SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

Trójkąt Pascala tworzą współczynnniki dwumianu Newtona.

$$
\begin{array}{lllllllllllll}
(a+b)^0 & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{1}{0} & & & & & \\
(a+b)^1 & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
(a+b)^2 & \cdots & \cdots & & \cdots & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
(a+b)^3 & \cdots & \cdots & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
(a+b)^4 & \cdots & \cdots & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
(a+b)^5 & \cdots & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Wzory uproszczonnego mnożenia [1]

Tadeusz STYŠ

WARSZAWA 2020

[1] Rozdział 9. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.

Chapter 1

Wzory uproszczonego mnożenia i dwumian Newtona

Jednomianem nazywamy ciąg liczb lub ciąg liczb i liter lub ciąg tylko liter połączonych operacją mnożenia.
Dla przykładu wymieńmy kilka jednomianów

$$\begin{array}{ll}
125 & 247, \quad \textit{jedna liczba jest jednomianem} \\
2*5*7, & 3*4*5*6*7, \\
3*a*b & a*b*c, \\
4**5*x*y*z, & 5*a^2*b^3*c^4, \\
15*x^3*y^2*z^3 & 7*9*a^4*b^5*x^6*y^7.
\end{array}$$

Jasne, że każdy jednomian jest szczególnej postaci wyrażeniem arytmetycznym, jeżeli zawiera tylko liczby lub jest szczególnym wyrażeniem algebraicznym, jeżeli zawiera litery lub liczby i litery. Szczególnym wyrażeniem arytmetycznym lub algebraicznym, gdyż tylko operacja mnożenia występuje w ich określeniu.
Dwumianem nazywamy sumę dwóch jednomianów.
Na przykład

$$a+b, \quad a-b, \quad a^2+b^2, \quad 3x^3+5y^3.$$

Podobnie trójmianem nazywamy sumę trzech jednomianów.
Na przykład

$$\begin{array}{ll}
a+b+c, & 2*x_3+4*y^3+5*x*y, \\
a^2+2*a*b+b^2, & x^2-2*x*y+y^2.
\end{array}$$

Ogólnie wielomianem nazywamy sumę wielu jednomianów.
Natomiast, wielomianem stopnia n nazywamy sumę jednomianów następującej postaci:

$$p_n(x) = a_0 + a_1*x + a_2*x^2 + a_3*x^3 + \cdots + a_{n-1}*x^{n-1} + a_n*x^n$$

Wyrazy wielomianu piszmy również w odwrotnej kolejności pomijając znak mnożenia $*$.

$$p_n(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + a_{n-2}\,x^{n-2} + \cdots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0.$$

1.1 Wzory uproszczonego mnożenia

1. **Dwumian, dwumian kwadratowy i trójmian kubiczny.** Łatwo sprawdzamy

następujące tożsamości [1]

$$\begin{array}{lcll} (a \pm b)^1 & = & a \pm b, & \textit{dwumian stopnia } n = 1 \\ (a \pm b)^2 & = & a^2 \pm 2\, a\, b + b^2, & \textit{dwumian kwadratowy } n = 2 \\ (a \pm b)^3 & = & a^3 - 3\, a^2 * b + 3 * a * b^2 \pm b^3, & \textit{trojmian kubiczny } n = 3 \end{array}$$

Wzory na kwadrat sumy lub różnicy otrzymujemy przez mnożenie dwumianu $a \pm b$ przez siebie.
Mianowicie, obliczmy

$$\begin{aligned} (a+b)^2 = (a+b)(a+b) &= a(a+b) + b(a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a-b)^2 = (a-b)(a-b) &= a(a-b) - b(a-b) \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2, \end{aligned}$$

Przykład 1.1 *Dla ustalonej liczby naturalnnej n znajdź naturalne liczby a i b takie że*

$$n + a^2 = b^2$$

Rozwiązanie
Przenosząc a^2 na prawą stronę ze znakiem przeciwnym otrzymamy

$$n = b^2 - a^2$$

Ponieważ

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$$

to

$$n = (b-a)(b+a)$$

Następnie rozkładamy daną liczbę n iloczyn

$$n = 1 * n$$

Przyjmując

$$b - a = 1 \quad i \quad b + a = n$$

obliczamy rozwiązanie

$$a = \frac{n-1}{2} \quad i \quad b = \frac{n+1}{2}$$

Sprawdzamy, że

$$(\frac{n+1}{2})^2 - (\frac{n-1}{2})^2 = n$$

Natępnie, jeżeli n ma czennik $p > 1 \;\; i \;\; p < n$ to rozkładamy liczbę n na iloczyn

$$n = p * q$$

[1] Tożsamością nazywamy równość, która jest prawdziwa dla wszystkich wartości parametrów

Przyjmując

$$b - a = p \quad i \quad b + a = q$$

obliczamy rozwiązanie

$$a = \frac{q - p}{2} \quad i \quad b = \frac{p + q}{2}$$

Sprawdzamy, że

$$(\frac{p+q}{2})^2 - (\frac{q-p}{2})^2 = p * q = n$$

Natępnie, jeżeli n ma inny czynnik czennik $p_1 > p \;\; i \;\; p_1 < n$ to rozkładamy liczbę n na iloczyn

$$n = p_1 * q_1$$

Przyjmując

$$b - a = p_1 \quad i \quad b + a = q_1$$

obliczamy rozwiązanie

$$a = \frac{p_1 - q_1}{2} \quad i \quad b = \frac{p_1 + q_1}{2}$$

Sprawdzamy, że

$$(\frac{p_1+q_1}{2})^2 - (\frac{p_1-q_1}{2})^2 = p_1 * q_1 = n$$

Ogólnie rozkładamy liczbę n na m czynników pierwszych

$$n = p_0 * p_1 * p_2 * \cdots * p_m, \qquad p_0 = 1$$

i stosując powyższy rozkład na iloczyn

$$n = p_k * q_k$$

obliczamy rozwiązanie

$$a = \frac{p_k - q_k}{2} \quad i \quad b = \frac{p_k + q_k}{2}$$

Sprawdzamy, że

$$(\frac{p_k+q_k}{2})^2 - (\frac{p_k-q_k}{2})^2 = p_k * q_k = n$$

dla $k = 0, 1, 2, 3, ..., m$
W ten sposób otrzymujemy wszystkie $m + 1$ rozwiązań naturalnych.

Przykład 1.2 *Niech $n = 15$. Wtedy mamy rozkład na iloczyn*

$$15 = 1 * 15 \quad lub \quad p = 3 * 5$$

Zatem mamy pierwsze rozwiązanie dla $p = 1$ i $q = 15$

$$b = \frac{15+1}{2} = 8 \quad i \quad a = \frac{15-1}{2} = 7$$

Sprawdzmy, że

$$b^2 - a^2 = (\frac{15+1}{2})^2 - (\frac{15-1}{2})^2 = 64 - 49 = 15$$

Następnie dla rozkładu

$$15 = 3 * 5$$

przyjmujemy $p_1 = 3$ *i* $q_1 = 5$.
Wtedy mamy

$$b + a = 5 \quad i \quad b - a = 3$$

Skąd otrzymujemy drugie rozwiązanie

$$b = \frac{5+3}{2} = 4 \quad i \quad a = \frac{5-3}{2} = 1$$

Sprawdzamy, że

$$b^2 - a^2 = (\frac{5+3}{2})^2 - (\frac{5-3}{2})^2 = 16 - 1 = 15$$

2.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Podobnie sprawdzamy sześcian sumy lub różnicy.
Mianowicie, obliczmy

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 &= a(a+b)^2 + b(a+b)^2 \\
&= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) \\
&= (a^3 + 2a^2b + ab^2) + (ba^2 + 2ab^2 + b^3) \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\
(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 &= a(a-b)^2 - b(a-b)^2 \\
&= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2) \\
&= (a^3 - 2a^2b + ab^2) - (ba^2 - 2ab^2 + b^3) \\
&= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,
\end{aligned}$$

3. **Suma kwadratów.**
Suma kwadratów dwóch liczb rzeczywistych różnych od zera jest dodatnia i równa się zero wtedy i tylko wtedy, gdy obie liczby są równe zero.
Mianowicie, piszemy

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 > 0, &\quad gdy \quad a \neq 0 \ \ lub \ \ b \neq 0, \\
a^2 + b^2 = 0, &\quad gdy \quad a = 0 \ \ i \ \ b = 0.
\end{aligned}$$

4. **Różnica kwadratów.**
Różnica kwadratów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na czynniki liniowe. Mianowicie, mamy

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie

$$(a-b)(a+b) = a(a+b) - b(a+b) = (a^2 + ab) - (ba + b^2) = a^2 - b^2.$$

5. **Suma sześcianów.**
Suma sześcianów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na iloczyn
$$a^3 + b^3 = (a + b))(a^2 - ab + b^2).$$
Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie
$$\begin{aligned}(a + b)(a^2 - ab + b^2) &= a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)\\ &= (a^3 - a^2b + ab^2) + (ba^2 - ab^2 + b^3) = a^3 + b^3.\end{aligned}$$

6. **Różnica sześcianów.**
Różnica sześcianów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na iloczyn
$$a^3 - b^3 = (a - b))(a^2 + ab + b^2).$$
Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie
$$\begin{aligned}(a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2)\\ &= (a^3 + a^2b + ab^2) - (ba^2 + ab^2 + b^3) = a^3 - b^3.\end{aligned}$$

1.1.1 Przykłady

Przykład 1.3 *Wykonaj działanie*
$$\begin{array}{llll}(i) & (2a+3)^2, & (ii) & (\frac{x}{2} - 4)^2,\\ (ii) & (3a+2)^3, & (iv) & (2x - 3y)^3,\end{array}$$

Rozwiązanie. Stosując wzory, obliczamy
$$\begin{aligned} ad.(i) \quad (2a+3)^2 &= (2a)^2 + 2(2a)3 + 3^2 = 4a^2 + 12a + 9.\\ sd.(ii) \quad (\frac{x}{2} - 4)^2 &= (\frac{x}{2})^2 - 2(\frac{x}{2})(-4) + (-4)^2\\ &= \frac{x^2}{4} - 4x + 16.\\ ad.(iii) \quad (3a+2)^3 &= (3a)^3 + 3(3a)^2 2 + 3(3a)2^2 + 2^3\\ &= 27a^3 + 54a^2 + 36a + 27.\\ ad.(iv) \quad (2x - 3y)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(-3y)^2 - (3y)^3\\ &= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3.\end{aligned}$$

Zadanie 1.1 *Wykonaj działania*
$$\begin{array}{llll}(i) & \frac{(5a+2)^2}{(2a-3)^2}, & (ii) & (\frac{x^2}{3} - 1)^2,\\ (ii) & (3a+2)^3, & (iv) & (\frac{3x - 2y}{2x + 3y})^3,\end{array}$$

Zadanie 1.2 *Uprość wyrażenie*
$$\begin{array}{ll}(i) & \frac{(a^2 + b^2)(a^3 - b^3)(a^3 + b^3)}{[(a+b)^2 + (a-b)^2](a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)}\\ (ii) & \frac{1 + x + x^2 + x^3}{1 + x^2}\end{array}$$

1.2 Dwumian Newtona (1642-1727).

Jednym z najważniejszych i szeroko stosowanym wzorów jest *Dwumian Newtona:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n\, b^0 + \binom{n}{1} a^n\, b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1\, b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0\, b^n \quad (1.1)$$

Dwumian Newtona piszemy również w Σ (sigma) notacji

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \quad (1.2)$$

Napiszmy Dwumian Newtona dla $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = a + b, & n = 1 \\
(a+b)^2 &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = a^2 + 2ab + b^2, & n = 2 \\
(a+b)^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} b^k = a^3 + 3a^2\, b + 3ab^2 + b^3, & n = 3 \\
(a+b)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k} b^k = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4, & n = 4 \\
(a+b)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^{5-k} b^k = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5, & n = 5
\end{aligned}$$

Własności współczynników Newtona $\binom{n}{k}$.

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$
2. Symetria współczynników Newtona

   $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

   Istotnie, obliczamy, że

   $$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

3. Suma współczynników Newtona

   $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

   Zauważmy, że

   $$\begin{aligned}
   \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * \frac{k+1}{n-k} \\
   \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}
   \end{aligned}$$

Sumując stronami powyższe równości, otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * \frac{k+1}{n-k} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * (\frac{k+1}{n-k} + 1) \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * \frac{n+1}{n-k} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}
$$

4. Suma współczynników dwumianu Newtona

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Sprawdzamy

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

1.3 Trójkąt Pascala (1623-1662).

Trójkąt Pascala tworzą współczynnniki dwumianu Newtona.

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a+b)^0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{1}{0} & & & & & & & \\
(a+b)^1 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
(a+b)^2 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
(a+b)^3 & \cdots & & \cdots & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
(a+b)^4 & \cdots & & \cdots & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
(a+b)^5 & \cdots & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
(a+b)^6 & \cdots & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
(a+b)^7 & \binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7} \\
\cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

Obliczając wartości współczynników dwumianu Newtona ze wzoru

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

które podane są niżej w tabeli

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
(a+b)^0 & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & & & & \\
(a+b)^1 & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & 1 & & 1 & & & & & \\
(a+b)^2 & \cdots & \cdots & & \cdots & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
(a+b)^3 & \cdots & \cdots & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
(a+b)^4 & \cdots & \cdots & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
(a+b)^5 & \cdots & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Własności współczynników Newtona można łatwo odczytać z powyższych tabeli. Mianowicie, własność 1
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$
jest widoczna, ponieważ skrajne wartości w każdym wierszy równają się 1. Również jest widoczna w tabeli własność 2, symetria
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$
Tabelę wartości współczynników Newtona w $n-tym$ wierszu tworzymay stosując własność 3, to jest wzór.
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Na przykład, z wartości już obliczonych w wierszu $n-1$ obliczmy wartości w wierszu n, jak niżej

$$\begin{array}{lllll}
n=1, \quad k=0, & \binom{1}{0}+\binom{1}{1} & = & 1+1=2 & = & \binom{2}{1} \\
n=2, \quad k=0, & \binom{2}{0}+\binom{2}{1} & = & 1+2=3 & = & \binom{3}{1} \\
n=2, \quad k=1, & \binom{2}{1}+\binom{2}{2} & = & 2+1=3 & = & \binom{3}{2} \\
n=3, \quad k=0, & \binom{3}{0}+\binom{3}{1} & = & 1+3=4 & = & \binom{4}{1}
\end{array}$$