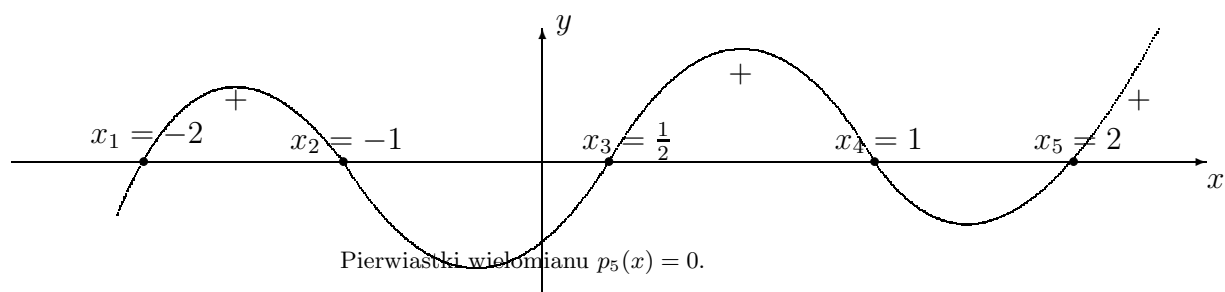


SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS  
02-892 WARSZAWA  
ul. BAŻANCIA 16



## Wielomiany <sup>1</sup>

Tadeusz STYŚ

WARSZAWA 2020

---

<sup>1</sup>Rozdział 8. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.



# Contents

<b>1</b>	<b>Wielomiany</b>	<b>5</b>
1.1	Jednomiany, dwumiany i trójmiany	5
1.2	Funkcja liniowa.	5
1.2.1	Położenie prostych na płaszczyźnie.	7
1.3	Funkcja kwadratowa	8
1.3.1	Równanie kwadratowe	9
1.3.2	Wzory Vieta	10
1.3.3	Rozkład funkcji kwadratowej na czynniki pierwsze	11
1.3.4	Nierówności kwadratowe	13
1.3.5	Przykłady	16
1.3.6	Zadania	18
1.4	Wielomiany stopia $n$	18
1.4.1	Przykłady wielomianów	19
1.4.2	Operacje arytmetyczne na wielomianach.	19
1.4.3	Dzielenie wielomianu $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$	20
1.4.4	Dzielenie wielomianu $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$ z resztą.	21
1.4.5	Pierwiastki wielomianów. Twierdzenie Bezouta	22
1.4.6	Rozkład wielomianu na czynniki	24
1.4.7	Nierówności wielomianowe	27



# Chapter 1

## Wielomiany

Pod pojęciem *wielomiany* rozumiemy najprostrzą klasę funkcji o bardzo szerokim zakresie zastosowań. W tym wielomiany stopnia  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ , jednej i wielu zmiennych, wielomiany interpolacyjne, wielomiany jako funkcje specjalne i dwumian Newtona.

Jasne, że w programie szkoły podstawowej nie wszystkie rodzaje wielomianów występują, a jeżeli występują to w bardzo elementarnej formie. Zatem w tym rozdziale wielomiany wprowadzone są w najprostrzej formie wsparte licznymi przykładami i zadaniami.

### 1.1 Jednomiany, dwumiany i trójmiany

*Jednomianem nazywamy ciąg liczb lub ciąg liczb i liter lub ciąg tylko liter połączonych operacją mnożenia.*

Wymieńmy kilka jednomianów

$$\begin{array}{ll} 125 & 247, \quad \text{jedna liczba jest jednomianem} \\ 2 * 5 * 7, & 3 * 4 * 5 * 6 * 7, \\ 3 * a * b & a * b * c, \\ 4 * 5 * x * y * z, & 5 * a^2 * b^3 * c^4, \\ 15 * x^3 * y^2 * z^3 & 7 * 9 * a^4 * b^5 * x^6 * y^7. \end{array}$$

Każdy jednomian jest szczególnym wyrażeniem arytmetycznym lub algebraicznym, gdyż występują w ich określeniu liczby lub litery połączone tylko operacją mnożenia.

*Dwumianem nazywamy sumę dwóch jednomianów.*

Na przykład

$$a + b, \quad a - b, \quad a^2 + b^2, \quad 3x^3 + 5y^3.$$

*Podobnie trójmianem nazywamy sumę trzech jednomianów.*

Na przykład

$$\begin{array}{ll} a + b + c, & 2 * x_3 + 4 * y^3 + 5 * x * y, \\ a^2 + 2 * a * b + b^2, & x^2 - 2 * x * y + y^2. \end{array}$$

### 1.2 Funkcja liniowa.

Funkcja liniowa, czyli wielomian stopnia  $n = 1$  jest dwumianem szczególnej postaci:

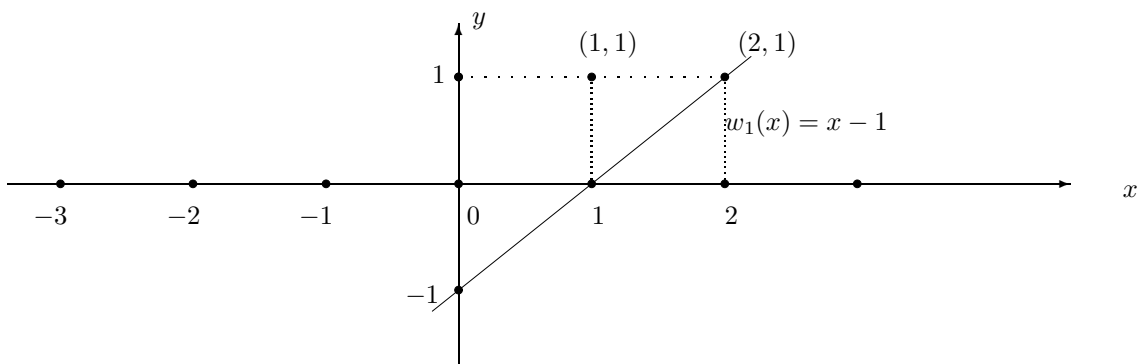
$$w_1(x) = a x + b \tag{1.1}$$

o współczynnikach  $a$  i  $b$  oraz zmiennej  $x$ .

Dwumian  $w_1(x) = a x + b$  nazywamy funkcją liniową, gdyż jej wykresem jest linia prosta.

Jeżeli współczynnik  $a = 0$  to funkcja liniowa jest stała, której wykresem jest prosta równoległa do osi  $x$ . Funkcja liniowa ustala zależność pomiędzy współzrędnymi  $x$  i  $y$ , którą piszemy

$$w_1(x) = ax + b, \quad \text{lub} \quad y = ax + b$$



Wykres funkcji liniowej  $y = x - 1$ , w układzie współrzędnych  $x, y$

Zauważmy, że linia prosta o równaniu  $y = x - 1$  przechodzi przez punkty  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$  i przez punkt  $(2, 1)$ . Wartości tej funkcji liniowej obliczamy niżej dla argumentu  $x = 0, 1, 2$

$$w_1(0) = 0 - 1 = -1, \quad w_1(1) = 1 - 1 = 0, \quad w_1(2) = 2 - 1 = 1.$$

Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.  
Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współzrędnym

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$$

piszemy jako następującą zależność współzrędnym  $y$  od współzrędnym  $x$ :

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \quad (1.2)$$

Istotnie, gdy  $x = x_0$  to  $y = y_0$  lub gdy  $x = x_1$  to  $y = y_1$ . To znaczy, że punkty  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  leżą na prostej, gdyż ich współzrędnym spełniają równanie prostej.

**Przykład 1.1** Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty  $(x_0, y_0) = (-1, 0)$  i  $(x_1, y_1) = (0, 1)$ . Sprawdź który z punktów  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$  leży na prostej.

**Rozwiązanie:**

Piszemy równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$(x_0, y_0) = (-1, 0) \quad \text{i} \quad (x_1, y_1) = (0, 1)$$

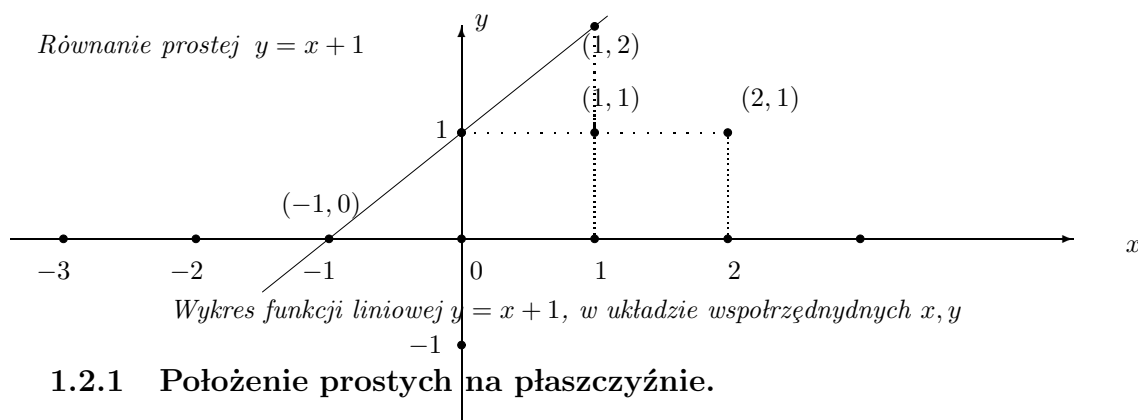
podstawiając do wzoru (1.2) ich współzrędnym

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 = \frac{x - 0}{-1 - 0} * 0 + \frac{x + 1}{0 + 1} * 1 = x + 1$$

Odpowiedź: Równanie prostej przechodzącej przez punkty  $(-1, 0)$  i  $(0, 1)$

$$y = x + 1$$

Punkt  $(1, 1)$  nie leży na prostej  $y = x + 1$  ponieważ jego współrzędne nie spełniają równania  $1 \neq 1 + 1$ . Natomiast punkt  $(1, 2)$  leży na prostej  $y = x + 1$  ponieważ jego współrzędne spełniają  $2 = 1 + 1$  (zobacz rysunek, niżej).



### 1.2.1 Położenie prostych na płaszczyźnie.

Funkcja liniowa

$$y = ax + b$$

określa położenie prostej na płaszczyźnie  $(x, y)$ . To znaczy punkt o współrzędnych  $(x, y)$  leży na prostej, jeżeli  $y = ax + b$ .

Funkcja liniowa  $y = ax + b$  przecina oś  $x$  w punkcie  $(-\frac{b}{a}, 0)$  i przecina oś  $y$  w punkcie  $(0, b)$ .

Mówimy, że liczba  $x$  jest proporcjonalna do liczby  $y$ , jeżeli  $y = ax$  lub  $\frac{y}{x} = a$ . Zatem proporcjonalność dwóch wielkości wyraża funkcja liniowa. Wtedy  $a \neq 0$  jest współczynnikiem proporcjonalności.

Zauważmy, że prosta  $y = ax + b$

- przecina oś  $y$ , w punkcie  $(0, b)$ , gdy  $x = 0$ , wtedy

$$y = ax + b = a \cdot 0 + b = b$$

- przecina oś  $x$ , w punkcie  $(-\frac{b}{a}, 0)$ , gdy  $x = -\frac{b}{a}$ , wtedy

$$y = ax + b = a(-\frac{b}{a}) + b = 0.$$

- jeżeli  $a = 0$  to  $y = b$  wtedy prosta jest równoległa do osi  $x$
- dwie proste o równaniach

$$y = a_1x + b_1, \quad y = a_2x + b_2$$

przecinają się w punkcie  $(x_0, y_0)$ , jeżeli ten punkt spełnia równania tych prostych

$$y_0 = a_1x_0 + b_1, \quad i \quad y_0 = a_2x_0 + b_2$$

- dwie proste są równoległe, jeżeli  $a_1 = a_2$ . Wtedy proste nie mają punktu wspólnego lub pokrywają się.

**Przykład 1.2** Podaj położenie na płaszczyźnie  $(x, y)$  dwóch prostych o równaniach

$$y = x, \quad y = 1 - x$$

Znajdź ich punkty przecięcia z osiami  $x$  i  $y$  oraz punkt przecięcia tych prostych.

**Rozwiązanie.** Prosta o równaniu  $y = x$  przecina oś  $x$  i oś  $y$  w początku układu współrzędnych  $(0, 0)$ , wtedy  $x = 0$  i  $y = 0$ .

Podobnie, prosta o równaniu  $y = 1 - x$  przecina oś  $x$ , gdy  $y = 0$ , to znaczy  $1 - x = 0$ , dla  $x = 1$ , w punkcie  $(1, 0)$ . Ta prosta przecina oś  $y$  gdy  $x = 0$ , wtedy  $y = 1 - 0 = 1$  to jest w punkcie  $(0, 1)$ .

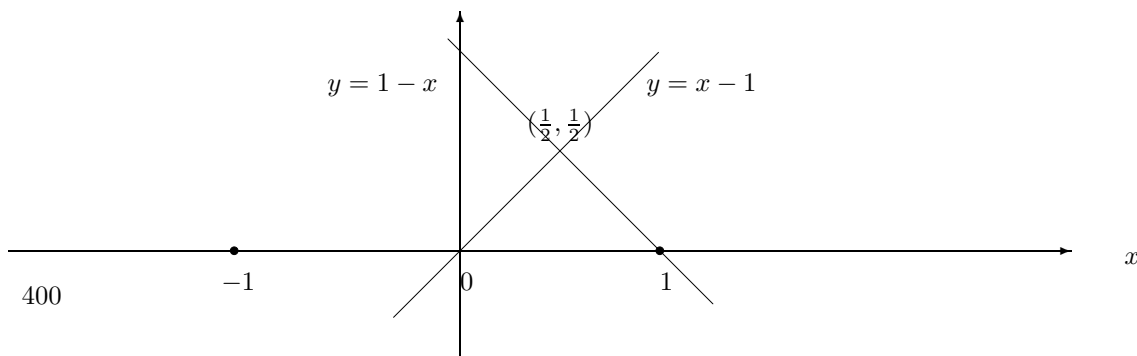
Dwie proste przecinają się w punkcie  $(x, y)$  gdy współrzędne tego punktu spełniają oba równania, to znaczy

$$y = x, \quad \text{oraz} \quad y = 1 - x$$

Skąd przez podstawienie  $y = x$  do drugiego równania znajdujemy

$$x = 1 - x, \quad 2x = 1, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

Zatem proste przecinają się w punkcie  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



Proste:  $y = x, \quad y = 1 - x$

**Zadanie 1.1** Podaj położenie na płaszczyźnie  $(x, y)$  dwóch prostych o równaniach

$$y = 2x - 1, \quad y = 1 - 2x$$

Znajdź ich punkty przecięcia z osiami  $x$  i  $y$  oraz punkt przecięcia tych prostych.

**Zadanie 1.2** Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty  $(x_0, y_0) = (-1, -1)$  i  $(x_1, y_1) = (1, 1)$ . Sprawdź który z punktów  $(0, 1)$ ,  $(2, 2)$  leży na prostej.

**Zadanie 1.3** W których punktach prosta  $y = -3x + 6$  przecina osie współrzędnych. Oblicz wartość tej funkcji liniowej dla  $x = 1$ . Sprawdź który z punktów  $(0, 3)$ ,  $(2, 0)$  leży na prostej.

### 1.3 Funkcja kwadratowa

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem

$$w_2(x) = a x^2 + b x + c, \quad \text{lub} \quad y = a x^2 + b x + c, \quad a \neq 0. \quad (1.3)$$

W przypadku gdy współczynnik  $a = 0$  funkcja  $y = b x + c$  jest liniowa.

Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych  $R$ . Natomiast, zbiór wartości



funkcji kwadratowej zależy od współczynników  $a, b, c$  i nie jest całym zbiorem liczb rzeczywistych.

**Wyróżnik funkcji kwadratowej.** Wyrażenie

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

nazywamy wyróżnikiem funkcji kwadratowej.

### 1.3.1 Równanie kwadratowe

Funkcja kwadratowa ma wartość zero w punkcie  $x_0$ , jeżeli  $x_0$  jest rozwiązaniem równania kwadratowego

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Pierwiastki równania kwadratowego wyznaczamy metodą starożytnych uzupełnienia wyrażenia

$$ax^2 + bx + c$$

do kwadratu.

Mianowicie, wyciągając współczynnik  $a \neq 0$  przed nawias otrzymamy

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Następnie, dodając i jednocześnie odejmując wyrażenie  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$  piszemy wyrażenie kwadratowe w postaci kanonicznej

$$ax^2 + bx + c = a\left(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} + \underbrace{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}_{-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) = a\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} - \underbrace{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}_{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right]$$

W ten sposób otrzymaliśmy postać kanoniczną funkcji kwadratowej:

**Postać kanoniczna funkcji kwadratowej.**

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

gdzie wyróżnik  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Pierwiastki równania kwadratowego.** Z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej łatwo znajdujemy pierwiastki równania kwadratowego. Mianowicie piszemy

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0.$$

Dla wyróżnika  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$  możemy różnicę kwadratów napisać w postaci iloczynu

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0.$$

Skąd wynikają wzory na pierwiastki równania kwadratowego

$$x_1 + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0, \quad \text{lub} \quad x_2 + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

lub

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{lub} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Zauważmy, że w przypadku gdy wyróżnik  $\Delta = 0$ , funkcja kwadratowa jest pełnym kwadratem

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Wtedy z powyższych wzorów otrzymujemy pierwiastek podwójny

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0, \quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

### 1.3.2 Wzory Vieta

Pierwiastki równania kwadratowego

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

spełniają następujące wzory Vieta:

Suma i iloczyn pierwiastków

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 * x_2 = \frac{c}{a}.$$

Istotnie, obliczamy

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Podobnie iloczyn

$$\begin{aligned} x_1 * x_2 &= \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) * \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \\ &= \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 \\ &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

**Przykład 1.3** *Znajdź równanie kwadratowe którego suma pierwiastków równa 3 i iloczyn pierwiastków równy 2.*

**Rozwiązanie.** Stosując wzory Vieta, piszemy

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3, \quad x_1 * x_2 = \frac{c}{a} = 2.$$

Skąd znajdujemy

$$b = -3a, \quad c = 2a.$$

Zatem, mamy rodzinę równań kwadratowych

$$ax^2 - 3ax + 2a = 0$$

z parametrem  $a \neq 0$  których suma pierwiastków równa jest 3, i iloczyn pierwiastków równy jest 2.

**Zadanie 1.4** *Znajdź równanie kwadratowe którego suma pierwiastków równa 6 i iloczyn pierwiastków równy 5.*

### 1.3.3 Rozkład funkcji kwadratowej na czynniki pierwsze

Jeżeli wyróżnik  $\Delta < 0$  jest ujemny to równanie kwadratowe nie ma pierwiastków rzeczywistych. Wtedy funkcja kwadratowa nie rozkłada się na czynniki liniowe.

W przypadku gdy wyróżnik  $\Delta \geq 0$  funkcja kwadratowa rozkłada się na czynniki liniowe.

Istotnie, wtedy możemy przedstawić funkcję kwadratową jako różnicę kwadratów

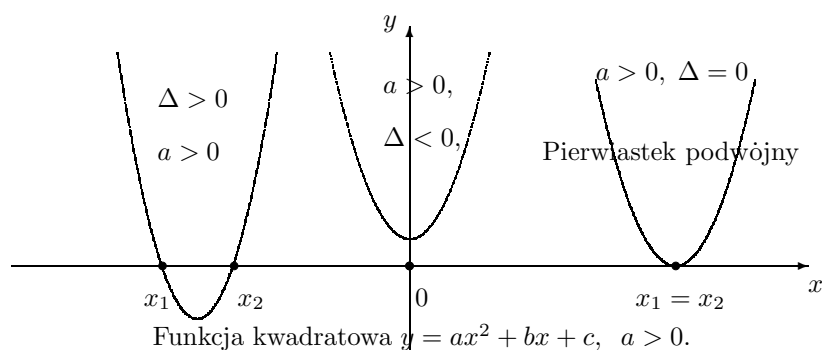
$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

Stosując wzór na różnicę kwadratów otrzymamy rozkład funkcji kwadratowej na czynniki liniowe

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = a(x - x_1)(x - x_2)$$

**Położenie funkcji kwadratowej na płaszczyźnie.** Położenie wykresu funkcji kwadratowej na płaszczyźnie we współrzędnych  $(x, y)$  wyznaczymy w następujących przypadkach:

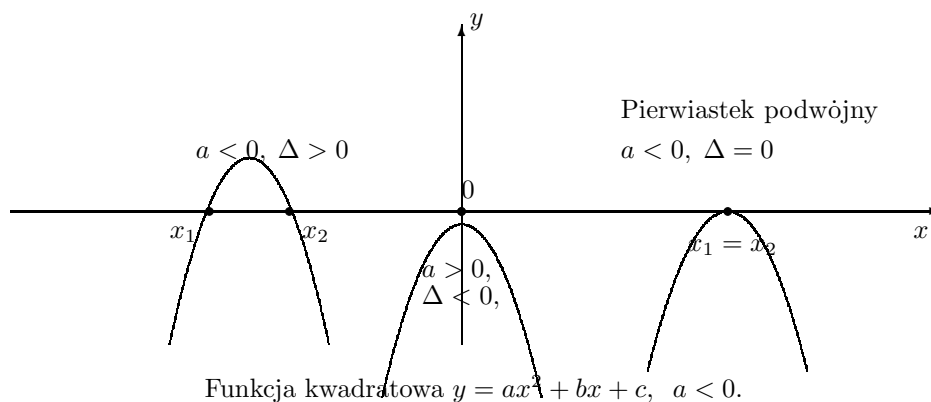
- (1)  $a > 0, \Delta > 0, \Delta = 0, \Delta < 0$
- (2)  $a < 0, \Delta > 0, \Delta = 0, \Delta < 0$ .



W przypadku (2)

$$a < 0, \Delta > 0, \Delta = 0, \Delta < 0$$

położenie wykresu trójmianu kwadratowego



Z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej wnioskujemy, że

- funkcja kwadratowa osiąga minimum równe  $-\frac{\Delta}{4a}$ , jeżeli współczynnik  $a > 0$  jest dodatni.
- funkcja kwadratowa osiąga maksimum równe  $-\frac{\Delta}{4a}$ , jeżeli współczynnik  $a < 0$  jest ujemny.

Istotnie, w punkcie minimum lub maksimum  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  funkcja kwadratowa osiąga minimum lub maksimum, gdyż wtedy w postaci kanonicznej

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

wyrażenie  $(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$  dla  $x = -\frac{b}{2a}$ , natomiast wartość funkcji  $y = -\frac{\Delta}{4a}$ .

**Przykład 1.4** Dla danej funkcji kwadratowej

$$y = 2x^2 - 6x + 4$$

wykonaj następujące operacje:

- Znajdź miejsca zerowe funkcji
- Rozłóż funkcję na czynniki liniowe
- Znajdź minimum funkcji
- Podaj wykres funkcji

**Rozwiązanie.** Współczynniki równania:  $a = 2$ ,  $b = -6$ ,  $c = 4$ .  
Obliczmy wyróżnik równania

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 36 - 32 = 4 > 0.$$

(a) Stosując wzory, obliczmy pierwiastki równia

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{4}}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{4}}{4} = 2$$

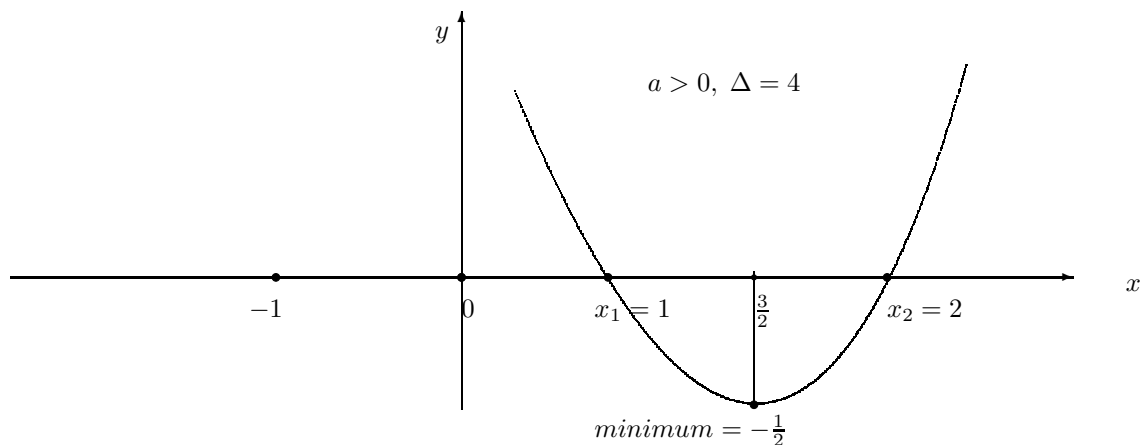
(b) Według wzoru, funkcja kwadratowa rozkłada się na czynniki liniowe

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) = 2(x - 1)(x - 2).$$

(c) Ponieważ wyróżnik  $\Delta = 4 > 0$  jest dodatni to funkcja kwadratowa ma minimum  $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{2}$  w punkcie  $(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ .

Punkty w których leżą pierwiastki funkcji kwadratowej  $(1, 0)$   $(2, 0)$  i punkt minimum  $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$  wyznaczają położenie jej wykresu na płaszczyźnie  $(x, y)$ .

(d) Wykres funkcji  $y = 2x^2 - 6x + 4$



Funkcja kwadratowa  $y = 2x^2 - 6x + 4$ .

### 1.3.4 Nierówności kwadratowe

Rozwiązanie nierówności kwadratowych odczytujemy z położenia wykresu funkcji kwadratowej. Mianowicie, mamy następujące przypadki:

1. Dla  $a > 0, \Delta > 0$  funkcja kwadratowa  $y = ax^2 + bx + c > 0$  jest dodatnia poza pierwiastkami:  $x < x_1$  oraz  $x > x_2$ , natomiast jest ujemna  $y = ax^2 + bx + c < 0$  pomiędzy pierwiastkami:  $x_1 < x < x_2$ .
2. Dla  $a < 0, \Delta > 0$  funkcja kwadratowa  $y = ax^2 + bx + c > 0$  jest ujemna poza pierwiastkami:  $x < x_1$  oraz  $x > x_2$ , natomiast jest dodatnia  $y = ax^2 + bx + c > 0$  pomiędzy pierwiastkami:  $x_1 < x < x_2$ .
3. Dla  $a > 0, \Delta \leq 0$  funkcja kwadratowa  $y = ax^2 + bx + c \geq 0$  jest nieujemna na całym zbiorze liczb rzeczywistych dla  $-\infty < x < \infty$ .
4. Dla  $a < 0, \Delta \leq 0$  funkcja kwadratowa  $y = ax^2 + bx + c \leq 0$  jest niedodatnia na całym zbiorze liczb rzeczywistych dla  $-\infty < x < \infty$ .

**Przykład 1.5** Rozwiąż następujące nierówności i znajdź maksimum lub minimum wskazanej funkcji:

$$(1) \quad x^2 + x + 1 > 0, \quad y = x^2 + x + 1.$$

$$(2) \quad -2x^2 + 2x - 1 < 0, \quad y = -2x^2 + 2x - 1,$$

$$(3) \quad x^2 - 5x + 6 \geq 0, \quad y = x^2 - 5x + 6,$$

$$(4) \quad -2x^2 + x + 1 > 0, \quad y = -2x^2 + x + 1.$$

**Rozwiązanie, (1).** Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji

$$y = x^2 + x + 1.$$

Współczynniki:

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1.$$

Wyróżnik:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 * 1 * 1 = -3.$$

Ponieważ współczynnik  $a = 1 > 0$  jest dodatni i wyróżnik  $\Delta = -3 < 0$  jest ujemny to nierówność

$$x^2 + x + 1 > 0,$$

jest prawdziwa dla  $-\infty < x < \infty$ .

Funkcja

$$y = x^2 + x + 1$$

osiąga minimum równe  $\frac{3}{4}$  w punkcie  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ .

**Rozwiązanie, (2).** Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji

$$y = -2x^2 + 2x - 1.$$

Współczynniki:  $a = -2$ ,  $b = 2$ ,  $c = -1$ .

Wyróżnik:  $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 * (-2) * (-1) = -4$ .

Ponieważ współczynnik  $a = -2 < 0$  jest ujemny i wyróżnik  $\Delta = -4 < 0$  jest ujemny to nierówność

$$-2x^2 + 2x - 1 < 0$$

trójkąta jest prawdziwa dla  $-\infty < x < \infty$ .

Funkcja  $y = -2x^2 + 2x - 1$  osiąga maksimum równe 1 w punkcie  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (\frac{1}{2}, 1)$

**Rozwiązanie, (3).** Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji

$$y = x^2 - 5x + 6.$$

Współczynniki:  $a = 1$ ,  $b = -5$ ,  $c = 6$ .

Wyróżnik:  $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 * 1 * 6 = 1$ .

Ponieważ wyróżnik  $\Delta = 1 > 0$ ,  $\sqrt{1} = 1$  jest dodatni to funkcja ma dwa różne pierwiastki

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 1}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 1}{2} = 3.$$

Zatem nierówność

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

jest prawdziwa poza pierwiastkami to znaczy dla  $x < 2$  i dla  $x > 3$

Funkcja  $y = x^2 - 5x + 6$  osiąga minimum równe  $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4}$  w punkcie  $(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}) = (\frac{5}{2}, \frac{-1}{4})$ .

**Rozwiązanie, (4).** Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji

$$y = -2x^2 + x + 1,$$

Współczynniki:  $a = -2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$ .

Wyróżnik:  $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 * (-2) * 1 = 9$ .

Ponieważ współczynnik  $a = -2 < 0$  wyróżnik  $\Delta = 9 > 0$ ,  $\sqrt{9} = 3$  jest dodatnia to funkcja

$$y = -2x^2 + x + 1,$$

ma dwa różne pierwiastki

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{2 * (-2)} = 1, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{2 * (-2)} = -\frac{1}{2}.$$

Zatem nierówność jest prawdziwa pomiędzy pierwiastkami to znaczy dla  $-\frac{1}{2} < x < 1$ .

Funkcja  $y = -2x^2 + x + 1$  osiąga maksimum równe  $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{9}{8}$  w punkcie  $(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}) = (\frac{1}{4}, \frac{9}{8})$ .

**Zadanie 1.5** Rozwiąż następujące nierówności i znajdź maksimum lub minimum wskazanej funkcji:

$$(1) \quad x^2 - x + 1 > 0, \quad y = x^2 - x + 1.$$

$$(2) \quad -3x^2 + 6x - 3 \leq 0, \quad y = -3x^2 + 6x - 3.$$

$$(3) \quad x^2 - x - 2 \geq 0, \quad y = x^2 - x - 2.$$

$$(4) \quad -4x^2 + 3x + 1 > 0, \quad y = -4x^2 + 3x + 1.$$

**Zadanie 1.6** Dla jakich wartości parametru  $m$  funkcja kwadratowa

$$y = x^2 + 2mx + m + 1$$

jest dodatnia dla wszystkich rzeczywistych wartości  $x \in \mathbb{R}$ .

**Przykład 1.6** Dla trójmianu kwadratowego

$$y = x^3 - 5x + 6$$

(i) wyprowadź postać kanoniczną trójmianu

(ii) znajdź jego pierwiastki i oblicz minimum trójmianu

(iii) narysuj położenie trójmianu na płaszczyźnie kartezjańskiej.

**Rozwiązanie:**

(i) Wyróżnik trójmianu kwadratowego o współczynnikach  $a = 1$ ,  $b = -5$ ,  $c = 6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1.$$

Proste przekształcenie tego trójmianu prowadzi do postaci kanonicznej

$$y = x^2 - 5x + 6 = x^2 - 5x + \left(\frac{-5}{2}\right)^2 + 6 - \left(\frac{-5}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Skąd postać kanoniczna tego trójmianu

$$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

(ii) Obliczmy pierwiastki trójmianu z postaci kanonicznej lub bezpośrednio ze wzorów. Mianowicie postać kanoniczna jest różnicą kwadratów, którą rozkładamy na czynniki

$$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Skąd obliczamy pierwiastki równania kwadratowego

$$\left(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0, \quad \text{lub} \quad \left(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

Łatwo obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego podstawiając do wzorów

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-5}{2} - \frac{\sqrt{1}}{2} = 2, \quad x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-5}{2} + \frac{\sqrt{1}}{2} = 3.$$

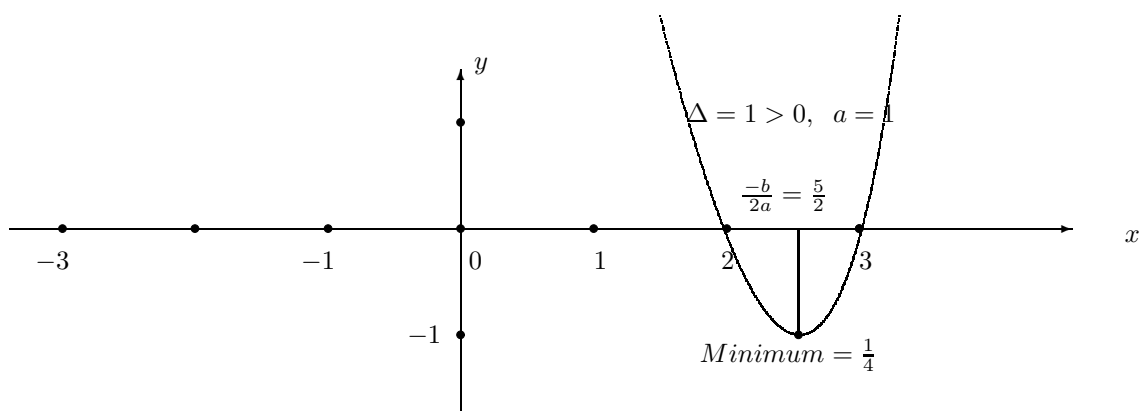
Minimum trójmianu kwadratowego obliczamy bezpośrednio z postaci kanonicznej

$$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Jasne, że wartość tego trójmianu jest najmniejsza, jeżeli kwadrat

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 0.$$

Dla  $x = \frac{5}{2}$ , wartość  $y = -\frac{1}{4}$ . Zatem minimum trójmianu kwadratowego równe jest  $\frac{1}{4}$ .



### 1.3.5 Przykłady

**Przykład 1.7** *Równanie kwadratowe*

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

ma dwa pierwiastki rzeczywiste  $x_1$  i  $x_2$ . Korzystając ze wzorów Viete oblicz wartości wyrażeń algebraicznych

$$(x_1 + x_2)^2, \quad x_1^2 + x_2^2, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

**Rozwiązanie:** Współczynniki równania  $a = 1$ ,  $b = -4$ ,  $c = 3$   
Ze wzorów Viete obliczmy sumę i iloczyn pierwiastków

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{1} = 4, \quad x_1 * x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3.$$

Skąd obliczamy wartości wyrażeń algebraicznych

$$(x_1 + x_2)^2 = 4^2 = 16, \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 16 - 2 * 3 = 10.$$

oraz

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 * x_2} = \frac{4}{3}.$$



**Przykład 1.8** Dla których wartości parametru  $m$  równanie

$$x^2 - 2x + m = 0$$

ma dwa różne pierwiastki

**Rozwiązanie:** Równie

$$x^2 - 2x + m = 0$$

ma dwa różne pierwiastki, jeżeli wyróżnik tego równa jest dodatni

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4m > 0, \\ 4 - 4m > 0, \quad 4m < 4, \quad m < 1.$$

Odpowiedź: Równanie  $x^2 - 2x + m$  ma dwa różne pierwiastki dla parametru  $-\infty < m < 1$

**Przykład 1.9** Wyznacz współczynniki  $a$ ,  $b$ ,  $c$  równania kwadratowego

$$ax^2 + bx + c = 0$$

które posiada dwa rzeczywiste pierwiastki  $x_1$  i  $x_2$  takie, że ich suma i iloczyn są dane

$$x_1 + x_2 = 7, \quad x_1 * x_2 = 10.$$

**Rozwiązanie:** Korzystając ze wzorów Viete

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 7, \quad x_1 * x_2 = \frac{c}{a} = 10,$$

znajdujemy następujące związki

$$b = -7a, ; \quad c = 10a.$$

Skąd równanie

$$ax^2 - 7ax + 10a = 0, \quad \text{lub} \quad a(x^2 - 7x + 10) = 0$$

spełnia warunki zadania dla każdego  $a \neq 0$ .

**Przykład 1.10** Wyznacz współczynniki  $a$ ,  $b$ ,  $c$  równania kwadratowego

$$ax^2 + bx + c = 0$$

które posiada dwa rzeczywiste pierwiastki  $x_1 = 3$  i  $x_2 = 8$

**Rozwiązanie:** Korzystając ze wzorów Viete

$$x_1 + x_2 = 3 + 8 = 11, \quad \frac{-b}{a} = 11, \quad x_1 * x_2 = 3 * 8 = 24, \quad \frac{c}{a} = 24,$$

znajdujemy następujące związki

$$b = -11a, ; \quad c = 24a.$$

Skąd otrzymujemy równanie

$$ax^2 - 11ax + 24a = 0, \quad \text{lub} \quad a(x^2 - 11x + 24) = 0$$

które posiada pierwiastki  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 8$  dla każdego  $a \neq 0$ .

### 1.3.6 Zadania

**Zadanie 1.7** *Znajdź pierwiastki równania*

(i)  $x^2 - 3x + 6 = 0$ ,

(ii)  $-2x^2 + 9x - 10 = 0$ ,

(iii)  $4x^2 - 12x + 9 = 0$ .

**Zadanie 1.8** *Dla których wartości parametru  $m$  równanie*

$$-x^2 + 4x + m - 4 = 0$$

*ma dwa różne pierwiastki*

**Zadanie 1.9** *Dla których wartości zmiennej  $x$  trójmian kwadratowy*

$$y = x^2 + 4x + 3$$

*jest dodatni.*

*Oblicz najmniejszą wartość tego trójmianu kwadratowego.*

**Zadanie 1.10** *Dla których wartości zmiennej  $x$  trójmian kwadratowy*

$$y = -2x^2 + 5x + 3$$

*jest ujemny.*

*Oblicz największą wartość tego trójmianu kwadratowego.*

**Zadanie 1.11** *Dla których wartości parametru  $m$  trójmian kwadratowy*

$$y = x^2 + 4x + m^2$$

*jest dodatni dla wszystkich wartości zmiennej  $x$ .*

*Oblicz najmniejszą wartość tego trójmianu kwadratowego.*

**Zadanie 1.12** *Dla których wartości parametru  $m$  trójmian kwadratowy*

$$y = -x^2 + 3x - m,$$

*jest ujemny dla wszystkich wartości zmiennej  $x$ .*

*Oblicz największą wartość tego trójmianu kwadratowego.*

**Zadanie 1.13** *Znajdź równanie kwadratowe którego suma pierwiastków równa 6 i iloczyn pierwiastków równy 5.*

## 1.4 Wielomiany stopnia $n$

Wielomiany mają prostą strukturę i stanowią ważną klasę funkcji w zastosowaniach matematyki. W istocie, wielomianami można aproksymować każdą funkcję ciągłą z dowolną dokładnością.

Wielomianem stopnia  $n$  z zmiennej  $x$  nazywamy wyrażenie algebraiczne następującej postaci:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Jeżeli  $a_n = 0$  to wielomian jest stopnia niższego niż  $n$

### 1.4.1 Przykłady wielomianów

Wielomian stopnia  $n = 0$  zmiennej  $x$  ma wartość stałą równą  $a_0$

$$p_0(x) = a_0 \quad \text{dla wszystkich wartości } x \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian stopnia  $n = 0$

$$p_0(x) = 8 \quad \text{dla wszystkich } x \in (-\infty, \infty).$$

ma wartość stałą,  $a_0 = 8$  dla wszystkich wartości rzeczywistych  $x$ .

Wielomian stopnia  $n = 1$  zmiennej  $x$ , funkcja liniowa

$$p_1(x) = a_1x + a_0 \quad \text{dla wszystkich wartości } x \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian stopnia  $n = 1$

$$p_1(x) = 5x + 7 \quad \text{dla } x \in (-\infty, \infty).$$

ma współczynniki  $a_1 = 5$ ,  $a_0 = 7$ .

Wielomian stopnia  $n = 2$  zmiennej  $x$ , funkcja kwadratowa

$$p_2(x) = a_2x + a_1x^2 + a_0 \quad \text{dla } x \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian stopnia  $n = 2$

$$p_2(x) = 3x^2 + 4x + 5 \quad \text{dla } x \in (-\infty, \infty).$$

ma współczynniki  $a_2 = 3$ ,  $a_1 = 4$ ,  $a_0 = 5$ .

Wielomian stopnia  $n = 3$  zmiennej  $x$ , wielomian kubiczny

$$p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{dla } x \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian kubiczny

$$p_3(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5, \quad \text{dla } x \in (-\infty, \infty).$$

ma współczynniki  $a_3 = 2$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_1 = 4$ ,  $a_0 = 5$ .

Podobnie wielomian stopnia  $n = 5$  zmiennej  $z$ ,

$$p_5(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad \text{dla } x \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian stopnia  $n = 5$

$$p_5(z) = 2z^5 - 7z^4 + 5z^2 + 2, \quad \text{dla } x \in (-\infty, \infty).$$

ma współczynniki  $a_5 = 2$ ,  $a_4 = -7$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_2 = 5$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_0 = 2$ .

### 1.4.2 Operacje arytmetyczne na wielomianach.

Następujące twierdzenie jest prawie oczywiste:

**Twierdzenie 1.1** *Zbiór wielomianów stopnia nie większego niż  $n$  jest zamknięty ze względu na operacje dodawania i odejmowania.*

Istotnie, rozpatrzmy dwa następujące wielomiany

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0,$$

Znajdujemy sumę lub różnicę tych wielomianów przez grupowanie wyrazów przy tej samej potędze

$$p_n(x) \pm q_n(x) = (a_n \pm b_n)x^n + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 \pm b_1)x + (a_0 \pm b_0)$$

Zauważamy, że w wyniku otrzymamy wielomian stopnia nie większego niż  $n$  o współczynnikach

$$a_n \pm b_n, a_{n-1} \pm b_{n-1}, \dots, a_1 \pm b_1, a_0 \pm b_0.$$

Zatem, suma lub różnica wielomianów stopnia co najwyżej  $n$  jest wielomianem stopnia co najwyżej  $n$ . To znaczy, że zbiór wielomianów stopnia co najwyżej  $n$  jest zamknięty na operacje dodawania i odejmowania wielomianów stopnia co najwyżej  $n$ .

**Przykład 1.11** Dodaj następujące wielomiany

$$p_4(x) = 3x^4 - 2x^3 + x + 5, \quad q_3(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x + 1,$$

Wykonując dodawanie, otrzymamy wielomian

$$\begin{aligned} r_4(x) &= (3+0)x^4 + (-2+2)x^3 + (0+5)x^2 + (1+2)x + (5+1) \\ &= 3x^4 + 5x^2 + 3x + 6. \end{aligned}$$

stopnia  $n = 4$  o współczynnikach  $a_4 = 3$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_2 = 5$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_0 = 6$ .

### 1.4.3 Dzielenie wielomianu $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$

Wielomian  $p_n(x)$  stopnia  $n$  dzielimy przez dwumian  $x - x_0$  stopnia  $n = 1$  według schematu dzielenia podanego w następujących przykładach:

**Przykład 1.12** Wykonaj dzielenie:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1 \\ x^3 - x^2 \\ \hline x^2 - 1 \\ x^2 - x \\ \hline x - 1 \\ x - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Zauważ, że wykonujemy odejmowanie pod kreską.

Zatem wielomian  $x^3 - 1$  dzieli się przez dwumian  $x - 1$  i wynikiem dzielenia jest trójmian  $x^2 + x + 1$ .

Sprawdzamy dzielenie wykonując operacje odwrotną do dzielenia, to jest operacje odwrotną, mnożenie

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 - x^2 - 1 = x^3 - 1$$

Istotnie, w wyniku mnożenia dzielnika  $x - 1$  przez wynik dzielenia  $x^2 + x + 1$  otrzymaliśmy dzielną  $x^3 - 1$ .

**Przykład 1.13** Wykonaj dzielenie:

$$\begin{array}{r}
 (x^4 - x^3 - x^2 - x - 2) : (x - 2) = x^3 + x^2 + x + 1 \\
 x^4 - 2x^3 \\
 \hline
 x^3 - x^2 \\
 x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 x^2 - x \\
 x^2 - 2x \\
 \hline
 x - 2 \\
 x - 2 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Zauważ, że wykonujemy odejmowanie pod kreską.

Zatem wielomian  $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$  dzieli się przez dwumian  $x - 2$  i wynikiem dzielenia, którym jest wielomian  $x^3 + x^2 + x + 1$ .

Sprawdzamy, że

$$(x - 2)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 2 = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2.$$

**Zadanie 1.14** Wykonaj dzielenie według powyższego schematu:

$$(x^4 - 1) : (x - 1)$$

#### 1.4.4 Dzielenie wielomianu $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$ z resztą.

Dzielenie wielomianów jest rozszerzeniem algorytmu dzielenia liczb całkowitych. W powyższych przykładach wykonaliśmy dzielenie wielomianu 3-go i 4-go stopnia przez dwumian  $x - x_0$  bez reszty, czyli reszta  $r = 0$ . Jednak nie zawsze tak jest. Naogół wielomiany dzielą się przez dwumian z resztą  $r$ .

Ponieważ rozpatrujemy dzielenie wielomianu

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad n \geq 1,$$

tylko przez dwumian  $x - x_0$  to reszta  $r$  jest liczbą, wielomianem stałym stopnia zero.

Podobnie jak przy dzieleniu liczb całkowitych piszemy

$$\frac{p_n(x)}{x - x_0} = q_{n-1}(x) + \frac{r}{x - x_0}, \quad n \geq 1,$$

gdzie  $q_{n-1}(x)$  jest wielomianem stopnia  $n - 1$  i  $r$  jest resztą z dzielenia.

Zatem wielomian  $p_n(x)$  można zapisać

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - x_0) + r$$

Z powyższej równości wynika wzór na resztę, mianowicie  $r = p_n(x_0)$ .

**Przykład 1.14** Wykonaj dzielenie

$$(2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6) : (x - 3)$$

$$\begin{array}{r}
(2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6) : (x - 3) = 2x^3 + 9x^2 + 23x + 74 \\
2x^4 - 6x^3 \\
\hline
9x^3 - 4x^2 \\
9x^3 - 27x^2 \\
\hline
23x^2 + 5x \\
23x^2 - 69x \\
\hline
74x + 6 \\
74x - 222 \\
\hline
226
\end{array}$$

Odpowiedź: Wielomian  $p_4(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$  podzielony przez dwumian  $x - 3$  daje wynik  $q_3(x) = 2x^3 + 9x^2 + 23x + 74$  z resztą  $r = 226$ .

Piszemy

$$\frac{p_4(x)}{x - 3} = (2x^3 + 9x^2 + 23x + 74) + \frac{226}{x - 3}.$$

lub

$$p_4(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6 = (2x^3 + 9x^2 + 23x + 74)(x - 3) + 226.$$

Skąd reszta z dzielenia  $r = p_4(3) = 226$ .

### 1.4.5 Pierwiastki wielomianów. Twierdzenie Bezouta

Zera funkcji liniowej czy kwadratowej, czyli wielomianów stopnia pierwszego i stopnia drugiego, łatwo znajdujemy stosując znane wzory podane w poprzednich paragrafach. Znane są również wzory na pierwiastki wielomianów trzeciego stopnia i czwartego stopnia. Wiadomo jednak, że nie istnieją wzory na określenie pierwiastków dowolnego wielomianu stopnia większego lub równego niż 5. Natomiast, wiadome są kryteria znajdowania pierwiastków niektórych wielomianów stopni wyższych. Na przykład wiadomo, że jeżeli jakiś wielomian o współczynnikach całkowitych ma pierwiastki całkowite, wtedy te pierwiastki są dzielnikami jego współczynnika  $a_0$ . To kryterium dotyczy tylko wielomianów o współczynnikach całkowitych, które mają pierwiastki też całkowite.

Usadnienie tego kryterium jest proste. Mianowicie, niech całkowita liczba  $x_0 \neq 0$  będzie pierwiastkiem wielomianu  $p_n(x)$  stopnia  $n$  o współczynnikach też całkowitych. Teraz pokażemy, że  $x_0$  jest dzielnikiem wyrazu wolnego  $a_0$ .

Zachodzi oczywista następująca równość:

$$p_n(x_0) = 0, \quad \text{oraz} \quad \frac{p_n(x_0)}{x_0} = \underbrace{a_n x_0^{n-1} + a_{n-1} x_0^{n-2} + \dots + a_1}_{\text{całkowita}} + \frac{a_0}{x_0} = 0 \quad (1.4)$$

Wyrażenie podkreślone nawiasem  $\underbrace{a_n x_0^{n-1} + a_{n-1} x_0^{n-2} + \dots + a_1}_{\text{całkowita}}$  jest liczbą całkowitą jako suma iloczynów liczb całkowitych. Z równości (1.4) wynika, że iloraz  $\frac{a_0}{x_0}$  też jest liczbą całkowitą, gdyż suma jest zerem. Zatem pierwiastek  $x_0$  jest dzielnikiem wyrazu wolnego  $a_0$ .

**Przykład 1.15** *Znajdź pierwiastki całkowite wielomianu*

$$p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 6$$

**Rozwiązanie.** Zera wielomianu  $p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 6 = 0$  szukamy wśród dzielników 2 lub 3 współczynnika  $a_0 = -6$ .

Sprawdzamy czy  $x_0 = 2$  jest zerem tego wielomianu

$$p_3(2) = 2^3 - 2^2 + 2 - 6 = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$$

Dzielnik  $x_0 = 2$  jest zerem wielomianu  $p_4(x)$ .

Teraz sprawdzamy czy  $x_0 = 3$  jest zerem tego wielomianu

$$p_3(3) = 3^3 - 3^2 + 3 - 6 = 27 - 9 + 3 - 6 = 12 \neq 0$$

Dzielnik  $x_0 = 3$  nie jest zerem tego wielomianu.

Zauważmy, że są wielomiany dla których żaden z dzielników współczynnika  $a_0$  nie jest zerem.

Na przykład wielomian

$$p_2(x) = x^2 + 2x + 8$$

nie ma zer rzeczywistych, gdyż wyróżnik  $\Delta = -28$  jest ujemny.

Podstawową informacją o pierwiastkach wielomianów jest twierdzenie Bezouta.

**Twierdzenie 1.2** Liczba  $x_0$  jest pierwiastkiem wielomianu

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad n \geq 1,$$

wtedy i tylko wtedy gdy ten wielomian dzieli się przez dwumian  $x - x_0$ .

**Dowód.** Zauważmy, że twierdzenie Bezouta jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to żeby liczba  $x_0 \in R$  była pierwiastkiem wielomianu.

**Warunek konieczny znaczy:**

Jeżeli wielomian  $p_n(x)$  jest podzielny przez dwumian  $x - x_0$  to liczba  $x_0$  jest pierwiastkiem wielomianu, to znaczy  $p_n(x_0) = 0$  oraz reszta  $r = 0$ .

Zatem niech wielomian  $p_n(x)$  będzie podzielny przez dwumian  $x - x_0$  bez reszty. wtedy ten wielomian ma postać

$$p_n(x) = (x - x_0)q_{n-1}(x)$$

gdzie  $q_{n-1}(x)$  jest wielomianem stopnia co najwyżej  $n - 1$ .

Skąd dla  $x = x_0$  wynika równość  $p_n(x_0) = 0$  i dlatego  $x_0$  jest pierwiastkiem tego wielomianu.

**Warunek dostateczny znaczy:**

Jeżeli liczba  $x_0 \in R$  jest pierwiastkiem wielomian  $p_n(x)$  to ten wielomian jest podzielny przez dwumian  $x - x_0$  z resztą  $r = 0$ .

Wiadomo, że dzieląc wielomian  $p_n(x)$  przez dwumian  $x - x_0$  otrzymamy równość

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - x_0) + r$$

gdzie  $q_{n-1}(x)$  jest wielomianem stopnia  $n - 1$ .

Ponieważ  $x_0$  jest zerem tego wielomianu, to znaczy  $p_n(x_0) = 0$  oraz  $p_n(x_0) = r$ . Zatem reszta  $r = 0$ . Wtedy z powyższej równości wynika postać wielomianu

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - x_0)$$

w której jest czynnik  $x - x_0$  i dlatego wielomian  $p_n(x)$  jest podzielny przez dwumian  $x - x_0$  z resztą  $r = 0$ .

### 1.4.6 Rozkład wielomianu na czynniki

Z twierdzenia Bezouta wynika następujący wniosek:

**Wniosek.** Niech liczby rzeczywiste  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ,  $k \leq n$  będą zerami wielomianu

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad n \geq 1,$$

wtedy ten wielomian można zapisać w postaci iloczynu

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k) q_{n-k}(x) \quad (1.5)$$

$n - k$  czynników liniowych  $(x - x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , i wielomianu  $q_{n-k}(x)$  stopnia  $n - k$ .

Istotnie dla  $k = 1$  z twierdzenia Bezouta wprost wynika iloczyn

$$p_n(x) = (x - x_1) q_{n-1}(x)$$

Stosując powtórnie twierdzenie Bezouta do wielomianu  $q_{n-1}(x)$  dla zera  $x_2$  otrzymamy rozkład

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) q_{n-2}(x)$$

Powtarzając zastosowanie twierdzenia Bezouta dla następnych zer wielomianu  $p_n(x)$  otrzymamy rozkład (1.5) wielomianu na czynniki liniowe i wielomianu  $q_{n-k}(x)$ .

Zauważmy, że rozkład wielomianu stopnia  $n \geq 1$

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

jest równoważny z rozkładem wielomianu

$$p_n(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad n \geq 1,$$

ze współczynnikiem  $a_n = 1$ , gdyż współczynnik  $a_n \neq 0$  zawsze możemy wyciągnąć przed nawias.

Teraz sformułujemy twierdzenie podstawowe o rozkładzie wielomianu na czynniki nierozkładalne:

**Twierdzenie 1.3** *Każdy wielomian*

$$p_n(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad n \geq 1,$$

*rozkłada się na czynniki liniowe  $x - x_0$  lub czynniki kwadratowe  $x^2 + a_1 x + a_0$  z wyróżnikiem  $a_1^2 - 4a_0 < 0$  ujemnym. Ten rozkład jest jednoznaczny.*

Niżej wyliczymy następujące metody rozkładania wielomianów na czynniki:

**Sposoby rozkładania wielomianów na czynniki.**

1. Rozkład trójmianu kwadratowego  $ax^2 + bx + c$
2. Wyciąganie wspólnego czynnika przed nawias
3. Sposób grupowania wyrazów
4. Stosowanie wzorów uproszczonego mnożenia
5. Znajdowanie zer wielomianu o współczynnikach całkowitych.

**Przykład 1.16** *Rozłóż na czynniki wielomian kwadratowy*

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$



**Rozwiązanie.** Wielomian kwadratowy rozkłada się na czynniki w zależności od znaku wyróżnika  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Mianowicie, jeżeli wyróżnik  $\Delta \geq 0$  jest nieujemny, wtedy ten trójmian ma dwa pierwiastki rzeczywiste i rozkłada się na czynniki

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ten przypadek obejmuje również pierwiastek podwójny kiedy  $\Delta = 0$  i  $x_1 = x_2$ . Jeżeli wyróżnik  $\Delta < 0$  jest ujemny to trójmian  $ax^2 + bx + c$  jest nie rozkładalny i wtedy czynnikiem jest wyrażenie  $ax^2 + bx + c$ .

**Przykład 1.17** *Rozłóż na czynniki następujący wielomian przez grupowanie wyrazów i wyciągnięcie wspólnego czynnika*

$$p_3(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

**Rozwiązanie.** Stosujemy kombinacje powyższych sposobów. W tym przypadku grupujemy wyrazy pierwszy i drugi oraz trzeci i czwarty potem wyciągamy przed nawias  $x^2$  oraz 4, w ten sposób otrzymamy

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 &= x^2(x - 2) - 4(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 - 4) \end{aligned}$$

Dalej, stosując wzór na różnicę kwadratów  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$  dostajemy rozkład tego wielomianu na czynniki

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 &= x^2(x - 2) - 4(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 4) \\ &= (x - 2)(x - 2)(x + 2) = (x - 2)^2(x + 2). \end{aligned}$$

**Przykład 1.18** *Rozłóż na czynniki następujący wielomian*

$$p_3(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 10$$

**Rozwiązanie.** Stosujemy kombinacje powyższych sposobów. W tym przypadku wyciągając przed nawias  $x^2$  oraz 5, otrzymamy

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 10 &= x^2(x + 5) + 2(x + 10) \\ &= (x + 5)(x^2 + 2) \end{aligned}$$

Ponieważ wyrażenie kwadratowe  $x^2 + 2 > 0$  jest wszędzie dodatnie to rozkład tego wielomianu na czynniki

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 10 &= x^2(x + 5) + 2(x + 10) \\ &= (x + 5)(x^2 + 2) \end{aligned}$$

zawiera czynnik liniowy  $x + 5$  i czynnik kwadratowy  $x^2 + 2$ , który jest nie rozkładalny.

**Przykład 1.19** *Rozłóż na czynniki następujący wielomian*

$$p_4(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$$

**Rozwiązanie.** W tym przypadku zer wielomianu o współczynnikach całkowitych szukamy wśród dzielników  $-2, -1, 1, 2, 3, 4, 6$  wyrazu wolnego  $a_0 = -12$ .

1. Sprawdzamy czy dzielnik  $x_0 = -2$  jest zerem tego wielomianu

$$p_4(-2) = (-2)^4 - 4(-2)^3 - (-2)^2 + 16(-2) - 12 = 16 + 32 - 4 - 32 - 12 = 0$$

Zatem  $x_0 = -2$  jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik  $x + 2$ .

2. Sprawdzamy czy dzielnik  $x_0 = -1$  jest zerem tego wielomianu

$$p_4(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 - (-1)^2 + 16(-1) - 12 = 1 + 4 - 1 - 16 - 12 = -32 \neq 0.$$

Zatem  $x_0 = -1$  nie jest zerem tego wielomianu.

3. Sprawdzamy czy dzielnik  $x_0 = 1$  jest zerem tego wielomianu

$$p_4(1) = (1)^4 - 4(1)^3 - (1)^2 + 16(1) - 12 = 1 - 4 - 1 + 16 - 12 = 0$$

Zatem  $x_0 = 1$  jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik  $x - 1$ .

4. Sprawdzamy czy dzielnik  $x_0 = 2$  jest zerem tego wielomianu

$$p_4(2) = (2)^4 - 4(2)^3 - (2)^2 + 16(2) - 12 = 16 - 32 - 4 + 32 - 12 = 0$$

Zatem  $x_0 = 2$  jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik  $x - 2$ .

5. Sprawdzamy czy dzielnik  $x_0 = 3$  jest zerem tego wielomianu

$$p_4(3) = (3)^4 - 4(3)^3 - (3)^2 + 16(3) - 12 = 81 - 108 - 9 + 48 - 12 = 0$$

Zatem  $x_0 = 3$  jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik  $x - 3$ .

Odpowiedź: Rozkład wielomian  $p_4(x)$  na czynniki liniowe

$$p_4(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = (x + 2)(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

**Zadanie 1.15** Rozłóż na czynniki następujące wielomiany:

1. Trójmian kwadratowy

$$p_2(x) = 2x^2 + 6x + 4$$

2. Wielomian

$$p_3(x) = (x^3 - 8) + (x^2 - 4)$$

3. Wielomian

$$p_4(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 6$$

### 1.4.7 Nierówności wielomianowe

W tematach funkcje liniowe i kwadratowe opisane zostały sposoby rozwiązywania nierówności liniowych i kwadratowych. Teraz zajmijmy się rozwiązywaniem nierówności wyższych stopni  $n \geq 3$ .

Rozpatrzmy następującą nierówność:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \geq 0 \quad n \geq 1, \quad a_n \neq 0.$$

Rozwiązując powyższą nierówność wykonujemy następujące czynności:

1. Rozkładamy ten wielomian na czynniki

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_k)q_{n-k}(x), \quad a_n \neq 0.$$

W powyższym rozkładzie dopuszczamy  $k$  pierwiastków rzeczywistych włączając pierwiastki wielokrotne,  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Zauważmy, że jeżeli  $k = n$  to wielomian  $p_n(x)$  rozkłada się na czynniki liniowe i ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Tutaj  $q_{n-k}(x)$  jest wielomianem stopnia  $n - k$  nie rozkładalnym na czynniki liniowe. To znaczy, że wielomian  $q_{n-k}(x)$  zawiera tylko czynniki kwadratowe postaci  $x^2 + bx + c$  z wyróżnikiem  $\Delta = b^2 - 4c < 0$  ujemnym.

2. Zauważamy, że nierówność

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_k)q_{n-k}(x) \geq 0, \quad a_n \neq 0.$$

jest równoważna z nierównością

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_k)q_{n-k}(x) \geq 0, \quad \text{gdy } a_n > 0,$$

lub z równoważna z nierównością

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_k)q_{n-k}(x) \leq 0, \quad \text{gdy } a_n < 0.$$

Ponieważ obie strony nierówności zawsze możemy podzielić przez liczbę  $a_n \neq 0$  różną od zera zachowując kierunek nierówności gdy liczba  $a_n > 0$  jest dodatnia i zmieniając zwrot nierówności gdy liczba  $a_n < 0$  jest ujemna.

3. Rozwiązanie odczytujemy z wykresu funkcji

- Przypadek  $a_n > 0$  i wszystkie zera wielomianu  $x_1, x_2, \dots, x_k$  są różne  $x_i \neq x_j$  dla  $i \neq j$ .

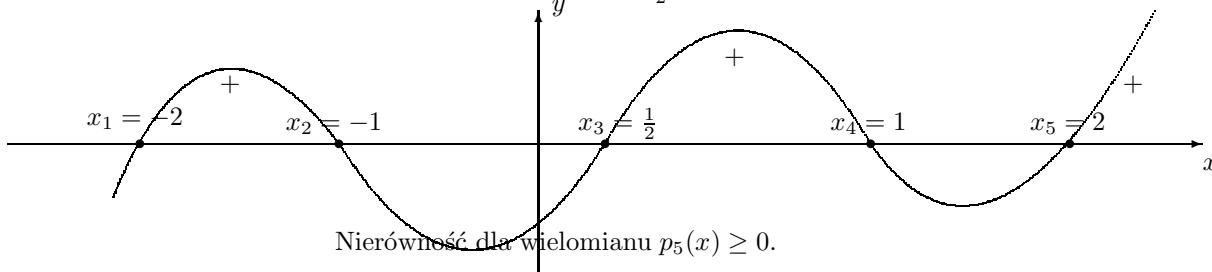
Na rysunku przykład nierówności dla wielomianu

$$p_5(x) = 2x^5 - x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 8x - 4 \geq 0, \quad a_5 = 2 > 0.$$

Rozkładamy ten wielomian na czynniki

$$p_5(x) = (x + 2)(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)(x - 2) \geq 0$$

Odczytujemy zera  $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = 1, x_5 = 2$



Z rysunku odczytujemy rozwiązanie, to znaczy te przedziały w których wielomian jest nieujemny:

Zatem, nierówność ta jest prawdziwa dla  $x \in [-2, -1] \cup [\frac{1}{2}, 1] \cup [2, \infty]$

- Przypadek  $a_n < 0$  i wszystkie zera wielomianu  $x_1, x_2, \dots, x_k$  są różne  $x_i \neq x_j$  dla  $i \neq j$ .

Na rysunku przykład nierówności dla wielomianu

$$p_5(x) = -2x^5 + x^4 + 10x^3 - 5x^2 - 8x + 4 \geq 0, \quad a_5 = -2 < 0.$$

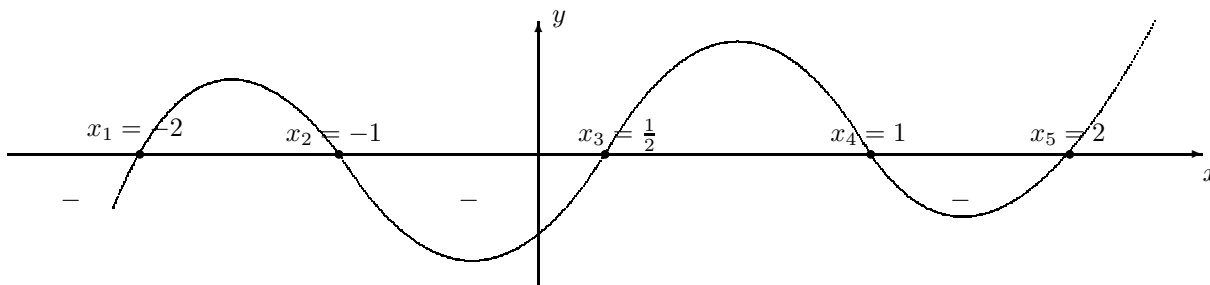
Rozkładamy ten wielomian na czynniki

$$p_5(x) = -2(x+2)(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-2) \geq 0$$

Dzieląc obie strony tej nierówności przez  $-2$ , otrzymamy nierówność przeciwną równoważną

$$p_5(x) = (x+2)(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-2) \leq 0$$

Odczytujemy zera  $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = 1, x_5 = 2$  i zaznaczmy te zera na niżej podanym rysunku



Nierówność dla wielomianu  $p_5(x) \leq 0$ .

Z rysunku odczytujemy rozwiązanie to znaczy te przedziały w których wielomian jest niedodatni:

Zatem nierówność ta jest prawdziwa dla  $x \in [-\infty, -2] \cup [-1, \frac{1}{2}] \cup [1, 2]$ .

- Przypadek gdy wielomian ma wielokrotne zera. Wtedy wykres wielomianu nie przecina osi  $x$ , jeżeli krotność jest parzysta  $2, 4, 6, \dots$ ;

Natomiast, jeżeli krotność jest nie parzysta to wykres wielomianu przecina oś  $x$ .

Przypadek wielokrotnych zer wyjaśnimy na następującym przykładzie:

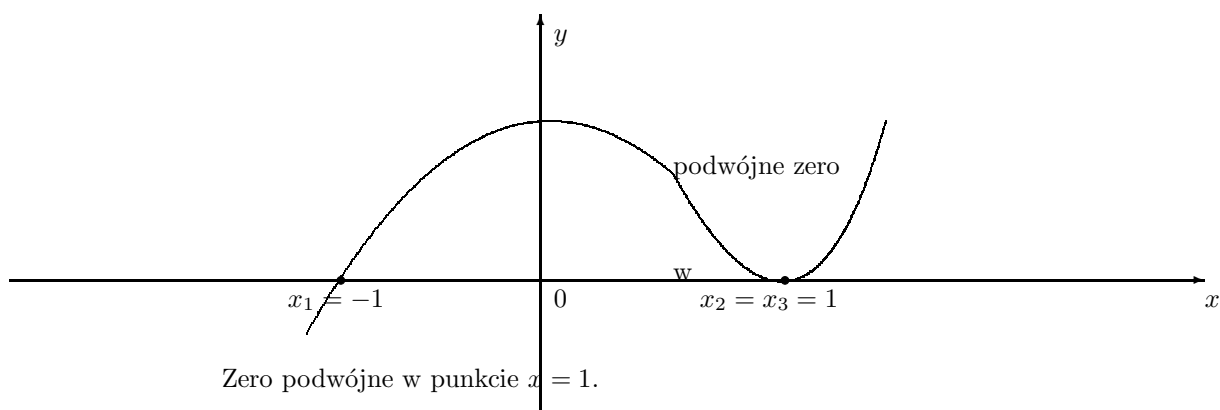
Rozwiąż nierówność:

$$p_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \geq 0$$

Rozkładamy ten wielomian na czynniki

$$p_3(x) = (x-1)(x+1)^2 \geq 0$$

Następnie odczytujemy zera  $x_1 = -1$ , oraz podwójne zero  $x_2 = 1$ . Zaznaczmy te zera na rysunku



Zero podwójne w punkcie  $x = 1$ .

Nierówność dla wielomianu  $p_3(x) \geq 0$ .

Z rysunku odczytujemy rozwiązanie to znaczy te przedziały w których wielomian jest nieujemny:

Zatem nierówność ta jest prawdziwa dla  $x \in [-1, \infty]$