$$

Objętość czworościanu formnego równa jest jednej trzeciej pola podstawy razy wysokość H

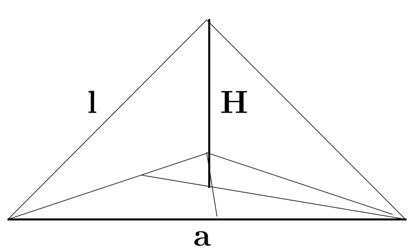
$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} * H$$

Wysokość H obliczamy w zależności od danej krawędzi a. Mianowicie, spodek wysokości h ściany bocznej leży na przecięciu wysokości podstawy w punkcie odległym od wierzchołka trójkąta o $\frac{2}{3}h = \frac{2}{3} * \frac{a\sqrt{3}}{2}$. KrawędǬ czworościanu $l = a$. Z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy wysokość czworościanu

$$H^2 = a^2 - (\frac{2}{3}h)^2 = a^2 - (\frac{2}{3} * \frac{a\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{2}{3}a^2, \quad H = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Zatem ojętość czworościanu

$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} * H = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} * a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$



Czworościan Foremny $P_c = a^2\sqrt{3},\ V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$

19.4.2 Ostrosłup prawidłowy o podstawie kwadratu

Oznaczenia:

- a bok kwadratu w podstawie ostrosłupa
- H wysokość ostrosłupa
- h wysokość ściany bocznej ostrosłupa
- l krawędŹ boczna ostrosłupa
- P_a pole podstawy ostrosłupa
- P_0 pole ściany bocznej ostrosłupa
- P_c pole powierzcni całkowitej ostrosłupa
- V objętość ostrosłupa

Jasne, że pole podstawy ostrosłupa foremnego równa się polu kwadratu $P_a = a^2$ o boku a. Pole pobocznicy ostrosłupa foremnego P_l równe jest polu czterech trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości **h**. Natomiast, pole ściany bocznej ostrosłupa P_0 równe jest polu trójkąta równoramiennego o podstwie a i wysokości h.

$$P_0 = \frac{1}{2}a * h.$$

Wysokść ściany bocznej wyrażamy w zależności od boku a i krawędzi l. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa oblicamy wysokość

$$h^2 = l^2 - (\frac{a}{2})^2, \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Wtedy pole ściany bocznej

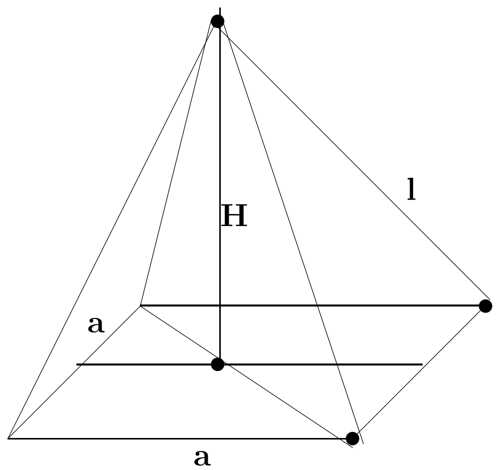
$$P_0 = \frac{1}{4}a * \sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Pole całkowitej powierzchni ostrosłupa równe jest polu czterech trójkątów w podstawie o boku a plus pola cztery trójkątów równoramiennych o podstawie a i ramionach l.
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa foremnego

$$P_c = a^2 + 4P_0, \qquad P_c = a^2 + a\sqrt{4l^2 - a^2}$$

i objętość ostrosłupa foremnego

$$V = \frac{1}{3}a^2 * H$$



Ostrosłup Foremny o Podstawie Kwadratu $\mathbf{P_c = a^2 + a\sqrt{4l^2 - a^2}}$, $\mathbf{V = \frac{1}{3}a^2 * H}$

19.4.3 Ostrosłup foremny o podstawie sześciokąta

Oznaczenia:

- a bok sześciokąta w podstawie ostrosłupa
- H wysokość ostrosłupa
- h wysokość ściany bocznej ostrosłupa
- l krawędQ́ boczna ostrosłupa
- P_a pole podstawy ostrosłupa
- P_0 pole ściany bocznej ostrosłupa
- P_c pole powierzcni całkowitej ostrosłupa
- V objętość ostrosłupa

Jasne, że pole podstawy ostrosłupa foremnego równa się polu P_a sześciokąta foremnego o boku a

$$P_a = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Pole pobocznicy ostrosłupa foremnego P_l równe jest polu sześciu trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości $\mathbf{h}$. Pole ściany bocznej ostrosłupa P_0 równe jest polu trójkąta równoramiennego o podstwie a i wysokości h.

$$P_0 = \frac{1}{2}a * h.$$

Wysokść ściany bocznej wyrażamy w zależności od boku a i krawędzi l. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa oblicamy wysokość

$$h^2 = l^2 - (\frac{a}{2})^2, \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Wtedy pole ściany bocznej

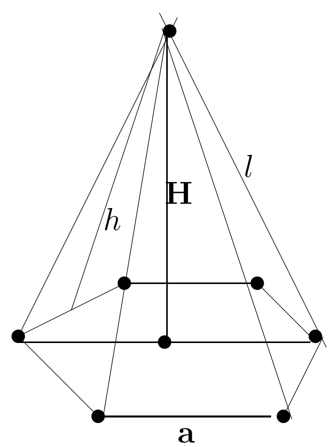
$$P_0 = \frac{1}{4}a * \sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Pole całkowitej powierzchni ostrosłupa równe jest polu sześciokąta foremnego w podstawie o boku a plus pola sze{sciu trójkątów równoramiennych o podstawie a i ramionach l.
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa foremnego

$$P_c = P_a + 6P_0, \qquad P_c = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{4}a\sqrt{4l^2 - a^2} \qquad P_c = \frac{3}{2}[a^2\sqrt{3} + a\sqrt{4l^2 - a^2}].$$

i objętość ostrosłupa foremnego

$$V = \frac{1}{3}\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} * H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} * H$$



Ostrosłup $P_c = \frac{3}{2}[a^2\sqrt{3} + a\sqrt{4l^2 - a^2}], \ V = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3} * H$

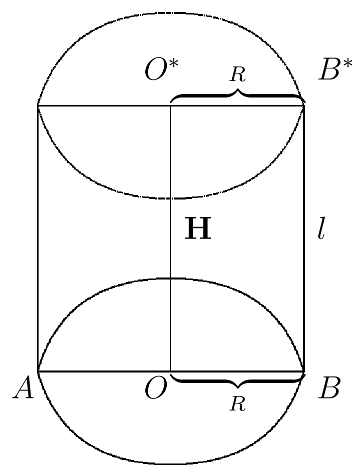
19.5 Bryły obrotowe

Wśród brył obrotowych wyróżniamy walec, stożek i kulę.

19.5.1 Walec

Walec powstaje z obrotu prostokąta wokół jednego z jego boków. Prosty kształt walca prowadzi do oczywistych wzorów na jego całkowitą powierzchnie

i objętość.
Na niżej podanym rysunku mamy zaznaczony promień r i wysokość h walca o średnicy podstawy $AB = 2R$ oraz promirniu górnej podstawy $O^*B^* = R$. Literami O^* i B^* oznaczone są środki okręgów w dolnej i górnej podstawie.



Powierzchnia całkowita walca wyrażona jest przez promień R i wysokość H.

$$P_c = 2\pi RH.$$

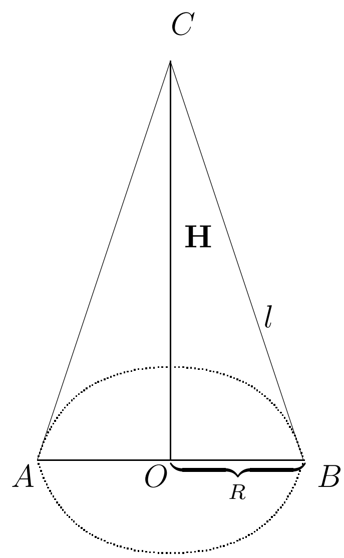
i objętość walca

$$V = \pi R^2 \, H.$$

19.5.2 Stożek

Stożek powstaje z obrotu trójkąta prostokątnego wokół jednej z jego przyprostokątnych.
Oznaczenia:

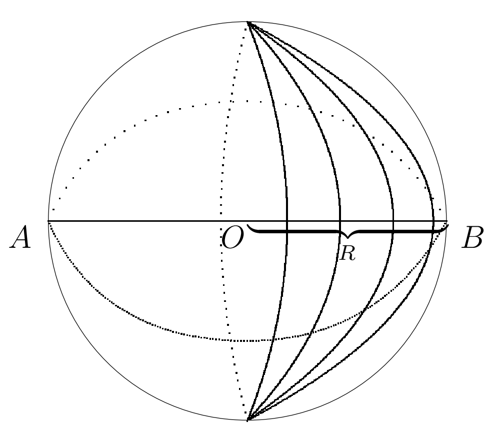
- R promień podstawy stożka
- l tworząca stożka
- H wysokść stożka
- średnica $AB = 2R$ podstawy stożka
- środek O podastawy stożka o wierzchołku C
- P_l powierzchna boczna stożka
- P_c powierzchnia całkowita stożka
- V objętość stożka



- powierzchnia podstawy stożka $P_0 = \pi R^2$,
- powierzchna boczna stożka $P_l = 2\pi R\, l$
- powierzchnia całkowita stożka $P_c = \pi R(R + H)$
- objętość stożka $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

19.5.3 Kula

Kula o środku O promieniu R ma powierzchnie $P = 4\pi R^2$ i objętość $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



Przykład 19.1 *Oblicz powierzchnie i objętość kuli o promieniu* $R = 5$.

Rozwiązanie. Podstawiając $R = 5$ do wzoru na powierzchnię kuli

$$S = 4\pi R^2$$

i do wzoru na objętość kuli

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

obliczamy powirzchnię kuli

$$S = 4\pi * 5^2 = 100\pi$$

i objętość kuli

$$V = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{500}{3}\pi$$

Chapter 20

Trigonometria

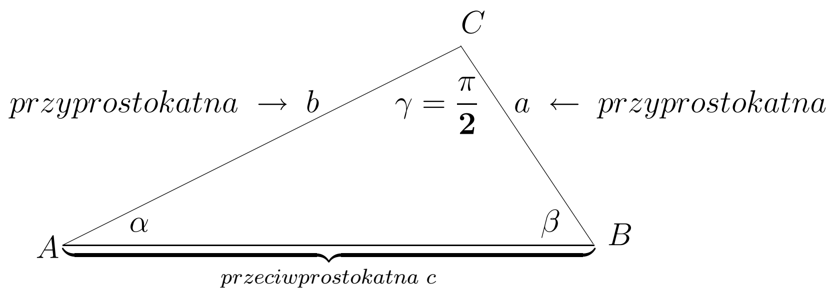
Trigonometria to wiedza o związkach miarowych pomiedzy bokami i kątami trójkątów. Takie znaczenie słowa *Trigonometria* było używane w czasach starożytnych w Babilonie, Egipcie i Grecji.

20.1 Funkcje trygonometryczne

- $\sin\ \alpha$, czytamy sinus α, $\cos\ \alpha$, czytamy cosinus α,
- $\mathrm{tg}\ \alpha$ lub $\tan\ \alpha$, czytamy tangens α,
- $\mathrm{ctg}\ \alpha$ lub $\cot\ \alpha$, czytamy cotangence α,
- $\sec\ \alpha$, czytamy secant α, $\csc\ \alpha$, czytamy cosecant α,
- $\sinh\ \alpha = \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$, czytamy sinus hiperboliczny α,
- $\cos\ \alpha = \dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$, czytamy cosinus hiperboliczny α

Funkcje trygonometryczne określamy w trójkącie prostokątnym lub na kole trygonometrycznym.

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny $\triangle ABC$ o wierzchołkach A, B, C przyprostpkątnych AC i BC oraz przeciwprostokątnej AB [1]



Długości przyprostokątnych i przeciwprostokątnej oznaczamy małymi literami, piszemy

$$a = |BC|, \quad b = |AC|, \quad c = |AB|.$$

Definition 20.1 *Sinus kąta α to stosunek przyprostokątnej a leżącej naprzeciw kąta α do przeciwprostokątnej c*

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Definition 20.2 *Cosinus kąta α to stosunek przyprostokątnej b przyległej do kąta α do przeciwprostokątnej c*

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Definition 20.3 *Tangens kąta α to stosunek przyprostokątnej a leżącej naprzeciw kąta α do przyprostokątnej b przyległej do kąta α*

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b} \quad \text{lub} \quad \mathrm{tan}\alpha = \frac{a}{b}$$

Definition 20.4 *Cotangens kąta α to stosunek przyprostokątnej b leżącej przyległej do kąta α do przyprostokątnej a leżącej na przeciw kąta α*

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{lub} \quad \mathrm{cot}\alpha = \frac{a}{b}$$

Definition 20.5 *Secant kąta α to odwrotność sinusa kąta α. Zatem*

$$\mathrm{sec}\alpha = \frac{c}{a}$$

Definition 20.6 *Cosecant kąta α to odwrotność cosinusa kąta α. Zatem*

$$\mathrm{sec}\alpha = \frac{c}{b}$$

[1] W matematyce wyższej funkcje trygonometrytczne okeślane są przez szeregi potęgowe

Zauważmy, że odwrotność tangensa kąta α równa jest cotangensowi kąta α i odwrotność cotangensa kąta α równa jest tangensowi kąta α

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \mathrm{ctg}\alpha, \quad \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$$

Przykład 20.1 *Podaj wartości funkcji trygonometrycznych określonych w trójkącie prostokątnym o bokach* $a = 3,\ b = 4,\ c = 5$

Rozwiązanie. Kąty tego trójkąta prostokątnego $\alpha = 30^o, \beta = 60^o,\ \gamma = 90^o$

$$sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad tg\alpha = \frac{3}{4},$$
$$ctg\alpha = \frac{4}{3}, \quad sec\alpha = \frac{5}{3}, \quad csc\alpha = \frac{5}{4}.$$

Zauważmy, że określenie funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym dotyczy tylko kątów

$$0 \leq \alpha \leq 90^o \quad lub\ w\ mierze\ lukowej\ \ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ponieważ kąty α i β w trójkącie prostokątnym zmieniają się od zera do kąta prostego. W tym dla $\alpha = 0$ cotangens i secant są nieokreślone.

Również dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$ tangens i cosecant nie są określone.
Niżej podamy deficje funkcji trygonometrycznych na kole trygonometrycznym. Funkcje sinus i cosinus określone są dla wszystkich wartości rzeczywistych argumentu $\alpha \in \{-\infty, \infty\}$. Natomiast funkcje tangens określona jest dla rzeczwistych wartości argumentu $\alpha \neq \frac{k\pi}{2},\ k = 0, 1, 2, ...;$ a funkcja cotangens określna jest dla wszystkich rzeczywistych warto.sci agumentu $\alpha \neq k\pi,\ k = 0, 1, 2, 3, ...;$

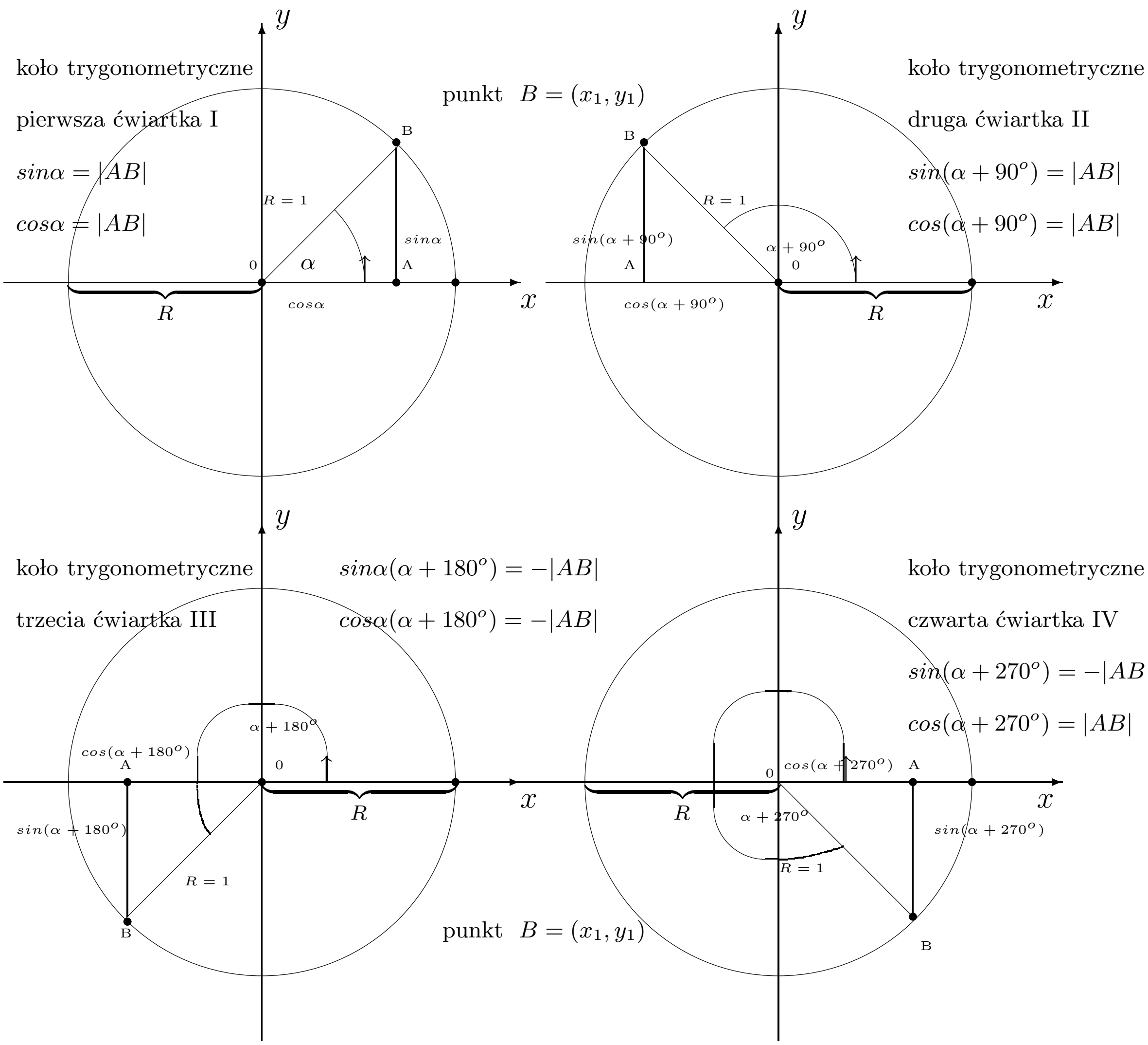
Wartości funkcji sinus i cosinus leżą w przedziel domkinętym $[-1, 1]$. wartości funkcji tangens i cotanges przebiegają cały zbiò liczb rzeczywistych od minus nieskończoności $-\infty$ do plus nieskończoności ∞.

Znak wartości fukcji trugonometrycznych zależy od ćwiartki pierwszej I, drugiej II, trzeciej lub czwartej IV do której należy argument α.
Dla okeślenia znaku wartości funkcji trygonometrycznych stosujemy heurystyczną zasadę:

W pierwszej ćwiarte wszystkie są dodatnie sinus, cosinus, tangens i kotangens, w drugie tylko sinus jest dodatni, w trzecj tangens i cotangens są dodatnie , a w czwartej tylko cosinus jest dodatni.

20.2 Koło trygonometryczne.

Dla wszystkich kątów o wartościach rzeczywistych, ujemnych lub dodatnich, funkcje trygonometryczne definiujemy w kole trygonometrycznym.



Definition 20.7 *Sinus kąta α to stosunek współrzędnej* $\mathbf{y_1}$ *do promienia* **R**

$$\sin\alpha = \frac{y_1}{R}$$

Definition 20.8 *Cosinus kąta α to stosunek współrzędnej* $\mathbf{x_1}$ *do promienia* **R**

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{R}$$

Definition 20.9 *Tangens kąta α to stosunek współrzędnej* $\mathbf{y_1}$ *do wpsółrzędnej* $\mathbf{x_1}$

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{y_1}{x_1}, \quad x_1 \neq 0,$$

Definition 20.10 *Cotangens kąta α to stosunek współrzędnej $\mathbf{x_1}$ do wpsółrzędnej $\mathbf{y_1}$*

$$\text{ctg}\ \alpha = \frac{x_1}{y_1}, \quad y_1 \neq 0,$$

Definition 20.11 *Secant kąta α to odwrotność sinusa kąta α. Zatem*

$$\sec\ \alpha = \frac{R}{y_1}, \quad y_1 \neq 0,$$

Definition 20.12 *Cosecant kąta α to odwrotność cosinusa kąta α. Zatem*

$$\csc\ \alpha = \frac{R}{x_1}, \quad x_1 \neq 0.$$

Ponieważ secant i cosecant określone są przez sinus i cosinus, dlatego dalej wystarczy rozpatrywać cztery funkcje trygonometryczne sinus, cosinus, tangens i cotangens.

20.2.1 Wzory redykcyjne

Wprost z definicji funkcji trygonometrycznych zauważamy, że wszystkie funkcje są nieujemne w pierwszej ćwiartce koła trygonometrycznego, gdyż dla kąta

$$0 \leq \alpha \leq 90^o,$$

współrzędne punktu $p = (x_1, y_1)$ są nieujemne, to jest $x_1 \geq 0,\ y_1 \geq 0$ i promień $R > 0$.
W drugiej ćwiartce tylko sinus ($\sin\alpha \geq 0$), jest nieujemny, gdyż współrzędna $y_1 \geq 0$.
W trzeciej ćwiartce tangens i cotanges ($\text{tg}\alpha \geq 0,\ \text{ctg}\alpha \geq 0$), są nieujemne, gdyż obie współrzędne $x_1 \leq 0, , y_1 \leq 0$ są ujemne i wtedy iloraz ($\frac{y_1}{x_1} \geq 0$) lub ($\frac{x_1}{y_1} \geq 0$).
W czwartej ćwiartce tylko cosinus ($\cos\alpha \geq 0$) jest nieujemny, gdyż współrzędna $x_1 \geq 0$. W tej pozycji kąta α, z wykresu koła trygonometrycznego odczytujemy wartości funkcji trygonometrycznych zapisane w niżej podanej tabeli

$0 \leq \alpha \leq 90^o$	$\sin\alpha \geq 0$	$\cos\alpha \geq 0$	$\text{tg}\alpha \geq 0$	$\text{ctg}\alpha \geq 0$
$90^o \leq \alpha \leq 180^o$	$\sin\alpha \geq 0$	$\cos\alpha \leq 0$	$\text{tg}\alpha \leq 0$	$\text{ctg}\alpha \leq 0$
$180^o \leq \alpha \leq 270^o$	$\sin\alpha \leq 0$	$\cos\alpha \leq 0$	$\text{tg}\alpha \geq 0$	$\text{ctg}\alpha \geq 0$
$270 \leq \alpha \leq 360^o$	$\sin\alpha \leq 0$	$\cos\alpha \geq 0$	$\text{tg}\alpha \leq 0$	$\text{ctg}\alpha \leq 0$

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta α osiągają już w pierwszej ćwiartce koła trygonometrycznego wszystkie możliwe wartości bezwzględne (z dokładnością do znaku). Zatem, inne wartości różnią się od nich jedynie znakiem. Te różnice ustalają wzory redukcyjne, które podajemy niżej.

Najpierw, zauważmy, że jeżeli kąt $0 \leq \alpha \leq 90^o$ leży w pierwszej ćwiartce to kąt $90^o - \alpha$ też leży w pierwszej ćwiartce oraz kąt $90^o + \alpha$ leży w drugiej ćwiartce. Natomiast, kąt $-\alpha$ leży w czwartej ćwiartce. W tej pozycji kąta α, z wykresu koła trygonometrycznego odczytujemy wartości funkcji trygonometrycznych zapisane w niżej podanej tabeli

$\sin(90^o - \alpha) = \cos\alpha$	$\sin(90^o + \alpha) = \cos\alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(90^o - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(90^o + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\mathrm{tg}(90^o - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}(90^O + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}(90^O - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(90^O + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$

Teraz, zauważmy, że jeżeli kąt $0 \leq \alpha \leq 90^o$ leży w pierwszej ćwiartce to kąt $180^o - \alpha$ leży w drugiej ćwiartce oraz kąt $180^o + \alpha$ leży w trzeciej ćwiartce.

$\sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin(180^o + \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(180^o + \alpha) = -\cos\alpha$
$\mathrm{tg}(180^o - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}(180^O + \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}(180^O - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(180^O + \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$

Zauważmy podobnie, że jeżeli kąt $0 \leq \alpha \leq 90^o$ leży w pierwszej ćwiartce to kąt $270^o - \alpha$ leży w trzeciej ćwiartce oraz kąt $180^o + \alpha$ leży w czwartej ćwiartce. Zatem, mamy następujące wzory redukcyjne:

$\sin(270^o - \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(270^o + \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(270^o - \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(270^o + \alpha) = \sin\alpha$
$\mathrm{tg}(270^o - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}(270^O + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$
$\mathrm{ctg}(270^O - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(270^O + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$

Niżej w tablicy podajemy zebrane wzory redukcyjne w mierze łukowej kątów.

Kąt	sinus	cosinus	tangens	cotangens
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \mathrm{sin}\alpha$	$(\cos\pi - \alpha) = -\mathrm{cos}\alpha$	$\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$
$\pi + \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\mathrm{sin}\alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\mathrm{cos}\alpha$	$\mathrm{tg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\mathrm{cos}\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\mathrm{sin}\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{cos}\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \mathrm{sin}\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$
$2\pi - \alpha$	$\sin(2\pi - \alpha) = -\mathrm{sin}\alpha$	$\cos(2\pi - \alpha) = \mathrm{cos}\alpha$	$\mathrm{tg}(2\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(2\pi - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$

20.3 Zadania

Zadanie 20.1 *Długości boków trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$ są równe*

$$a = |BC| = 6, \quad b = |AC| = 8, \quad c = |AB| = 10$$

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha,\quad \sin\beta,\quad \cos\alpha,\quad \cos\beta,$$

$$tg\,\alpha,\quad tg\,\beta,\quad cotg\,\alpha,\quad cotg\,\beta$$

kątów $\alpha,\ \beta$ *leżących naprzeciw odpowiednich boków* $BC,\ AC$.

Zadanie 20.2 (i) *Narysuj położenie punktów*

$$p = (p_1, p_2) = (\sqrt{3}, 1), \quad q = (q_1, q_2) = (-\sqrt{3}, -1).$$

na kole trygonometrycznych o promieniu $R = 2$.
(ii) *Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$\begin{array}{llclcllcl}
(a) & \sin 30^0 & = & \frac{p_2}{R} & = & \qquad , \sin 60^0 & = & \frac{p_1}{R} & = \\
(b) & \cos 30^0 & = & \frac{p_1}{R} & = & \qquad , \cos 60^0 & = & \frac{p_2}{R} & = \\
(c) & tg\, 30^0 & = & \frac{p_2}{p_1} & = & \qquad , tg\, 60^0 & = & \frac{p_1}{p_2} & = \\
(d) & cotg\, 30^0 & = & \frac{p_1}{p_2} & = & \qquad , cotg\, 60^0 & = & \frac{p_2}{p_1} & =
\end{array}$$

(iii) *Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$\begin{array}{llclcllcl}
(a) & \sin 210^0 & = & \frac{q_2}{R} & = & \qquad , \sin 240^0 & = & \frac{q_1}{R} & = \\
(b) & \cos 210^0 & = & \frac{q_1}{R} & = & \qquad , \cos 240^0 & = & \frac{q_2}{R} & = \\
(c) & tg\, 210^0 & = & \frac{q_2}{q_1} & = & \qquad , tg\, 240^0 & = & \frac{q_1}{q_2} & = \\
(d) & cotg\, 210^0 & = & \frac{q_1}{q_2} & = & \qquad , cotg\, 240^0 & = & \frac{q_2}{q_1} & =
\end{array}$$

Zadanie 20.3 *Korzystając ze wzorów redukcyjnych oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$\begin{array}{llcllc}
(a) & \sin 120^0 & = & \qquad & \sin 150^0 & = \\
(b) & \cos 120^0 & = & & \cos 150^0 & = \\
(c) & tg\, 120^0 & = & & tg\, 150^0 & = \\
(d) & cotg\, 120^0 & = & & cotg\, 150^0 & =
\end{array}$$

Zadanie 20.4 *Korzystając ze wzorów redukcyjnych oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$\begin{array}{llcllc}
(a) & \sin 210^0 & = & \qquad & \sin 240^0 & = \\
(b) & \cos 210^0 & = & & \cos 240^0 & = \\
(c) & tg\, 210^0 & = & & tg\, 240^0 & = \\
(d) & cotg\, 210^0 & = & & cotg\, 240^0 & =
\end{array}$$

Zadanie 20.5 *Korzystając ze wzorów redukcyjnych oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$\begin{array}{llcllc}
(a) & \sin 300^0 & = & \qquad & \sin 330^0 & = \\
(b) & \cos 300^0 & = & & \cos 330^0 & = \\
(c) & tg\, 300^0 & = & & tg\, 330^0 & = \\
(d) & cotg\, 300^0 & = & & cotg\, 330^0 & =
\end{array}$$

Zadanie 20.6 (i) *Oblicz okres następującej funkcji:*

$$(a)\quad f(x) = sin\frac{1}{3}x, \qquad (b)\quad f(x) = cos\frac{1}{3}x.$$
$$(c)\quad f(x) = tg\frac{1}{3}x, \qquad (d)\quad f(x) = cotg\frac{1}{3}x.$$

Zadanie 20.7 *Narysuj wykres funkcji*

$$(i)\quad f(x) = sin\frac{1}{3}x, \qquad dla \quad 0 \leq x \leq 6\pi$$
$$(ii)\quad f(x) = tg\frac{1}{3}x \qquad dla \quad -3\pi \leq x \leq 3\pi.$$

20.3.1 Funkcje periodyczne

Funkcja $f(x)$ jest periodyczna, jeżeli istnieje liczba dodatnia $\omega > 0$ taka, że

$$f(x+\omega) = f(x), \tag{20.1}$$

dla każdej rzeczywistej wartości argumentu należącego do dziedziny $x \in D$. [2]
Jasne, że jeżeli funkcja $f(x)$ jest periodyczna o okresie $\omega > 0$, to zachodzi następująca tożsamość:

$$f(x + k\,\omega) = f(x), \qquad x \in D,$$

dla każdego całkowitego $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
Okresem funkcji $f(x)$ nazywamy najmiejszą z liczb $\omega > 0$, która spełnia tożsamość (20.1). [3]

Niżej sprawdzimy, że *funkcje trygonometryczne są periodyczne.*
Mianowicie, zauważamy, że jeżeli promień R obróci się o 360^o lub w mierze łukowej o 2π, to punkt $p = (x_1, y_1)$ wróci do pozycji wyjściowej. Co wiecej, jeżeli promień R obróci się w kierunku dodatnim lub ujemnym o wielokrotność okresu $\omega = 360^o$ lub w mierze łukowej o wielokrotność $\omega = 2\pi$, to punkt $p = (x_1, y_1)$ też wróci do pozycji wyjściowej.
Okresem funkcji sinus i cosinus jest liczba $\omega = 360^o$ lub w mierze łukowej liczba $\omega = 2\pi$. Natomiast, dla funkcji tanges i cotangens okresem jest liczba miejsza $\omega = 180^o$ lub w mierze łukowej $\omega = \pi$. Istotnie, funkcje tangens i cotangens osiągają te same wartości w pierwszej i w trzeciej ćwiartce koła trygonometrycznego, gdyż

$$\text{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y_1}{-x_1}, \quad \text{oraz} \quad \text{ctg}\alpha = \frac{x_1}{y_1} = \frac{-x_1}{-y_1}, \quad x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 0.$$

[2] Dziedziną funakcji $f(x)$ nazywamy zbiòr argumentòw x dla ktòch $f(x)$ jest okkre].slna
[3] Tożsamość znaczy, że równość zachodzi dla wszystkich wartości x w dziedzinie tożsamości $x \in D$.

Przykład 20.2 *Oblicz okres następującej funkcji:*

$$f(x) = \sin \frac{3}{2}x$$

Rozawiązanie. Wiemy, że funkcja sinus ma okres 2π. Zatem okresem funkcji $f(x)$ jest liczba ω taka, że

$$f(x+\omega) = \sin \frac{3}{2}(x+\omega) = \sin(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\omega) = \sin \frac{3}{2}x = f(x)$$

dla każdego rzeczywistego x.

Skąd obliczamy okres

$$\frac{3}{2}\omega = 2\pi, \quad \omega = \frac{4}{3}\pi$$

Sprawdzamy, że okresem funkcji $f(x)$ jest liczba $\omega = \frac{4}{3}\pi$. Istotnie, mamy równość

$$\begin{aligned} f(x+\omega) = f(x + \frac{4}{3}\pi) &= \sin \frac{3}{2}(x + \frac{4}{3}\pi) \\ &= \sin(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\frac{4}{3}\pi). \\ &= \sin(x+2\pi) = \sin x = f(x). \end{aligned}$$

20.3.2 Wykresy funkcji trygonometrycznych

Funkcje trygonometryczne sinus i cosinus określone są na całej osi liczbowej, dla wszystkich wartości rzeczywistych $x \in (-\infty, \infty)$. Również są funkcjami periodycznymi o tym samym okresie $\omega = 2\pi$.

To znaczy, że funkcje $f(x) = sin\ x$ i $g(x) = cos\ x$ spełniają tożsamość [4]

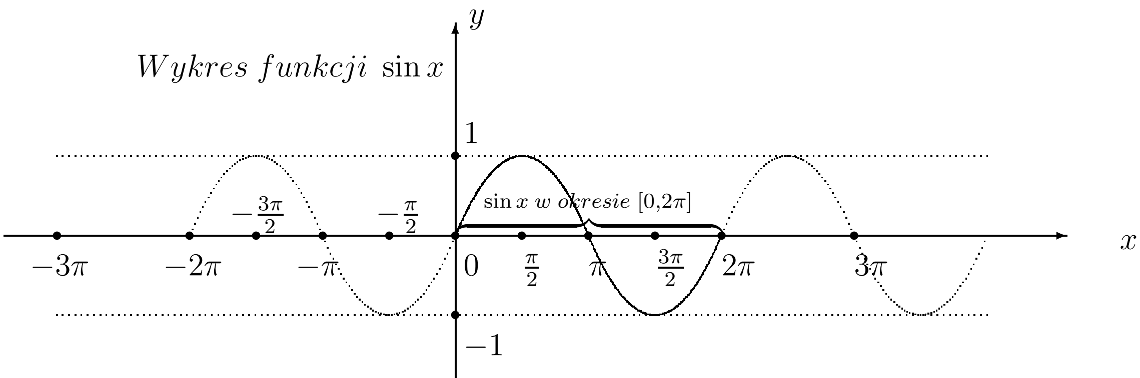
$$f(x+2\pi)\sin(x+2\pi) = \sin\ x) = f(x),$$

$$g(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) cos\ x = g(x)$$

dla każdego $\in (-\infty, \infty)$.

[4] Tożsamość to znaczy, że zachodzi równość pomiędzy lewą i prawą stroną równania dla wszytstkich wartości zmiennej x.

Wykreślając funkcje trygonometryczne argument odkładamy na osi x, jak na rysunku.



Z określenia funkcji sinus

$$|\sin x| = |\frac{y_1}{R}| \leq 1, \quad \text{gdyz} \quad R \geq |y_1|, \quad \text{dla} \quad -\infty < x < \infty.$$

Wartości funkcji sinus nie przekraczają przedziału $[-1, 1]$. To znaczy, że dla wszystkich wartości argumentu $-\infty < x < \infty$ spełniona jest nierówność

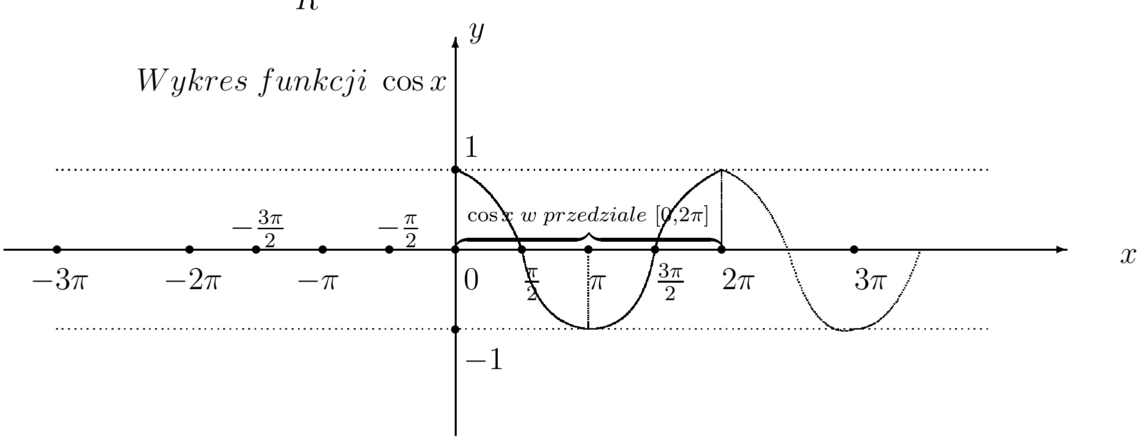
$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

Istotnie, z określenia funkcji sinus

$$|\sin x| = |\frac{y_1}{R}| \leq 1, \quad \text{gdyz} \quad R \geq |y_1|, \quad \text{dla} \quad -\infty < x < \infty.$$

Podobnie, funkcja cosinus jest periodyczna o okresie 2π i określona dla wszystkich rzeczywistych wartości kąta $-\infty < x < \infty$. Jej warotości nie przekraczają przedziału $[-1.1]$, gdyż z okresślenia funkcji cosinusa

$$|\cos x| = |\frac{x_1}{R}| \leq 1, \quad \text{gdyz} \quad R \geq |x_1|, \quad \text{dla} \quad -\infty < x < \infty.$$



Funkcje trygonometryczne tangens i cotangens są periodyczne o okresie $\omega = \pi$. Istotnie, kąt $x + \pi$ leży w trzeciej ćwiartce koła trygonometrycznego. Z tabeli odczytujeme wartość $\mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}x$. Zatem, prawdziwa jest następująca tożsamość:

$$f(x+\pi) = \mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}x = f(x),$$

dla każdego argumentu w dziedzinie funkcji tangens

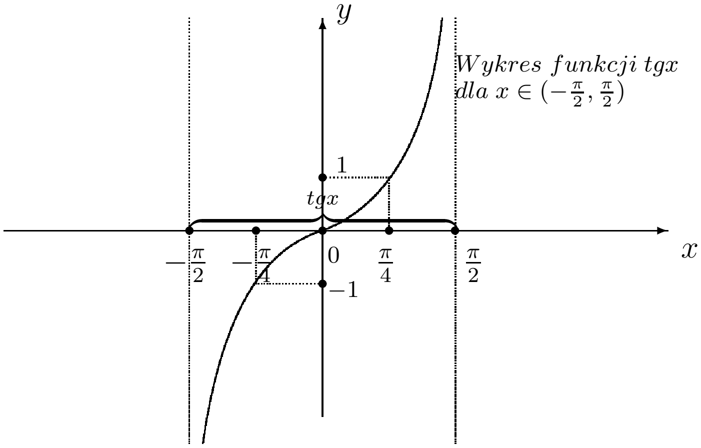
$$x \in D = \{x \ : x \neq \frac{k\pi}{2},\ k = 0, \pm 1 \pm 2, ...;\}.$$

i tożsamość

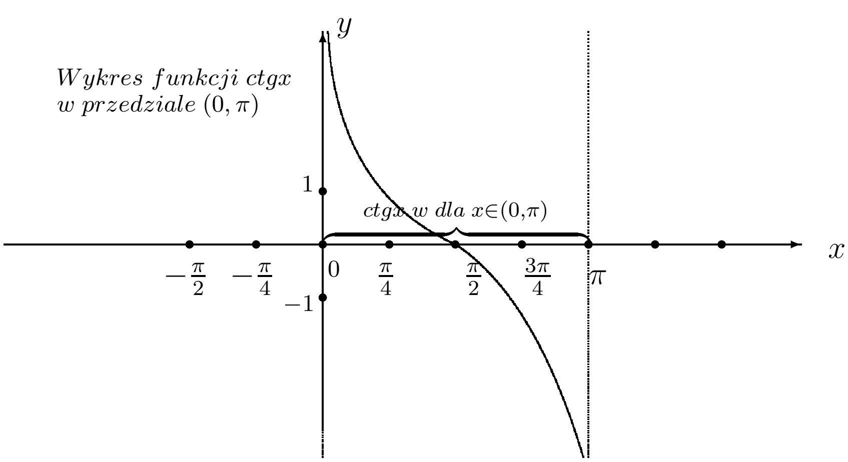
$$f(x+\pi) = \mathrm{ctg}(x+\pi) = \mathrm{ctg}x = f(x),$$

dla każdego argumentu w dziedzinie funkcji cotangens

$$x \in D = \{x \ : x \neq k\pi,\ k = 0, \pm 1 \pm 2, ...;\}.$$



Wykres funkcji cotangens



20.4 Tożsamości trygonometryczne

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość, która jest prawdziwa dla wszystkich wartości kątów w dziedzinie tożsamości. W odróżnieniu od tożsamości,

równanie trygonometryczne jest spełnione tylko dla niektórych wartości kątów z dziedziny równania.
Podobnie, wzory trygonometryczne są tożsamościami dla wszystkich wartości kątów z dziedziny ich określenia.

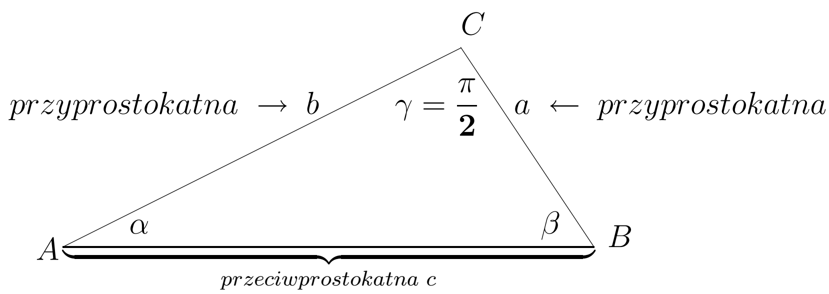
20.4.1 Jedynka trygonometryczna

Jedynka trygonometryczna to jest tożsamość

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

dla wszystkich wartości rzeczywistych kąta $\alpha \in (-\infty, \infty)$.
Wprost z definicji funkcji sinus i cosinus obliczamy przyprostokątne a i b trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$

$$a = c\sin\alpha, \quad b = c\cos\alpha.$$



Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że suma kwadratów przyprostokątnych równa jest kwadratowi przeciwprostokątnej

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

$$Po\ podstawieniu\ \ a = c * sin\ \alpha, \quad b = c * cos\ \alpha\ \ otrzymamy$$

$$(c\sin\alpha)^2 + (c\cos\alpha)^2 = c^2,$$

$$c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = c^2 \ \ | : c^2,$$

Skąd wynika tozsamość

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

dla każdej wartości $\alpha \in (-\infty, \infty)$. To jest jedynka trygonometryczna.

Z jedynki trygonometrycznej wynikają następujące tożsamości:

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = csc^2\alpha, \qquad \alpha \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2,\ \pm 3, ...;$$

Istotnie, z definicji funkcji tangens wynika równość

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{cos^2\ \alpha + sin^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \csc^2\alpha.$$

dla każdego kąta $\alpha \neq (2\pi + 1)\dfrac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2,\ \pm 3, ...;$ dla którego

$$cos\ \alpha \neq 0.$$

To znaczy dla kąta α ze zbioru określoności funkcji tangens.[5]
Podobbnie z defincji funkcji cotangens wynika równość

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \sec^2\alpha.$$

dla każdego kąta $\alpha \neq k * \pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2,\ \pm 3, ...;$ dla którego

$$sin\ \alpha \neq 0.$$

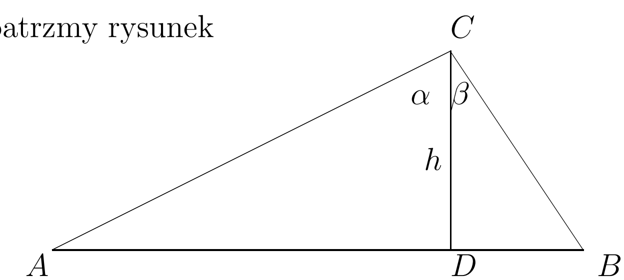
To znaczy dla kąta α ze zbioru określoności funkcji cotangens. [6]

20.4.2 Funkcje sinus i cosinus sumy i różnicy kątów α, β

Niżej wyprowadzimy wzory na sumę i różnię dwóch kątów

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\alpha, \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \cos\alpha, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \sin\alpha, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \sin\alpha, \end{aligned} \tag{20.2}$$

Rozpatrzmy rysunek



Wysokość h trójkąta $\triangle ABC$

[5] Nieparzystą wielokrotność kąta prostego piszemy $(2\pi + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k =, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$

[6] Parzystą wielokrotność kąta półpełnego piszemy $k\ \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$

Zauważamy, że

$$\sin\alpha = \frac{|AD|}{|AC|}, \quad \sin\beta = \frac{|DB|}{|BC|},$$
$$\cos\alpha = \frac{h}{|AC|}, \quad \cos\beta = \frac{h}{|BC|},$$
$$h = |AC|\cos\alpha, \quad h = |BC|\cos\beta$$

Pole P trójkąta $\triangle ABC$ jest sumą pola P_1 trójkąta $\triangle ADC$ i pola P_2 trójkąta $\triangle DBC$

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2}|AC|\,|BC|\sin((\alpha+\beta) \tag{20.3}$$

Z drugiej strony, wiemy, że

$$P_1 = \frac{1}{2}|AC|\;h\;\sin\alpha, \qquad P_2 = \frac{1}{2}|BC|\;h\;\sin\beta, \tag{20.4}$$

Porównując pola określone przez równości (20.3) i (20.4), przez proste przekształcenia, otrzymamy wzór na sinus sumy dwóch kątów α i β

$$\frac{1}{2}|AC|\,|BC|\sin((\alpha+\beta) = \frac{1}{2}|AC|\;h\;\sin\alpha + \frac{1}{2}|BC|\;h\;\sin\beta,$$
$$|AC|\,|BC|\sin(\alpha+\beta) = |AC|\,|BC|\;\cos\beta\;\sin\alpha + |AC|\,|BC|\;\cos\alpha,$$

Skad sinus sumy

$$\sin(\alpha+\beta) = \underbrace{\sin\alpha\;\cos\beta + \sin\beta\;\cos\alpha}_{sin\ (\alpha+\beta)},$$

Pozostałe wzory wyprowadzamy korzystając ze wzorów redukcyjnych.

$$\begin{aligned}
\sin((\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) &= \sin\alpha\;\cos(-\beta) + \sin(-\beta)\;\cos\alpha \\
&= \underbrace{\sin\alpha\;\cos\beta - \sin\beta\;\cos\alpha}_{sin\ (\alpha-\beta)}, \\
\cos(\alpha+\beta) = \sin(90^o - (\alpha+\beta)) &= \sin((90^o-\alpha)-\beta) \\
&= \sin(90^o-\alpha)\cos\beta - \sin\beta\cos(90^o-\alpha), \\
&= \underbrace{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}_{cos\ (\alpha+\beta)}, \\
\cos(\alpha-\beta) = \sin(90^o - (\alpha-\beta)) &= \sin((90^o-\alpha)+\beta) \\
&= \sin(90^o-\alpha)\cos\beta + \sin\beta\cos(90^o-\alpha), \\
&= \underbrace{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}_{cos\ (\alpha-\beta)},
\end{aligned}$$

Wzory na tangens i cotangens sumy i różnicy dwóch kątów wynikają bezpośrednio z powyżych wzorów

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\ \cos\beta+\sin\beta\ \cos\alpha}{\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\beta\ \sin\alpha}=\underbrace{\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}}_{tg\ (\alpha+\beta)}$$

$$dla\quad \alpha+\beta\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,....;$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\beta\ \sin\alpha}{\sin\alpha\ \cos\beta+\sin\beta\ \cos\alpha}=\underbrace{\frac{\mathrm{ctg}\alpha\ \mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}}_{ctg\ (\alpha+\beta)}$$

$$dla\quad \alpha+\beta\neq k\,\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,....;$$

Podobnie wyprowadzamy wzory na tangens i cotangens różnicy dwóch kątów.

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\ \cos\beta-\sin\beta\ \cos\alpha}{\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\beta\ \sin\alpha}=\underbrace{\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}}_{tg\ (\alpha-\beta)}$$

$$dla\quad \alpha-\beta\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,....;$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\beta\ \sin\alpha}{\sin\alpha\ \cos\beta-\sin\beta\ \cos\alpha}=\underbrace{\frac{\mathrm{ctg}\alpha\ \mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha}}_{ctg\ (\alpha-\beta)}$$

$$dla\quad \alpha-\beta\neq k\,\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,....;$$

20.4.3 Wzory kąta podwòjonego

Wzory kąta podwójnego wynikają bezpośrednio z powyższych wzorów na sumę. Mianowicie, dla $\alpha=\beta$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\ \cos\alpha,\quad dla\quad \alpha\in(-\infty,\infty)$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\quad dla\quad \alpha\in(-\infty,\infty)$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha},\quad dla\quad \alpha\neq(2k+1)\ \frac{\pi}{4},\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...;$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}^2\alpha},\quad dla\quad \alpha\neq k\,\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...;$$

20.4.4 Wzory kąta połówkowego

Wzory kąta połówkowego otrzymujemy przez podstawienie do powyższych wzorów kąta podwójnego zamiast α połowę kąta $\frac{1}{2}\alpha$, wtedy otrzymamy

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha\ \cos\frac{1}{2}\alpha, \qquad \alpha \in (-\infty, \infty),$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\alpha, \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha, \quad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 1$$

$$\alpha \in (-\infty, \infty),$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\alpha} \quad dla \quad \alpha \neq (2k+1)\,\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\frac{1}{2}\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}^2\frac{1}{2}\alpha}, \quad dla \quad \alpha \neq k\,\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;$$

20.4.5 funkcje trygonometryczne połowy kąta

Z powyższych wzorów kąta połówkowego bezpośrednio wynikają wzory połowy kąta. Mianowicie, obliczając cosinus i sinus ze wzorów

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 1, \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$$

otrzymamy wzóry cosinusa i sinusa na połowę kąta α

$$|\cos\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad |\sin\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

dla $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

Wzory połowy kąta dla tangensa i cotangensa wynikają bezpośrednio z defincji tych funkcji i wzorów dla sinusa i cosinusa

$$|\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha| = |\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}| = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

dla $\alpha \neq (2k+1)\,\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;$

Cotangens jest odwrotnością tangensa, zatem

$$\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

dla $\alpha \neq 2k\,\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;$

20.4.6 Wyrażenie funkcji trygonometrycznych przez $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha$

Oznaczmy przez

$$t = \mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha \quad dla \quad \alpha \neq (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...; .$$

Wtedy funkcje trygonometryczne kąta α można zapisać w postaci następujących wymierażeń wymiernych zmiennej t.

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty,$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \quad t \neq -1, 1, \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1-t^2}{2t} \quad t \neq 0.$$

Istotnie, wiemy, że

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\ \cos\tfrac{1}{2}\alpha \\
&= \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\ \cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha + \cos^2\frac{1}{2}\alpha} \\
&= \frac{\dfrac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\ \cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}}{\dfrac{\sin^2\frac{1}{2}\alpha + \cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}} = \frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned}$$

Podobnie funkcja cosinus

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha \\
&= \frac{\cos^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\cos^2\frac{1}{2} + \sin^2\frac{1}{2}\alpha} \\
&= \frac{\dfrac{\cos^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}}{\dfrac{\cos^2\frac{1}{2} + \sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

Dla funkcji tangens i cotangens wzory płowy kąta wynikają wprost z ich definicji i wyżej podanych wzorów dla funkcji sinus i cosinus

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}, \quad t \neq -1, 1$$

Cotanges jest odwrotnością tangnsa. Zatem wzór dla cotangensa

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1-t^2}{2t}, \quad t \neq 0.$$

20.4.7 Suma i różnica funkcji trygonometrycznych

Niżej podajemy następujące wzory na sumę i ró znicę funkcji trygonometrycznych

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2},\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2},\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2},\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2},\\
\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta &= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad (20.5)\\
\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta &= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\\
\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{tg}\beta &= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\\
\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta &= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}
\end{aligned}$$

Powyższe wzory wynikają ze wzorów (20.4) sinusa i cosinusa sumy i różnicy kątów. Mianowicie, wprowadzamy nowe zmienne

$$\alpha = x+y, \quad \beta = x-y, \quad x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2},$$

Korzystając ze wzorów (20.4) na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów zauważamy, że

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= \sin(x+y) + \sin(x-y)\\
&= (\sin x\cos y + \sin y\cos x) + (\sin x\cos y - \sin y\cos x)\\
&= 2\sin x\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.\\
\sin\alpha - \sin\beta &= \sin(x+y) - \sin(x-y)\\
&= (\sin x\cos y + \sin y\cos x) - (\sin x\cos y - \sin y\cos x)\\
&= 2\sin y\cos x = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha+\cos\beta &= \cos(x+y)+\cos(x-y)\\
&= (\cos x\cos y-\sin x\sin y)+(\cos x\cos y+\sin x\sin y)\\
&= 2\cos x\cos y = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}.\\
\cos\alpha-\cos\beta &= \cos(x+y)-\cos(x-y)\\
&= (\cos x\cos y-\sin x\sin y)-(\cos x\cos y+\sin x\sin y)\\
&= -2\sin x\sin y = -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}$$

Wzory sumy i różnicy tangensa i cotangensa wynikają wprost z definicji powyższych wzorów dla sinusa cosinusa.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta},\\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\\
\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta},\\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}
\end{aligned} \tag{20.6}$$

Ponieważ cotangens jest odwrotnością tangensa, zatem wzór dla sumy cotangensa

$$\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$
$$\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

20.5 Równania trygonometryczne

Zacznijmy od najprostrzych równań trygonometrycznych, rozwiązania których są częścią rozwiązań bardziej złożonych równań.

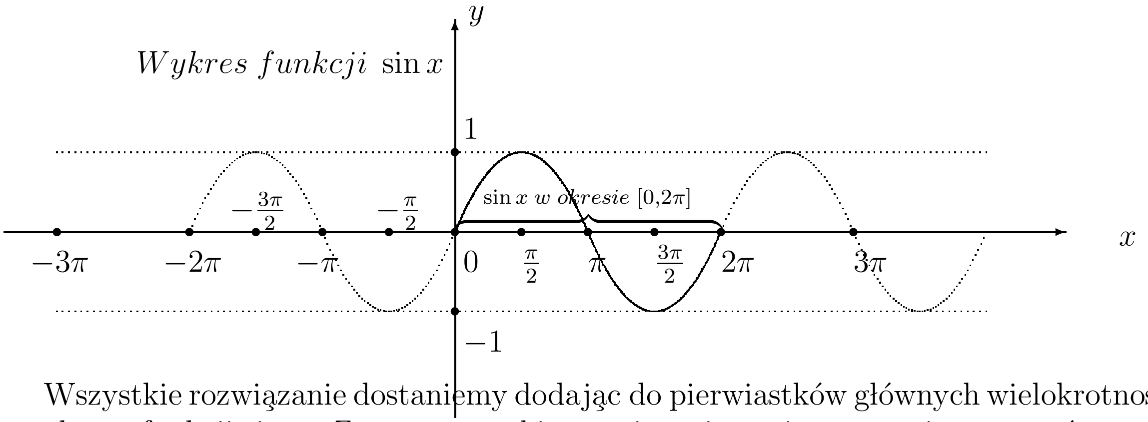
Przykład 20.3 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$(i)\quad \sin x = 0,\qquad (ii)\quad |\sin x| = 1.$$

Rozwiązanie (i). Głównymi pierwiastami tego równania, to znaczy zerami funkcji sinus w jej okresie od 0 do 360^o lub w mierze łukowej w zakresie od $0\le\alpha\le 2\pi$ są rozwiązania

$$x = 0,\quad \text{lub}\quad x = \pi.$$

To rozwiązanie jest zaznaczo na wykresie funkcji $y = \sin x$.



Wszystkie rozwiązanie dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji sinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi,$$

dla parzystych i dla nieparzystych k. To znaczy, że wszystkie rozwiązania są wielokrotnością liczby π,

$$x_k = k\,\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Rozwiązanie (ii). Głównymi pierwiastkami równania

$$|\sin x| = 1, \quad \text{lub} \quad \sin x = 1 \quad \text{lub} \quad \sin x = -1.$$

są liczby

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{lub} \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

Wszystkie rozwiązanie dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji sinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{3\pi}{2} + \pi + 2k\pi =$$

dla parzystych i dla nieparzystych k. To znaczy, że wszystkie rozwiązania są następującej postaci:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

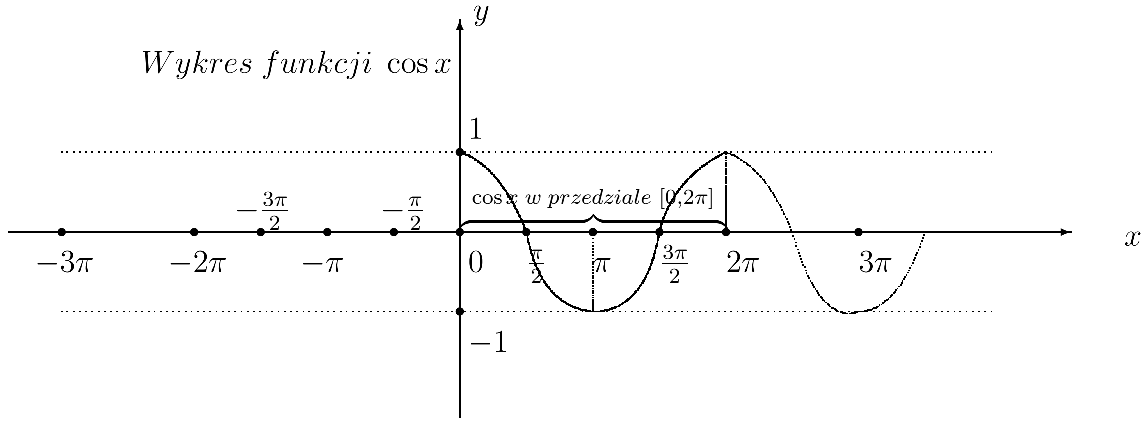
Przykład 20.4 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$(i) \quad \cos x = 0, \qquad (ii) \quad |\cos x| = 1.$$

Rozwiązanie (i). Głównymi pierwiastami tego równania, to znaczy zerami funkcji cosinus w jej okresie od 0 do 360^o lub w mierze łukowej w zakresie od $0 \le \alpha \le 2\pi$ są rozwiązania

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{lub} \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

To rozwiąnie jest zaznaczone na wykresie funkcji $y = \cos x$.



Wszystkie rozwiązanie dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji cosinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

To znaczy, że wszystkie rozwiązania są następującej postaci:

$$x_k = (2k+1)\,\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Rozwiązanie (ii). Głównymi pierwiastkami równania

$$|\cos x| = 1, \quad \text{lub} \quad \cos x = 1 \quad \text{lub} \quad \cos x = -1.$$

są liczby

$$x = 0, \quad \text{lub} \quad x = \pi.$$

Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielikrotność okresu funkcji cosinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi,$$

To znaczy, że wszystkie rozwiązania dla parzystych i nieparzystych k, są następującej postaci:

$$x_k = k\,\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Zauważmy, że sinus i cosinus kątów $\alpha_k = k\pi$ lub $\alpha_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ możemy napisać w następującej postaci potęgi minus jedynki:

$$\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k, \qquad \cos k\pi = (-1)^k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... :$$

Przykład 20.5 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

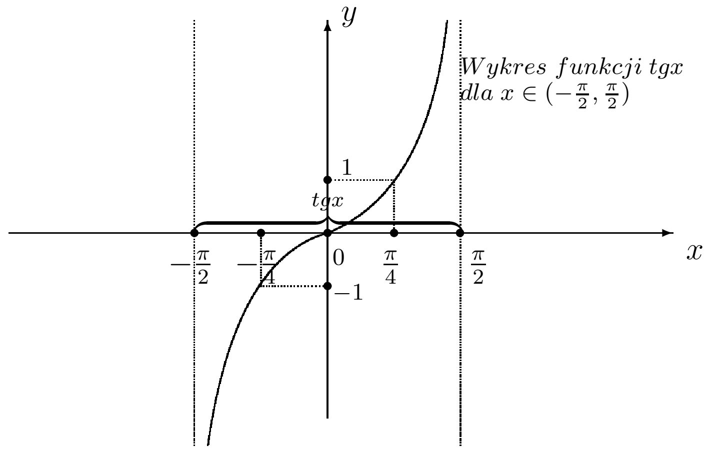
$$(i) \quad \mathrm{tg}x = 0, \qquad (ii) \quad |\mathrm{tg}x| = 1.$$

$$(iii) \quad \mathrm{ctg}x = 0, \qquad (iv) \quad \mathrm{ctg}x| = 1.$$

Rozwiązanie (i). Ponieważ okresem funkcji tangens jest liczab π, to głównym pierwiastkiem równania

$$\operatorname{tg} x = 0,$$

jest $x = 0$. Wtedy również sin $x = 0$.



Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastka głównego wielokrotność okresu funkcji tangens. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Rozwiązanie (ii). W zakresie okresu funkcji tangens od $-\dfrac{\pi}{2}$ do $\dfrac{\pi}{2}$ są dwa pierwiastki główne równania

$$|\operatorname{tg}|\, x = 1, \quad \text{lub} \quad \operatorname{tg} x = 1, \quad \operatorname{tg} x = -1.$$

$x_1 = -\dfrac{\pi}{4}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastka głównego wielokrotność okresu funkcji tangens. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = -\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

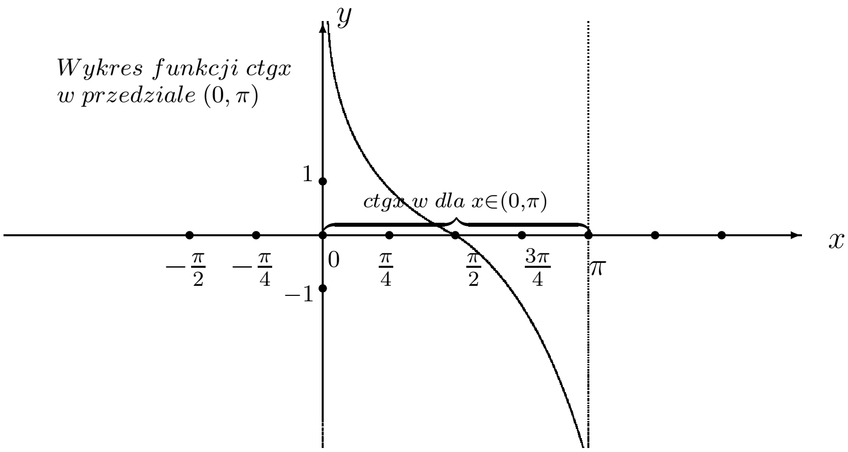
lub zapisane w postaci jednego wzoru

$$x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Rozwiązanie (iii). W zakresie okresu funkcji cotangens od 0 do $,\pi$ pierwiastkiem głównym równania

$$\operatorname{ctg} x = 0,$$

jest liczba $x = \dfrac{\pi}{2}$.



Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastka głównego wielokrotność okresu funkcji cotangens. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Rozwiązanie (iv). Głównymi pierwiastkami równania

$$|\mathrm{ctg} x| = 1,$$

$$lub$$

$$ctg \;\; x = 1, \qquad \mathrm{ctg} x = -1.$$

są liczby

$$x_1 = \frac{\pi}{4}, \qquad x_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielikrotność okresu funkcji cosinus.
Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi = (4k+1)\frac{\pi}{4},$$

lub

$$x_k = \frac{3\pi}{4} + k\pi = (4k+3)\frac{\pi}{4}$$

$$dla \;\; k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Niżej w tablicy podane są wartości funkcji trygonometrycznych kątów wybranych.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
$\alpha=0$	0	1	0	∞
$\alpha=\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\alpha=\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\alpha=\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\alpha=\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
$\alpha=\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\alpha=\pi$	0	-1	0	$-\infty$
$\alpha=\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\alpha=\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0
$\alpha=\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\alpha=2\pi$	0	1	0	∞

Przykład 20.6 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$\sin x - \cos x = 0.$$

Rozwiązanie. W pierszej kolejności zauważmy, że dziedziną $D = R$ wyrażenia trygonometrycznego w równaniu jest ziór R wszystkich liczb rzeczywisych.
Z tablicy odczytujemy pierwiastki równania w przedziale $0 \le x \le 2\pi$ okresu $\omega = 2\pi$ funkcji sinus i cosinus

$$\sin x = \cos x.$$

Zatem widzimy, że sinus równy jest cosinus dla kątów $x = \dfrac{\pi}{4}$ oraz $x = \dfrac{5\pi}{4}$, które leżą w pierwszej lub trzeciej ćwiartce koła trygonometrycznego.
Wszystkie rozwiązania dostajemy dodając okres $\omega = 2\pi$ do tych rozwiązanń

$$x_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad k = 0, \pm1, \pm2, ...;$$

Rozwiązanie tego równania znajdziemy innym sposobem rozakładając wyrażenie trygonometryczne na czynniki. Mianowicie, lewą stronę równiania zapiszmy w postaci

$$\sin x - \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 0.$$

Stosując wzór na różnicę sinusów, otrzymamy iloczn

$$\begin{aligned}
\sin x - \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) &= 2\sin\frac{(\frac{\pi}{2} - x) - x}{2}\cos(\frac{\frac{\pi}{2} - x) + x}{2} \\
&= 2\cos\frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{4} - x) \\
&= \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x) = 0.
\end{aligned}$$

Skąd pierwiastki główne w przedziale $[0, 2\pi]$ okresu funkcji sinus

$$\frac{\pi}{4} - x = 0, \quad \text{lub} \quad \frac{\pi}{4} - x = \pi$$

Dodają okres $\omega = 2\pi$ funkcji sinus, otrzymamy wszystkie rozwiązania

$$x_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{\pi}{4} + (2k-1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Przykład 20.7 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$\text{tg}x + \text{ctg}x = 2.$$

Rozwiązanie. Z tablicy wartości funkcji tangens i cotangens, widzimy, że suma tangensa i cotangensa kąta x jest równa 2, jeżli $\text{tg}x = 1$ i $\text{ctg}x = 1$ dla $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{5\pi}{4}$. Wszystkie rozwiązania otrzymamy dodając do głównych pierwiastków wielokrotność ich okresu.
To znaczy

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{5\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1 \pm 2, ...;$$

Te same rozwiązania otrzymamy innym sposobem. Mianowicie, napiszmy to równanie w postaci ekwiwalętnej

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2.$$

Zauważmy, że dziedziną wyrażenia trygonometrycznego w tym równaniu jest zbiór

$$D = \{x \in R : \ \sin x \neq 0, \ \ i \ \ \cos x \neq 0\} = \{x \in R : \ x \neq k\frac{\pi}{2}, \ \text{i} \ \ x \neq k\pi, \}$$

dla całkowitych liczb $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$
Przekształcamy to równanie korzystając z jedynki trygonometrycznej i z sinusa podwojonego kąta

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \ \cos x} = \frac{1}{\sin x \ \cos x} = 2$$

Skąd wynika równanie

$$2 \sin x \ \cos x = 1, \quad \text{lub} \quad \sin 2x = 1.$$

Z tablicy wartości funkcji trygonometrycznych pamiętamy, że $\sin 2x = 1$ dla pierwiastka $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{5\pi}{4}$ w kole trygonometrycznym. Dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu $\omega = \pi$ funkcji $\sin 2x$ otrzymamy wszystkie rozwiązania tego równania.

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{5\pi}{4} + k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Zauważmy, że powyżesze pierwiastki równania są takie same jak w pierszym sposobie rozwiązania i należą do dziedziny równania.

Przykład 20.8 *Rozwiąż równanie*

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$$

Rozwiązanie. Tej postaci równia rozwiązujemy przez podstawienie nowej niewiadomej $t = \sin x$, żeby otrzymać równanie kwadratowe

$$2t^2 - 3t + 1 = 0.$$

Wyóżnik tego r'ownania $\Delta = (-3)^2 - 4 * 2 * 1 = 1$. Zatem rozwiązania

$$t_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{3+1}{4} = 1.$$

Wracając do niewiadomej x, znajdujemy wszystkie rozwiązania

$$\sin x = \tfrac{1}{2}, \quad x_k = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

lub

$$\sin x = 1, \quad x_k = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

dla całkowitych $k = 0, \pm 1, \pm 2 ...;$

Zadanie 20.8 *Rozwiąż równanie*

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Jednym ze skutecznych sposobów rozwiązywania równań trygonometrycznych jest rozkład na czynniki wyrażenia trygonometrycznego. Niżej podajemy przykład takiego sposobu.

Przykład 20.9 *Rozwiąż równanie*

$$\cos x + 3\cos 3x + \cos 5x = 0.$$

Rozwiązanie. Zastosujmy wzór do nawiasu na suma cosinusów

$$\begin{aligned} (\cos x + \cos 5x) + \cos 3x &= 2\cos\frac{x+5x}{2}\cos\frac{x-2x}{2} + \cos 3x \\ &= 2\cos 3x \ \cos(-2x) + \cos 3x \\ &= \cos 3x(2\cos 2x + 1) = 0. \end{aligned}$$

Zatem, wyrażenie trygonometryczne rozłożyliśmy na dwa czynniki, które przyrównujemy do zera

$$\cos 3x = 0, \quad \text{i} \quad 2\cos 2x + 1 = 0, \quad \cos x - \frac{1}{2}.$$

Rozwiązując powyżesze proste równania, otrzymamy następujące serie rozwiązań:
Gdy

$$\cos 3x = 0,$$

to rozwiązanie

$$3x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x_k = \tfrac{1}{6}\pi + +\tfrac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

$$3x = \tfrac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad x_k = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

oraz gdy $\cos 3x = -\dfrac{1}{2}$, to rozwiązanie

$$3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x_k = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

$$3x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, \quad x_k = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Przykład 20.10 *Rozwiąż równanie*

$$\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0.$$

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $t = \sin x$. Wtedy dostajemy równanie kwadratowe dla niewiadomej t

$$t^2 + 2t - 3 = 0,$$

którego rozwiązanie jest $t_1 = -3$ i $t_2 = 1$. Ponieważ $-1 \leq \sin x \leq 1$, dlatego $t = -3$ należy udrzucić. Pozostaje wartość $t = 1$. Dla tej wartości

$$\sin x = 1, \quad \text{gdy} \quad x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Zadanie 20.9 *Rozwiąż równanie*

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - (1 - \sqrt{3})\mathrm{tg} x - \sqrt{3} = 0.$$

Zadanie 20.10 *Rozwiąż równanie*

$$\sin x - \sin 4x + \sin 7x = 0.$$

Zadanie 20.11 *Rozwiąż równanie*

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0.$$

20.6 Nierówności trygonometryczne

Podobnie jak równania trygonometryczne, rozwiązujemy nierówności trygonometrtczne korzystając z wzorów redukcyjnych, wzorów sumy i różnicy funkcji trygonometrycznych.

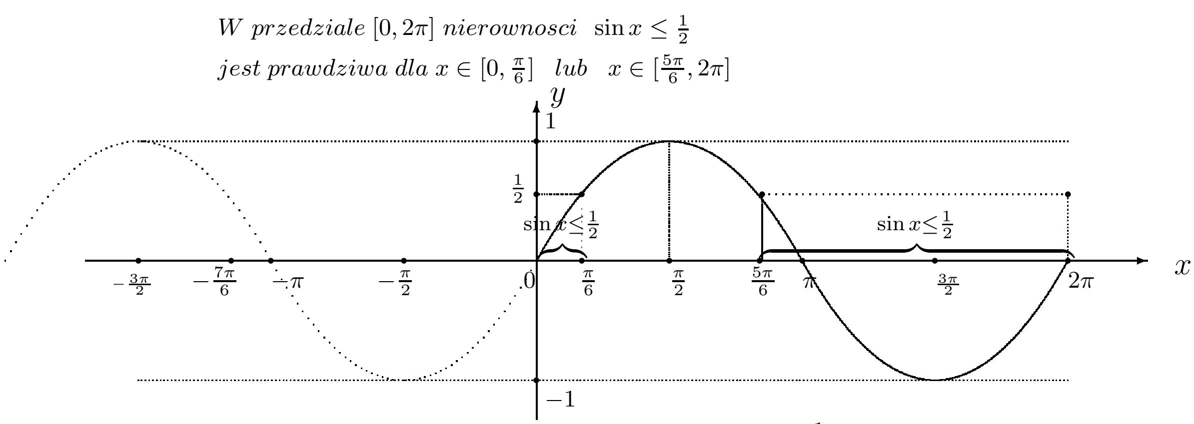
Przykład 20.11 *Rozwiąż nierównówność w przedziala* $[0, 2\pi]$.

$$(i) \quad \sin x \leq \frac{1}{2}, \qquad (ii) \quad \cos x \geq \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie (i). Funkcja sinus osiąga wartość $\sin x = \frac{1}{2}$ dla kąta $x = \frac{\pi}{6}$ w pierwszej ćwiartce, lub dla kąta $x = \frac{5\pi}{6}$ w drugiej ćwiartce. Zatem nierówność jest prawdziwa przedziale $[0, 2\pi]$ dla

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \quad \text{lub} \quad \frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2\pi.$$

Zobaczmy to rozwiązanie na wykresie funkcji sinus.

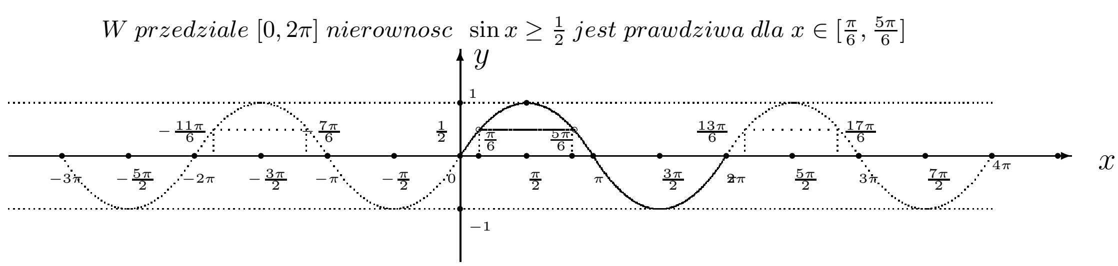


Zauważmy, że rozwiązaniem nierówności $\sin x \leq \frac{1}{2}$ na całej osi liczb rzeczywistych są te punkty $x \in R$, które należą do odcinków

$$x \in [a_k, b_k] = [\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi], \quad gdy \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...;$$

gdzie $a_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad b_k = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$

Podobnie znajdujemy rozwiązanie nierówności przeciwnej sin $x \geq \frac{1}{2}$



Rozwiązaniem nierówności $\sin x \geq \frac{1}{2}$, na całej osi liczb rzeczywistych, są odcinki

$$[a_k, b_k] = [\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi], \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...; \tag{20.7}$$

o początku w punkcie $a_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ i końcu w punkcie $b_k = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. [7]

[7] Tutaj indeks $k \in C = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... :\}$ przebiega cały zbiór liczb całkowitych.

Przykład 20.12 *Podaj przedziały w których nierówność* $\sin x \geq \frac{1}{2}$ *jest prawdziwa, gdy*

$$k = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$$

Rozwiązanie. Z określenia (20.8) przedziałów $[a_k, b_k]$ znajdujemy

$$\begin{aligned}
&gdy \quad k = 0, \quad a_0 = 0, \qquad b_0 = \tfrac{\pi}{6}, \qquad [a_0, b_0] = [0, \tfrac{\pi}{6}] \\
&gdy \quad k = 1, \quad a_1 = \tfrac{13\pi}{6}, \quad b_1 = \tfrac{17\pi}{6}, \quad [a_1, b_1] = [\tfrac{13\pi}{6}, \tfrac{17\pi}{6}] \\
&gdy \quad k = 2, \quad a_2 = \tfrac{25\pi}{6}, \quad b_2 = \tfrac{29\pi}{6}, \quad [a_2, b_2] = [\tfrac{25\pi}{6}, \tfrac{29\pi}{6}]
\end{aligned}$$

Podobnie znajdujemy przedziały $[a_{-1}, b_{-1}]$ i $[a_{-2}, b_{-2}]$ dla ujemnych wartości wskaźnika $k = -1, -2$

$$\begin{aligned}
&gdy \quad k = -1, \quad a_{-1} = -\tfrac{17\pi}{6}, \quad b_{-1} = -\tfrac{11\pi}{6}, \quad [a_{-1}, b_{-1}] = [-\tfrac{17\pi}{6}, -\tfrac{11\pi}{6}] \\
&gdy \quad k = -2, \quad a_{-2} = \tfrac{13\pi}{6}, \qquad b_{-2} = \tfrac{17\pi}{6}, \qquad [a_{-2}, b_{-2}] = [-\tfrac{29\pi}{6}, -\tfrac{25\pi}{6}]
\end{aligned}$$

Zauważmy, że rozwiązaniem nierówności $\sin x < \frac{1}{2}$ są te punkty $x \in R$ na osi liczb rzeczywistych, które nie należą do żadnego z odcinków

$$x \notin [a_k, b_k] = [\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi],$$

gdy $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...$;

Zadanie 20.12 *Podaj wykres funkcji* $y = \sin\ x$ *w przedziale* $[-4\pi, 4\pi]$. *Zaznacz na wykresie przedziały argumentu* $x \in [-4\pi, 4\pi]$ *w których funkcja*

$$(i) \quad \sin\ x \geq \tfrac{1}{2},$$

$$(ii) \quad \sin\ x < \tfrac{1}{2}$$

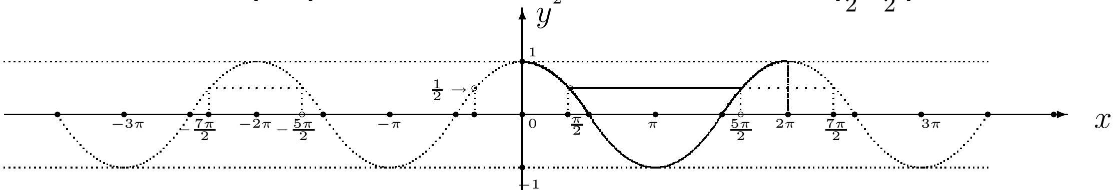
Rozwiązanie (ii). Funkcja cosinus osiąga wartość $\cos x = \frac{1}{2}$ dla kąta $x = \frac{\pi}{2}$ w pierwszej ćwiartce, lub dla kąta $x = \frac{5\pi}{2}$ w czwartej ćwiartce.
Zatem nierówność jest prawdziwa przedziale $[0, 2\pi]$ dla

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{lub} \quad \frac{5\pi}{2} \leq x \leq 2\pi.$$

Nieżej, na wykresie funkcji $y = \cos\ x$ zostały zaznaczone wszystkie rozwiązania nierówności

$$\cos\ x \leq \frac{1}{2}$$

W przedziale $[0, 2\pi]$ *nierownosc* $\cos x \le \frac{1}{2}$ *jest prawdziwa dla* $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$,



Rozwiązaniem nierówności $\cos x \le \frac{1}{2}$, na całej osi liczb rzeczywistych, są odcinki

$$[a_k, b_k] = [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{2} + 2k\pi], \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...; \tag{20.8}$$

o początku w punkcie $a_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ i końcu w punkcie $b_k = \frac{5\pi}{2} + 2k\pi$. [8]

Przykład 20.13 *Podaj przedziały w których nierówność* $\cos x \le \frac{1}{2}$ *jest prawdziwa, gdy*

$$k = -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2$$

Rozwiązanie. Z określenia (20.8) przedziałów $[a_k, b_k]$ znajdujemy

$$\begin{aligned}
&gdy \quad k = 0, \quad a_0 = \tfrac{\pi}{2}, \qquad b_0 = \tfrac{5\pi}{2}, \quad [a_0, b_0] = [\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{5\pi}{2}] \\
&gdy \quad k = 1, \quad a_1 = \tfrac{7\pi}{2}, \quad b_1 = \tfrac{11\pi}{2}, \quad [a_1, b_1] = [\tfrac{7\pi}{2}, \tfrac{11\pi}{2}] \\
&gdy \quad k = 2, \quad a_2 = \tfrac{13\pi}{2}, \quad b_2 = \tfrac{17\pi}{6}, \quad [a_2, b_2] = [\tfrac{13\pi}{2}, \tfrac{17\pi}{2}]
\end{aligned}$$

Podobnie znajdujemy przedziały $[a_{-1}, b_{-1}]$ i $[a_{-2}, b_{-2}]$ dla ujemnych wartości wskaźnika $k = -1, -2$

$$\begin{aligned}
&gdy \quad k = -1, \quad a_{-1} = -\tfrac{5\pi}{2}, \quad b_{-1} = -\tfrac{\pi}{2}, \quad [a_{-1}, b_{-1}] = [-\tfrac{5\pi}{2}, -\tfrac{\pi}{2}] \\
&gdy \quad k = -2, \quad a_{-2} = \tfrac{11\pi}{2}, \quad b_{-2} = \tfrac{7\pi}{2}, \quad [a_{-2}, b_{-2}] = [-\tfrac{11\pi}{2}, -\tfrac{7\pi}{2}]
\end{aligned}$$

Zauważmy, że rozwiązaniem nierówności $\cos x > \frac{1}{2}$ są te punkty $x \in R$ na osi liczb rzeczywistych, które nie należą do żadnego z odcinków

$$x \notin [a_k, b_k] = [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{2} + 2k\pi], \quad gdy \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...;$$

Zadanie 20.13 *Podaj wykres funkcji cos x dla argumentu* $x \in [-4\pi, 4\pi]$. *Zaznacz na wykresie przedziały w których prawdziwa jest nierówność*

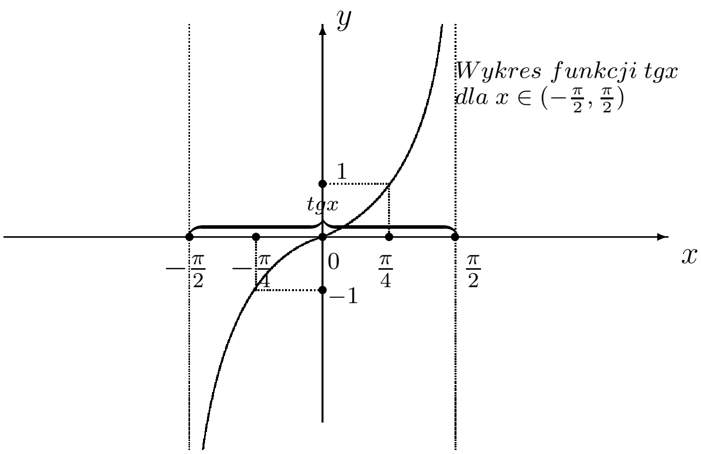
$$(i) \quad cos\ x \le \frac{1}{2}, \qquad (ii) \quad cos\ x > \frac{1}{2}$$

[8] Tutaj indeks $k \in C = \{0, \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, ... :\}$ przebiega cały zbiór liczb całkowitych.

Jak wiemy, funkcja tanges jest określona dla argumentu

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \;\; k = 0, \pm 1, \; \pm\, 2, ...;$$

różnego od nieparzystej wielokrotności kąta prostego $\frac{\pi}{2}$.

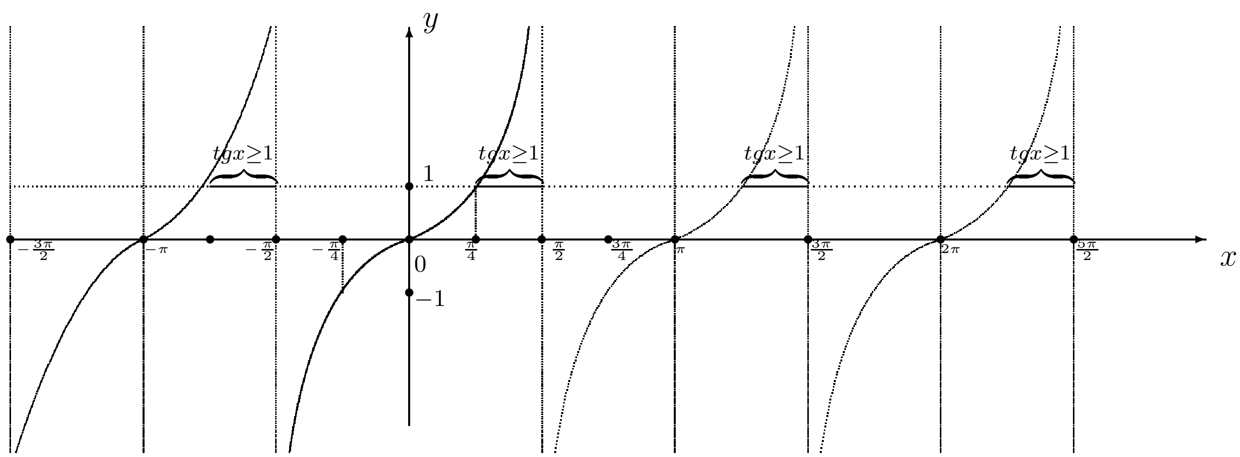


Funkcja tangens jest rosnąca i okresowa o okresie $\omega = \pi$. To znaczy dla większych wartości argumentu x warotości funkcji tanges są większe, piszemy

dla argumentów $x_1 < x_2$ *wartości* $tg\, x_1 < tg\, x_2$
i okresowa

$$tg\ x = tg(\ x + \pi) \quad dla\ kazdego\ x \neq k\pi, \;\; k = 0, \pm 1, \; \pm 2, ...;$$

Niżej na wykresie zaznaczone są wartości argumentu x funkcji tangens dla których wartości $tg\ x$ są większe lub równe jeden, to znaczy spełniona jest nierówność $tg\ x \geq 1$.



Przykład 20.14 .
(i) *Znajdź rozwiązanie nierówności*

$$tg\ x \geq 1$$

w przedziale otwartym $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
(ii) *Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności*

$$tg\ x \geq 1,$$

dla $x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, ... :$

Rozwiązanie(i). Funkcja $y = tg\ x$ jest rosnąca w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Wartość jeden funkcja tangens osiąga w punkcie $x = \frac{\pi}{4}$, toznaczy, że $tg\ \frac{\pi}{4} = 1$.
Zatem nierówność

$$tg\ x \geq 1$$

jest oprawdziwa w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dla $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.
Roozwiązanie (ii). Z wykresu funkcji $y = tg\ x$ widzimy, że w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$tg\ x < 1 \qquad dla\ \ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}).$$

Wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności $tg\ x < 1$ łatwo odczytamy z wykresu. Mianowicie wartość funkcji tangens jest mniejsza od jeden $tg\ x < 1$ dla wszystkich rzeczywistych wartości argumentu należących do przedziałów

$$(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi), \qquad dla \quad k = 0, pm1,\ \pm 2, ...;$$

Zadanie 20.14 *Rozwiąż nierówność*

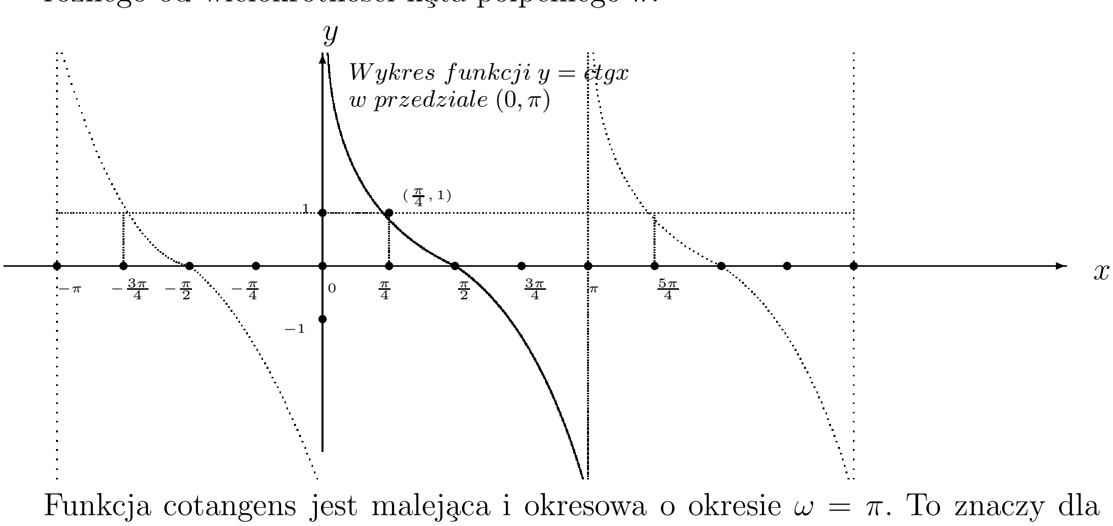
(i) $tg\ x \geq \sqrt{3}$, $\qquad$ (ii) $tg\ x < \sqrt{3}$

dla wszystkich rzeczywistych wartosci $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1,\ \pm 2, ...;$

Jak wiemy, funkcja cotanges jest określona dla argumentu

$$x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1,\ \pm\ 2, ...;$$

różnego od wielokrotności kąta półpełnego π.



Funkcja cotangens jest malejąca i okresowa o okresie $\omega = \pi$. To znaczy dla większych wartości argumentu x warotości funkcji cotanges są mniejsze, piszemy

dla argumentów $x_1 < x_2$ *wartości* $ctg\ x_1 > ctg\ x_2$
i okresowa

$$ctg\ x = ctg(\ x + \pi) \quad dla\ kazdego\ x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1,\ \pm 2, ...;$$

Przykład 20.15 .
(i) *Znajdź rozwiązanie nierówności*

$$ctg\ x \geq 1$$

w przedziale otwartym $(0, \pi)$.
(ii) *Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności*

$$ctg\ x \geq 1,$$

dla $x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, ...$:

Rozwiązanie (i). Funkcja $y = ctg\ x$ jest malejąca w przedziale $(0, \pi)$. Watość $ctg\ x = 1$ osiąga dla $x = \frac{\pi}{4}$.
Zatem

$$ctg\ x \geq 1 \qquad dla\ x \in (0, \frac{\pi}{4}).$$

Rozwiązanie (ii) Z wykresu funkcji okresowej cotangens o okresie $\omega = \pi$ znajdujemy wszystkie przedziały

$$(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi), \quad dla \quad k = 0, \pm 1,\ \pm 2, ...;$$

w których nierównść $ctg\ x \geq 1$ jest prawdziwa.

Zadanie 20.15 .
(i) *Znajdź rozwiązanie nierówności*

$$ctg\ x \geq \sqrt{3}$$

w przedziale otwartym $(0, \pi)$.
(ii) *Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności*

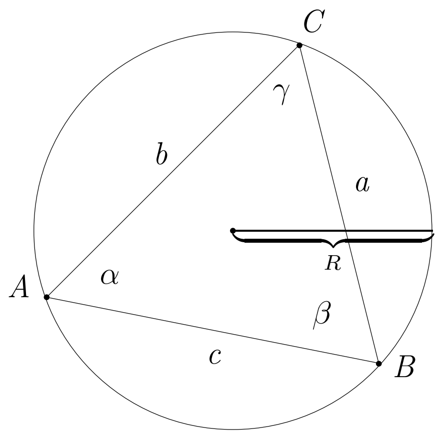
$$ctg\ x \geq \sqrt{3},$$

dla $x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, ...$:

20.7 Twierdzenie sinusów

Twierdzenie 20.1 *W dowolnym trójkącie stosunek długości boków do sinusów kątów leżących na przeciw boków jest stały i równy średnicy okręgu opisanego na tym trójącie. To znaczy*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



Okrąg opisany na trójkącie

Dowód. Rozpatrujemy okrąg opisany na trójkącie ΔABC o promieniu R. Z wierzchołka A prowadzimy średnicę okrcęgu do przecięcia z okręgiem w punkcie D. Zauważmy, że krąty wpisane $\angle ABC = \beta$ i $\angle ADC = \delta$ w okrąg są oparte na tym samym łuku AC. Zatem są równe $\beta = \delta$. Trójkąt ΔADC jest prosty, gdyż kąt $\angle BCA$ opraty na średnicy jest prosty. Z tego prostokątnego trójkąta ΔADC, znajdujemy sinus kąta δ. Mianowicie, dla $0 \leq \delta < \frac{\pi}{2}$

$$\sin\delta = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{c}{2R}, \quad \text{lub} \quad \frac{c}{\sin\delta} = 2R, \quad \frac{c}{\sin\gamma} = 2R, \quad \gamma = \delta$$

Dla $\delta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ twierdzenie jest również prawdziwe, gdż $\sin\gamma = 1$, i $c = 2R$. Natomiast, dla $\gamma > \frac{\pi}{2}$ kąt $\delta = \pi - \gamma$ i wtedy $\sin\delta = \sin\gamma$ W tym przypadku twierdzenie jest również prawdziwe. Pozostałe wzory

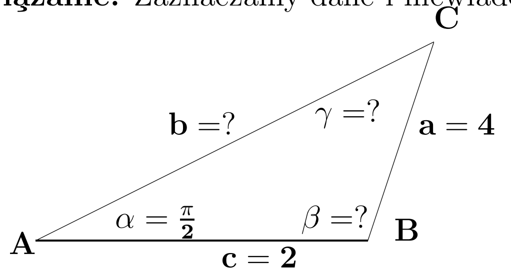
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = 2R,$$

dowodzimy podobnie.
Twierdzenia sinusów w połączeniu z twierdzeniem cosinusów stosujemy w prost do wyznaczania boków i kątów trójkąta, na podstawie następujących dawanych

1. dwóch boków i kąta naprzeci w jednego z nich,
2. boku i dwóch kątów przyległych do tego boku,

Przykład 20.16 *Oblicz boki i kąty trójkąta ΔABC, mając długości dwóch boków $|AB| = c = 4$ i $|BC| = a = 2$ kąt $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ leżący na przeciw boku $[BC]$.*

Rozwiązanie. Zaznaczamy dane i niewiadome boki i kąty na rysunku



Trójkąt $\triangle ABC$

Z twierdzenia sinusów obliczamy promień R okręgu opisanego na trójkącie

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R, \quad \frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2R, \quad \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2R, \quad R = 2.$$

Następnie też twierdzenia sinusów obliczamy sinus kąta γ leżącego naprzeciw boku $|AB| = c = 2$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R, \quad \sin\gamma = \frac{c}{2R} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Skąd znajdujemy kąt $\gamma = \frac{\pi}{6}$ i kąt β z sumy kątów w trójkącie

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad \beta = \pi - \alpha - \gamma = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{2}.$$

Pozostały bok $|AC| = b$ obliczamy z twierdzenia sinusów

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R, \quad b = 2R\sin\beta = 2 * 2 * \sin\frac{2\pi}{2} = 2\sqrt{2}.$$

20.8 Twierdzenie cosinusów

Podobnie jak twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów stosujemy do obliczanie boków i kątów dowolnych trójkątów. W dowolnym trójkącie ΔABC

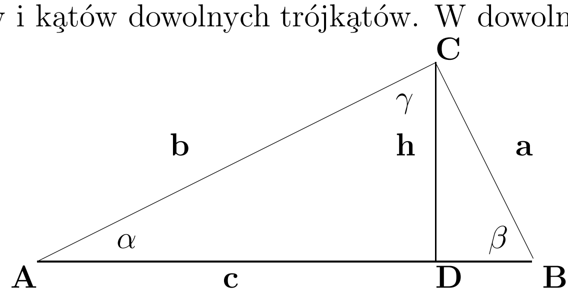


Fig. 5.15. Trójkąt $\triangle ABC$

o bokach i kątach zaznaczonych na rysunku zachodzą następujące związki pomiędzy bokami i kątami

$$(i) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2b\, c \cos\alpha$$

$$(ii) \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2a\, c \cos\beta$$

$$(iii) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2a\, b \cos\gamma$$

Dowód. Udowodnimy pierwszą z wymienionych wyżej równości. Zauważmy, że w przypadku trójkąta prostokątnego, gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wzór (i) jest prawdziwy, gdyż wtedy stosuje się twierdzenie Pitagorasa. Dla $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Punkt **D**, spodek wysokści **h** dzieli bok $[AB]$ na dwie części

$$|AD| = b\cos\alpha, \qquad |DB| = c - b\cos\alpha.$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów ΔADC i ΔDBC, otrzymamy

$$h^2 = b^2 - (b\cos\alpha)^2 = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2$$

Skąd dostajemy wzór (i), to jest

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\, c\cos\alpha.$$

Pozostałe wzory (ii) oraz (iii) dowodziemy podobnie.
Twierdzenie cosinusów stosujemy najczęściej, żeby obliczyć trzeci bok gdy dane są dwa boki i kąt pomędzy nimi oraz do obliczenia wszystkich kątów gdy znane są wszystkie boki.

Przykład 20.17 *W trójkąta ΔABC, dane są długości dwóch boków $|AB| = c = 3$, $|AC| = b = 8$ i kąt między nimi $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, jak na rysunku, oblicz bok* **a**.

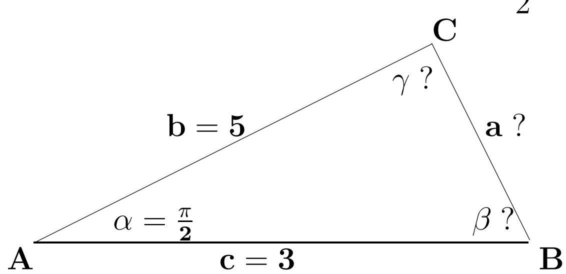


Fig. 5.16. Trójkąt $\triangle ABC$

Rozwiązanie. Z twierdzenia cosinusów obliczamy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\, c\cos\alpha = 8^2 + 3^2 - 2 * 8 * 3 * \frac{1}{2} = 49, \quad a = \sqrt{49} = 7.$$

Mając boki trójkąta, a, b, c obliczamy cosinus kątów β i γ.

$$\cos\beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2a\ c} = \frac{8^2 - 7^2 - 3^2}{2 * 7 * 3} = \frac{1}{7},$$
$$\cos\gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2a\ b} = \frac{3^2 - 7^2 - 8^2}{2 * 7 * 8} = -\frac{13}{14}$$

Wartośći kątów odczytujemy z tablic lub jako argumenty funkcji cyklicznych.

20.9 Funkcje cykliczne

Funkcje cykliczne arcsin α, arccos α, arctan α i arccot α to są funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych w przedziałach w których funkcje trygonometryczne są rosnące lub malejące (monotoniczne).
Na przykład, funkcją odwrotną do funkcji $\sin\alpha$ jest funkcja $arcsin\alpha$ określona w przedziale otwartym dla $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ lub ogólnie dla

$$\alpha \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2 * k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$$

Funkcją odwrotną do funkcji cos α jest funkcja $arccos\ \alpha$ określona w przedziale otwartym dla $\alpha \in (0, \pi)$ lub ogólnie dla

$$\alpha \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2 * k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$$

Podobnie, funkcje odwrotne do funkcji $tg\alpha$ i $ctg\alpha$ są funkcje $arctg\alpha$ i $arccot\alpha$ określone w przedzialach otwartych
tangens dla

$$\alpha \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$$

i cotangens dla

$$\alpha \in (k\pi, (k+1)\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$$

20.9.1 Arcus sinus

Funkcja $y = \sin x$ jest rosnąca w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Zbiorem wartości funkcji sinus jest przedział$[-1, 1]$. Zatem funkcja odwrotna $\arcsin y$ do funkcji $y = \sin x$ istnieje i jest określona w przedziale $[-1, 1]$. To znaczy dziedziną funkcji odwrotnej $\arcsin y$ do funkcji $y = \sin x$ jest zbiór wartości funkcji $\sin x$. Natomiast zbiorem wartości funkcji $\arcsin y$ jest przedział$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Niżej na wykresie funkcji arcus sinus zanaczony jest przedział określoności

i przedział wartości. Przedział $[-1,1]$ jest zbiorem określoności funkcji $y = arcsin\ x$, a zbiòrem wartości tej funkcji jest przedział $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

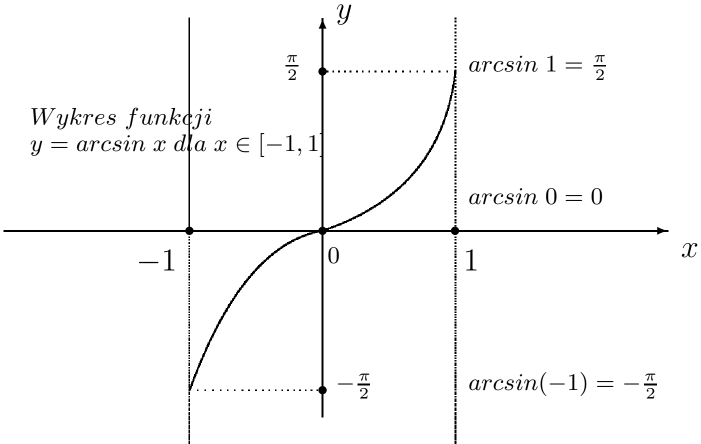


Tabela wartości funkcji $y = arcsin\ x$
dla wybranych wartości argumentu x.

x^o	*radian*	$y = \sin x$	$x = \arcsin y$
-90^o	$-\frac{\pi}{2}$	-1	$-\frac{\pi}{2}$
-60^o	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$
-45^o	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
-30^o	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$
0^o	0	0	0
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{\pi}{4}$
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$

Zauważmy, że zachodzą następujące tożsamości

$$(i) \quad \arcsin(\sin x) \equiv x, \quad \text{dla} \quad -\tfrac{\pi}{2} \leq x \leq \tfrac{\pi}{2}$$

$$(ii) \quad \sin(\arcsin x) \equiv x \quad \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1$$

Rzeczywiście, niech $y = \sin x$, dla $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Wtedy funkcja $\sin x$ jest rosnąca i funkcja do niej odwrotna $x = \arcsin y$ istnieje i jest określona dla $y \in [-1,1]$. Podstawiając do lewej strony (i) $y = \sin x$, otrzymujemy tożsamość (i).
Podobnie, niech $y = \arcsin x$ dla $x \in [-1,1]$. Wtedy funkcja $\arcsin x$, jest

rosnące i funkcja do niej odwrotna $x = \sin y$ istnieje i jest określona dla $y \in [-1, 1]$. Podstawiając $y = \arcsin x$ do równości $x = \sin y$, otrzymujemy tożsamość (ii).

20.9.2 Arcus cosinus

Funkcja $y = \cos x$ jest malejąca w przedziale $[0, \pi]$. Zbiorem wartości funkcji cosinus jest przedział$-1, 1]$. Zatem funkcja odwrotna $\arccos y$ do funkcji $y = \cos x$ istnieje i jest określona w przedziale $[-1, 1]$. To znaczy dziedziną funkcji odwrotnej $\arccos y$ do funkcji $y = \cos x$ jest zbiór wartości funkcji $\cos x$. Natomiast zbiorem wartości funkcji $\arccos y$ jest przedział $[0, \pi]$.
Niżej na wykresie funkcji $y = arccos\ x$ zanaczone są przedział określoności i przedział wartości. Przedział $[-1, 1]$ jest zbiorem określoności funkcji $y = arccos\ x$, a zbiórem wartości tej funkcji jest przedział $[0, \pi]$

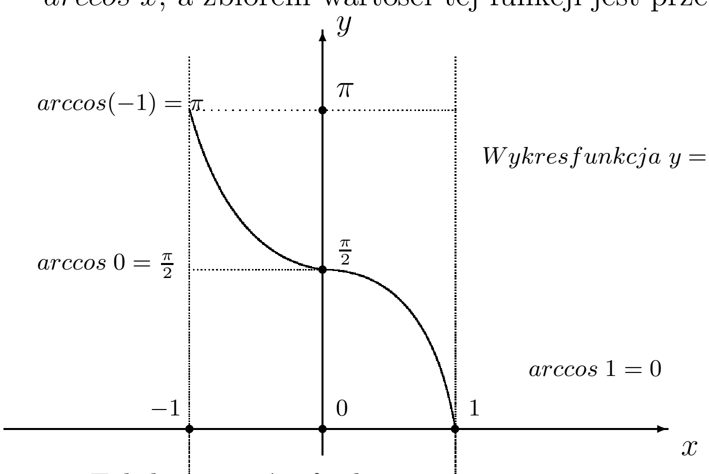


Tabela wartości funkcj $y = arccos\ x$
dla wybranych wartości argumentu x.

x^o	*radian*	$y = \cos x$	$x = \arccos y$
0	0	1	0
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
135^o	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
150^o	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
180^o	π	-1	π

Zachodzi prosty zawiązek pomiędzy arcus sinus i arcus cosinus

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{lub} \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x. \tag{20.9}$$

Rzeczywiście, zauważamy, że prawdziwa jest nierówność

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin x \leq \pi.$$

Z nierówności

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}.$$

i z równość

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \arccos x) = \sin(\arcsin x)$$

wynika tożsamość (20.9).

20.9.3 Arcus tangens

Funkcja tangens $y = tg\ x$ jest okresowa o okresie $\omega = \pi$ i określona dla argumentu różnego od nieparzystej wielokrotnoći kąta prostego $\frac{\pi}{2}$.

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Przedziałem wartości funkcji tangens jest zbiór liczb rzeczywistych $R = (-\infty, \infty)$. Funkcja $y = tg\ x$ jest rosnąca od $-\infty$ do ∞ w przedziale otwartym

$$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Dlatego istnieje funkcja odwrotna

$$x = arctg\ y,$$

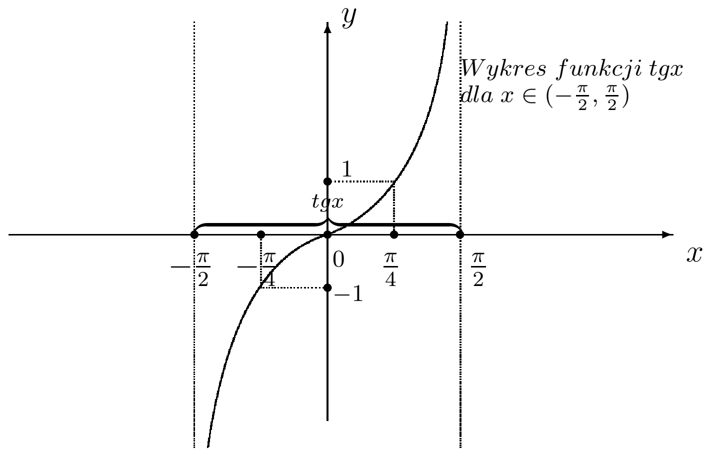
do funkcji $y =$ tg x w przedziale otwartym $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Bez zmiany własności funkcji arcus tangens możemy zamienić zmienne x, y miejscami, pisząc

$$y = arctan\ x.$$

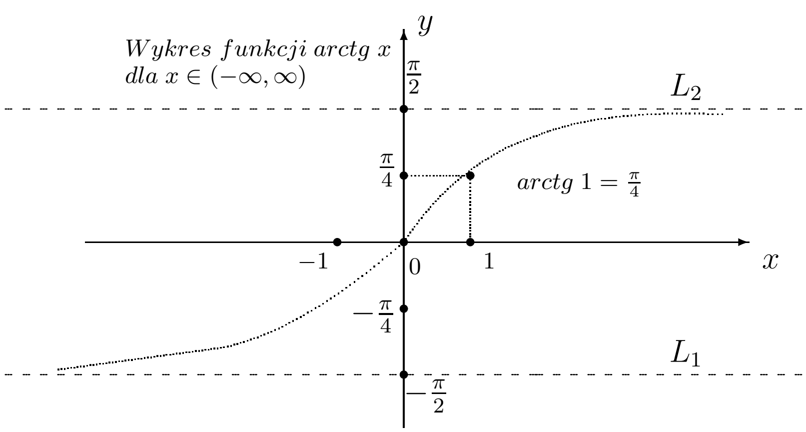
Wartości funkcji arcus tangens należą do przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, to znaczy prawdziwa jest nierówność

$$-\frac{\pi}{2} < arctg\ x < \frac{\pi}{2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Rozpatrzmy jeszcze raz wykres funkcji tangens. Zauważmy, że wykres funkcji arcus tangens odwrotnej do funkcji tangens otrzymamy przez obrót wykresu funckcji tangens w kierunku przeciwnym do ruch wskazówek zegara patrząc na wykres z odwrotnej strony.



Niżej na wykresie zaznaczony jest zakres wartości funkcji $y = arctg\ x$ dla argumentu $x \in (-\infty, \infty)$.



Funkcja arctagx ma dwie asymptoty L_1 i L_1 rownolegle do osi x

20.9.4 Arcus cotangens

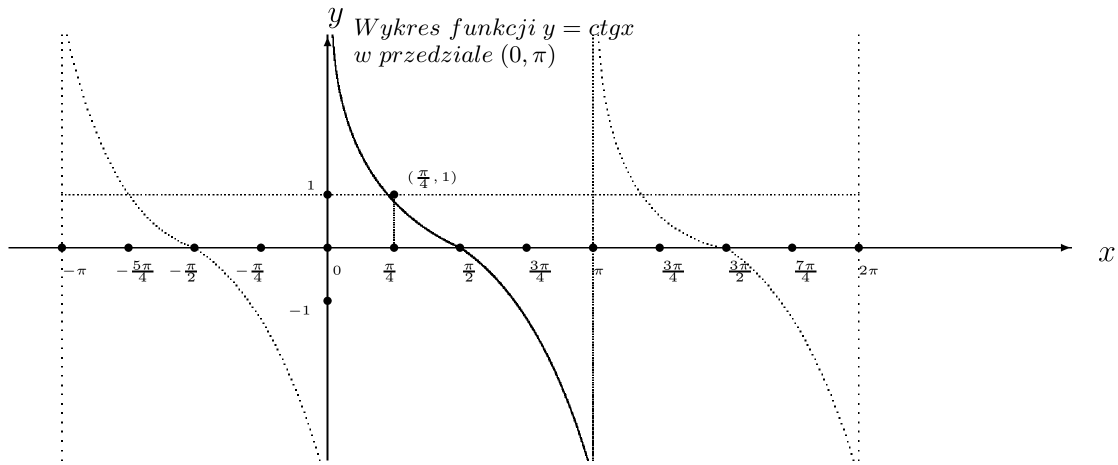
Funkcja $y = cot\ x$ jest malejąca w przedziale otwartym $(0, \pi)$ i jej zbiorem wartości są wszystkie liczby rzeczywiste $-\infty < y < \infty$. Zatem funkcja odwrotna $x = \text{arccot}\ y$ istnieje i jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych $-\infty < y < \infty$. Natomiast jej zbior wartości zmienia się w zakresie od 0 do π, to znaczy

$$0 < \text{arccot}\ y < \pi, \qquad -\infty < y < \infty.$$

Podobnie jak w przypadku funkcji arcu tanges, bez zmiany własności funkcji arcus cotangens, zamieniamy zmienne x, y miejscami, pisząc

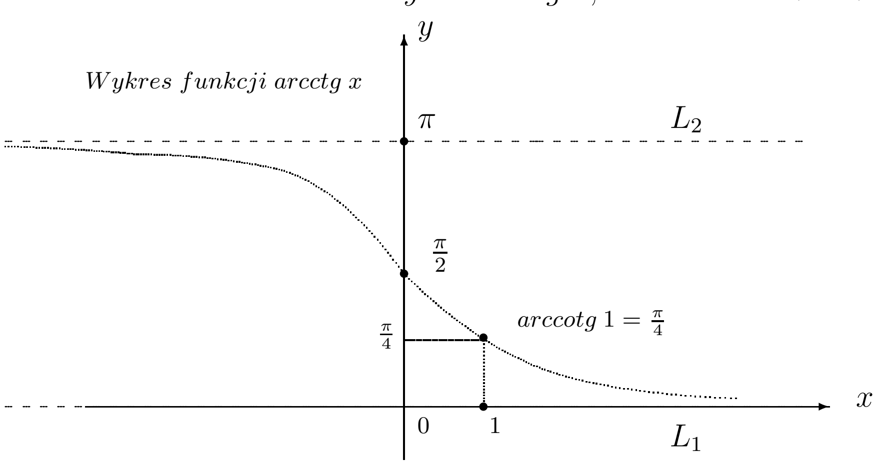
$$y = arccotg\ x, \qquad dla\ \ -\infty < x < \infty$$

Rozpatrzmy jeszcze raz wykres funkcji cotangens. Zauważmy, że wykres funkcji arcus cotangens odwrotnej do funkcji cotangens otrzymamy przez obròt wykresu funckcji cotangens w kierunku przeciwnym do ruch wskazòwek zegara patrząc na wykres z odwrotnej strony.



Z wykresu funkcji cotangens tworzymy wykres funkcji odwrotnej arcus cotangens

$$y = arccotg\ x, \quad dla \ -\infty < x < \infty$$



Funkcja arcctg x ma dwie asymptoty L_1 to jest os x i L_2 rownolegla do osi x

Zachodzi następujący zawiązek pomiędzy arcus tangens i arcus cotangens, pisąc

$$\text{arctg}\ x + \text{arccot}\ x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{lub} \quad \text{arcot}\ x = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}\ x. \tag{20.10}$$

Rzeczywiście, zauważamy, że kąt

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \text{arctg} x \leq \pi,$$

gdyż kąt $-\frac{\pi}{2} \leq \mathrm{arctg} x \leq \frac{\pi}{2}$. Zatem mamy tożsamość

$$\cot(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg} x) = \mathrm{arctg} x$$

Skąd wynika tożsamość (20.10).

20.10 Zadania

20.10.1 Funkcje periodyczne

Zadanie 20.16 *Oblicz okres funkcji*

$$(i) \quad sin\frac{\pi x}{2}$$
$$(ii) \quad cos\frac{\pi x}{2}$$

Zadanie 20.17 *Podaj wykres funkcji*

$$(i) \quad sin\frac{\pi x}{4}, \quad -4\pi \leq x \leq 4\pi$$
$$(ii) \quad cos\frac{\pi x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 8\pi.$$

Zadanie 20.18 *Oblicz okres funkcji*

$$(i) \quad sin\frac{2\pi x}{2}$$
$$(ii) \quad cos\frac{2\pi x}{2}$$

Zadanie 20.19 *Podaj wykres funkcji*

$$(i) \quad sin\frac{2\pi x}{2}, \quad -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$
$$(ii) \quad cos\frac{2\pi x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 3\pi.$$

Zadanie 20.20 *Oblicz okres funkcji*

$$(i) \quad tg\frac{\pi x}{4}$$
$$(ii) \quad ctg\frac{\pi x}{4}$$

Zadanie 20.21 *Podaj wykres funkcji*

$$(i) \quad tg\frac{\pi x}{4}, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$$
$$(ii) \quad ctg\frac{\pi x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 4\pi.$$

Zadanie 20.22 *Funkcja $E[x]$ całość z x ma największą wartość*
$$E[x] \leq x$$

nie większą od x [9]
Sprawdź, że okres funkcji okresowej część ułamkowa z liczby x,
$$f(x) = x - E[x].$$
jest równy $\omega = 1$.
Oblicz okres i podaj wykresy funkcji
$$(i) \quad f(x) = E[3x], \quad (ii) \quad g(x) = E[\frac{4x}{2}]$$

20.10.2 Tożsamość trygonometryczna

Zadanie 20.23 *Sprawdź tożsamowść*
$$sin^4 x - cos^4 x = 1 - 2cos^2 x \qquad \infty < x < \infty.$$

Zadanie 20.24 *Sprawdź tożsamowść*
$$(1 + tg^2 x)cos^2 x = 1 \qquad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, ...;$$

Zadanie 20.25 *Sprawdź tożsamowść*
$$\frac{1 + tg^2 x}{1 + ctg^2 x} = tg^2 x \qquad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, ...;$$

Zadanie 20.26 *Wykaż, ze*
$$sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha + \beta) = 2sin\alpha \ cos\beta$$
dla każdej rzeczyczywistej wrtości kątów α i β.

20.10.3 Równania trygonometryczne

Zadanie 20.27 *Rozwiąż równanie*
$$(i) \quad sin\frac{\pi x}{2} = 0, \quad (ii) \quad cos\frac{\pi x}{2} = 0.$$

Zadanie 20.28 *Rozwiąż równanie*
$$(i) \quad tg\frac{\pi x}{2} = 0, \quad (ii) \quad ctg\frac{\pi x}{2} = 0.$$

Zadanie 20.29 *Rozwiąż równanie*
$$(i) \quad sin\ x + cos\ x = 0, \quad (ii) \quad sinx = cos\ x.$$

Zadanie 20.30 *Rozwiąż równanie*
$$(i) \quad tg\ x - ctg\ x = 0 \quad (ii) \quad tg\ x = sin\ x.$$

[9] $E[x]$ Entier of x

20.10.4 Nierównośći trygonometryczne

Zadanie 20.31 *Rozwiąż nierówność*

$$(i) \quad sin\frac{\pi x}{6} < \frac{1}{2} \quad (ii) \quad cos\frac{\pi x}{2} > \frac{1}{2}$$

Zadanie 20.32 *Rozwiąż nierówność*

$$(i) \quad tg\frac{\pi x}{4} \leq 1 \quad (ii) \quad ctg\frac{\pi x}{4} \geq 1$$

Zadanie 20.33 *Rozwiąż nierówność*

$$(i) \quad sin\pi x - cos\pi x \leq 0 \quad (ii) \quad sin\ \pi x + cos\ \pi x \geq \frac{1}{2}$$

Zadanie 20.34 *Rozwiąż nierówność*

$$tg\pi x - ctg\pi x > 0$$

20.10.5 Twierdzenie sinusów

Zadanie 20.35 *Oblicz boki i kąty trójkąta ΔABC mając długość dwóch boków*

$$|AB| = 6, \quad |AC| = 8 \quad i \quad kat\ \angle\ ABC = 60^o$$

Zadanie 20.36 *Oblicz boki trójkąta ΔABC mając długość boku $|BC| = 25$ i kąty*

$$\angle CAB = 30^o, \quad \angle\ ABC = 60^o$$

20.10.6 Twierdzenie cosinusów

Zadanie 20.37 *Oblicz boki i kąty trójkąta ΔABC mając długość dwóch boków*

$$|AB| = 6, \quad |AC| = 8 \quad i \quad kat\ \angle\ CAB = 60^o$$

Zadanie 20.38 *Oblicz boki trójkąta ΔABC mając długość boków*

$$|AB| = 9, \qquad |BC| = 12$$

i kąt $\angle ABC = 30^o$.

20.10.7 Funkcje cykliczne

Zadanie 20.39 *Oblicza wartość wyrażenia*

$$arcsin\frac{1}{2} + arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zadanie 20.40 *Oblicza wartość wyrażenia*

$$arccos\frac{1}{2} + arcscos\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zadanie 20.41 *Oblicza wartość wyrażenia*

$$arctg\frac{1}{\sqrt{2}} + arctg\sqrt{2}$$

Zadanie 20.42 *Podaj wykres funkcji*

$$f(x) = sin(arcsin\ x)$$

dla argumentu $x \in [-1, 1]$.

Zadanie 20.43 *Podaj wykres funkcji*

$$f(x) = cos(arcsin\ x)$$

dla argumentu $x \in [-1, 1]$.

Zadanie 20.44 *Rozwiąż równanie*

$$arcsin\ x - arccos\ x = 0$$

Zadanie 20.45 *Rozwiąż równanie*

$$2arcsin\ x - arccos\ x = \pi$$

Zadanie 20.46 *Rozwiąż równanie*

$$arctg\ x - arcctg\ x = 0$$

Zadanie 20.47 *Rozwiąż równanie*

$$3arctg\ x - 2arcctg\ x = \pi$$

Index