

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS  
02-892 WARSZAWA  
ul. BAŻANCIA 16  
**WYRAŻENIA ARYTMETYCZNE I ALGEBRAICZNE**<sup>1</sup>

**Tadeusz STYŠ**

**Przykład 0.1** *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości  $b = 1$*

$$\frac{\frac{2}{b} * \frac{3}{b} - \frac{2}{b} * \frac{3}{b}}{\frac{1}{3} * \frac{1}{5} + \frac{1}{7} * \frac{1}{3}}$$

Rozwiązanie. Podstawiamy  $b = 1$

$$\frac{\frac{2}{1} * \frac{3}{1} - \frac{2}{1} * \frac{3}{1}}{\frac{1}{3} * \frac{1}{5} + \frac{1}{7} * \frac{1}{3}} = \frac{0}{105} = 0$$

**WARSZAWA 2020**

---

<sup>1</sup>Rozdział 3. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.



# Contents

<b>1</b>	<b>Wyrażenia arytmetyczne i algebraiczne</b>	<b>5</b>
1.1	Wyrażenia arytmetyczne proste i z nawiasami . . . . .	6
1.1.1	Ćwiczenia . . . . .	6
1.2	Wyrażenia algebraiczne . . . . .	8
1.2.1	Ćwiczenia . . . . .	8
1.3	Wyrażenie algebraiczne liniowe . . . . .	9
1.3.1	Zdania . . . . .	9
1.4	Równanie liniowe . . . . .	9
1.4.1	Ćwiczenia . . . . .	11
1.5	Nierówności . . . . .	12
1.5.1	Ćwiczenia . . . . .	13
1.6	Ułamki dziesiętne . . . . .	14
1.6.1	Ćwiczenia . . . . .	16
1.7	Procenty i promile . . . . .	16
1.7.1	Ćwiczenia . . . . .	16
1.8	Promile . . . . .	17
1.8.1	Ćwiczenia . . . . .	18
1.9	Procent składany . . . . .	19
1.10	Wartość bezwzględna . . . . .	20
1.10.1	Zadania . . . . .	23
1.11	Ciąg arytmetyczne i szereg arytmetyczny. . . . .	23
1.11.1	Zadania . . . . .	25
1.11.2	Ciągi geometryczne i postępy geometryczne. . . . .	26
1.11.3	Zadania . . . . .	27



## Chapter 1

# Wyrażenia arytmetyczne i algebraiczne

Zacznijmy od sformułowania pojęć wyrażenia arytmetycznego i algebraicznego.

**Definition 1.1** *Wyrażeniem arytmetycznym nazywamy ciąg liczb połączonych czterema operacjami arytmetycznymi dodawania, odejmowania mnożenia i dzielenia przez liczby różne od zera.*

Na przykład, wyrażenie

$$\frac{3 * 4 + 6 : 2 - 2 * 3}{2^3 + 3^2 - 8 : 2}$$

jest wyrażeniem arytmetycznym składającym się z ciągu liczb

3, 4, 6, 2, 2, 3, *licznik*, 2, 3, 3, 2, 8, 2, *mianownik*

połączonych operacjami

\*, +, :, -, \*, /, ' +, ' -, :

Podobnie definiujemy wyrażenia algebraiczne. Mianowicie

**Definition 1.2** *Wyrażeniem algebraicznym nazywamy ciąg liczb lub liter połączonych czterema operacjami arytmetycznymi dodawania, odejmowania mnożenia i dzielenia przez liczby lub litery, których wartości są różne od zera.*

Na przykład

$$\frac{a * 4 + x : 2 - 2 * 3}{x^3 + 3^2 - b : 2}$$

jest wyrażeniem algebraicznym składającym się z ciągu liczb i liter

a, 4, x, 2, 2, 3, x, 3, 3, 3, 2, b, 2

połączonych operacjami

\*, +, :, -, \*, /, ' +, ' -, :

które dla wartości  $a = 3$ ,  $x = 6$ ,  $b = 8$  staje się wyrażeniem arytmetycznym. Obliczając wartość wyrażenia arytmetycznego należy zachować kolejność wykonywania operacji arytmetycznych.

*Najpierw wykonujemy operacje mnożenia i dzielenia, w następnej kolejności wykonujemy operacje dodawania i odejmowania.*

Kolejność wykonywania operacji arytmetycznych mogą zmienić nawiasy, jeżeli w wyrażeniu nawiasy występują.

W szkołach i na uniwersytetach, w zakresie przedmiotów ścisłych, wiele wzorów mają postać wyrażeń algebraicznych.

W szkołach podstawowych już od pierwszej klasy uczymy obliczania wartości najprostrzych wyrażeń arytmetycznych.

Zatem, wyrażenia arytmetyczne lub algebraiczne są ważną częścią programów nauczania matematyki. Im wcześniej uczniowie osiągną sprawność rachunkową obliczania wartości tych wyrażeń tym lepiej. Oczywiście. sprawność obliczania wartości wyrażeń arytmetycznych lub algebraicznych można osiągnąć przez ćwiczenia rozwiązując odpowiednią ilość zadań.

## 1.1 Wyrażenia arytmetyczne proste i z nawiasami

Zacznijmy ćwiczenia obliczania wartości wyrażeń arytmetycznych od prostych zadań.

### 1.1.1 Ćwiczenia

**Zadanie 1.1** *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$(a) \quad 12 + 14 + 24 = \dots\dots\dots$$

$$(b) \quad 50 - 24 - 8 = \dots\dots\dots$$

**Zadanie 1.2** *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność działań*

$$(a) \quad 18 - 16 + 2 * 8 = \dots\dots\dots$$

$$(b) \quad 5 * 6 + 24 : 3 = \dots\dots\dots$$

**Zadanie 1.3** Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami

$$(a) \quad 3 * (4 + 6) - 2 * (3 + 5) = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(b) \quad (50 - 40) * 2 - (10 + 6) : 2 = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

**Zadanie 1.4** Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$5^2 * 2^3 + 3^2 * 2^3 - 4^2 * 5^2$$

**Zadanie 1.5** Oblicz wartość wyrażenia artmetycznego

$$\frac{3^3 * 2^3 - 3^2 * 2^2}{3 * 2^3 + 2 * 3}$$

Odp:6

**Zadanie 1.6** Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\frac{\frac{2}{5} * \frac{3}{5} - \frac{2}{9} * \frac{3}{8}}{\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3}}$$

**Zadanie 1.7** Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\frac{\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5}}{\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3}}$$

**Zadanie 1.8** Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami

$$\frac{(\frac{1}{3} - \frac{1}{2})(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})}{(\frac{2}{3} + \frac{3}{4})(\frac{4}{3} + \frac{5}{4})}$$

**Zadanie 1.9** Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami

$$\frac{(\frac{2}{5} * \frac{3}{5} - \frac{2}{9} * \frac{3}{8})(\frac{3}{5} * \frac{3}{5} - \frac{1}{5} * \frac{3}{5})}{(\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3})(\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3})}$$

**Zadanie 1.10** Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami

$$\frac{(\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5})(\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5})}{(\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3})(\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3})}$$

## 1.2 Wyrażenia algebraiczne

Przypominamy, że oprócz wyrażeń arytmetycznych, mamy wyrażenia algebraiczne. W wyrażeniach algebraicznych dopuszczamy litery, symbole o zmiennej wartości. Zatem, wyrażeniem algebraicznym nazywamy ciąg liczb i liter połączonych operacjami arytmetycznymi dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia.

**Przykład 1.1** *Uprość wyrażenie*

$$\frac{a^2 - a}{a - 1} - (a + 1), \quad a > 1.$$

**Rozwiązanie.** Wykonując działania arytmetyczne, obliczmy

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - a}{a - 1} - (a + 1) &= \frac{(a^2 - a) - (a - 1)(a + 1)}{a - 1} \\ &= \frac{(a^2 - a) - [a(a + 1) - 1(a + 1)]}{a - 1} \\ &= \frac{a^2 - a - [a^2 + a - a - 1]}{a - 1} \\ &= \frac{a^2 - a - a^2 + 1}{a - 1} \\ &= \frac{1 - a}{a - 1} = -\frac{1 - a}{1 - a} = -1. \end{aligned}$$

### 1.2.1 Ćwiczenia

**Zadanie 1.11** *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości  $a = 2$*

$$\frac{\frac{a}{3} - \frac{a}{2}}{\frac{a}{3} + \frac{a}{4}}$$

**Zadanie 1.12** *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości  $b = 1$*

$$\frac{\frac{2}{b} * \frac{3}{b} - \frac{2}{b} * \frac{3}{b}}{\frac{b}{3} * \frac{b}{5} + \frac{b}{7} * \frac{b}{3}}$$

**Zadanie 1.13** *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości  $c = 3$*

$$\frac{\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{3} * \frac{3}{c}}{\frac{c}{3} * \frac{1}{c} + \frac{3}{c} * \frac{c}{3}}$$

**Zadanie 1.14** *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla  $a = 2$*

$$\frac{(\frac{a}{3} - \frac{a}{2})(\frac{2}{3} - \frac{a}{2})}{(\frac{2}{3} + \frac{a}{4})(\frac{4}{a} + \frac{a}{4})}$$



**Zadanie 1.15** Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla  $b = 3$

$$\frac{\left(\frac{b}{5} * \frac{3}{b} - \frac{b}{9} * \frac{3}{b}\right)\left(\frac{3}{b} * \frac{3}{b} - \frac{1}{b} * \frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{b}{3} * \frac{2}{b} + \frac{3}{7} * \frac{b}{3}\right)\left(\frac{b}{3} * \frac{b}{5} + \frac{b}{7} * \frac{b}{3}\right)}$$

**Zadanie 1.16** Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla  $c = 1$

$$\frac{\left(\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{2} * \frac{c}{5}\right)\left(\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{2} * \frac{c}{5}\right)}{\left(\frac{c}{3} * \frac{c}{4} + \frac{c}{4} * \frac{c}{3}\right)\left(\frac{c}{3} * \frac{c}{4} + \frac{c}{4} * \frac{c}{3}\right)}$$

### 1.3 Wyrażenie algebraiczne liniowe

Wyrażenie algebraiczne

$$a * x + b$$

nazywamy liniowym ze względu na zmienną  $x$ , gdzie współczynniki wyrażenia liniowego  $a$  i  $b$  mają ustaloną wartość.

Na przykład

$$2 * x + 1, \quad \text{gdzie współczynniki} \quad a = 2, \quad b = 1$$

$$-5 * x + 4, \quad \text{gdzie współczynniki} \quad a = -5, \quad b = 4$$

#### 1.3.1 Zdania

**Zadanie 1.17** Napisz wyrażenie algebraiczne liniowe o współczynnikach

$$(i) \quad a = 5, \quad b = -25$$

$$(ii) \quad a = \frac{3}{5}, \quad b = \frac{2}{9}$$

$$(iii) \quad a = -\frac{13}{15}, \quad b = -\frac{15}{29}$$

### 1.4 Równanie liniowe

Równanie w postaci

$$a * x + b = 0$$

lub każde inne równanie, które można sprowadzić do tej postaci nazywamy równaniem liniowym ze względu na niewiadomą  $x$ . Współczynniki  $a$  i  $b$  tego równania mają wartość ustaloną.

Rozwiązaniem równania liniowego z niewiadomą  $x$  jest każda liczba, która podstawiona w miejsce  $x$ , spełnia to równanie.

Rozwiązanie równania liniowego otrzymujemy postępując według schematu:

- przenosimy liczby na prawą stronę zmieniając ich znak na przeciwny,
- niewiadomą  $x$  zostawiamy na lewej stronie
- dzielimy lub mnożymy przez współczynnik  $a \neq 0$ , żeby otrzymać współczynnik 1 przy zmiennej  $x$ .

Przykłady równań liniowych z rozwiązaniami.

$$2 * x - 4 = 0, \quad x = 2, \quad \text{bo} \quad 2 * 2 - 4 = 0, \quad \text{dla} \quad a = 2, \quad b = -4$$

$$-3 * x + 3 = 0, \quad x = 1, \quad \text{bo} \quad -3 * 1 + 3 = 0, \quad \text{dla} \quad a = -3, \quad b = 3$$

**Przykład 1.2** *Rozwiąż równanie liniowe*

$$2x - 1 = 0, \quad a = 2, \quad b = -1.$$

**Rozwiązanie.**

Przenosimy liczbę  $-1$  na prawą stronę, zmieniając znak na przeciwny idzielimy obie strony tego równania przez 2

$$2x = 1 \quad | : 2$$

W ten sposób znajdujemy rozwiązanie

$$x = \frac{1}{2}$$

Podstawiając do równania  $x = \frac{1}{2}$ , sprawdzamy, że otrzymane rozwiązanie spełnia to równanie.

Mianowicie dla  $x = \frac{1}{2}$ , mamy

$$2x - 1 = 2 \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Widzimy, że rozwiązanie  $x = \frac{1}{2}$  spełnia to równanie. Teraz podamy ogólny schemat rozwiązania równania liniowego.

$$a x + b = 0,$$

$$a \neq 0,$$

$$a x = -b,$$

$$x = -\frac{b}{a},$$

### 1.4.1 Ćwiczenia

**Zadanie 1.18** *Rozwiąż równanie*

$$(i) \quad 3x - 12 = 0$$

$$(ii) \quad 5x + 20 = 10$$

$$(iii) \quad \frac{3}{4}x + \frac{5}{8} = 1$$

**Zadanie 1.19** *Mały pastuszek zauważył lecące bociany i krzyknął chyba ich leci 100. Starszy pastuch odpowiedział dużo mniej, gdyby leciało ich dwa razy tyle, i pół tyle, i ćwierć tyle i ty żebyś z nimi poleciał to wtedy byłoby ich razem z tobą 100. Ile bocianów leciało po niebie?*



Obraz Józefa Chełmońskiego (1849-1914). *Bociany*

**Zadanie 1.20** *Franek czytał książkę 25 stron dziennie. Przeczytał całą książkę w ciągu 3 dni.*

*Oblicz ile stron ma ta książka ?*

.....

**Zadanie 1.21** *Marysia kupiła 3 zeszyty po 7 złotych każdy. Kazik kupił piłkę za 10 złotych i zegarek za 35 złotych?*

*Ile zapłaciła Marysia za 3 zeszyty ?*

.....

*Ile zapłacił Kazik za piłkę i za zegarek ?*

.....

*O ile więcej złotych Kazik zapłacił za zakupy od Marysi ?*

.....

*Bolek jest 2 razy starszy od Stefki, która ma 7 lat. Olek ma tyle lat co Bolek i Stefka razem.*

(a) *Ile lat ma Bolek ?*

.....

(b) *Ile lat ma Olek ?*

**Zadanie 1.22** *Na kilku drzewach siedziały wrony. Janek powiedział do Ojca*  
*Tato dużo wron widzę na drzewach, chyba jest ich 100.*  
*Ojciec odpowiedział Jasiu gdyby było 2 razy tyle i połowę tyle to wtedy byłoby*  
*100 wron.*

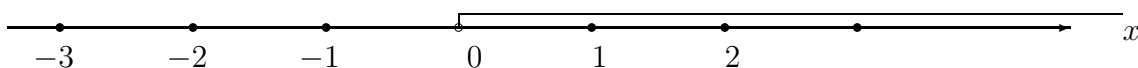
*Ile wron siedziało na drzewach ?*

**Zadanie 1.23** *Uprość wyrażenie algebraiczne*

$$\frac{a^2 - a}{a - 1} - (a + 1), \quad a > 1.$$

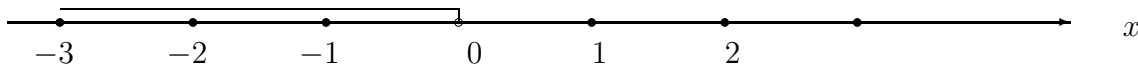
## 1.5 Nierówności

Zaznacz na osi liczbowej te wartości  $x$  które są większe od zera, nierówność  $x > 0$  ostra, zero nie jest włączone.



Nierówność ostra wartości  $x > 0$

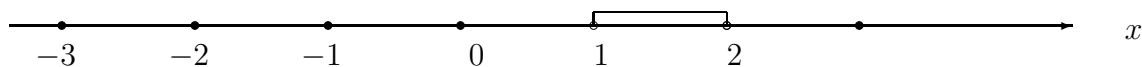
Zaznacz na osi liczbowej te wartości  $x$ , które są mniejsze od zera, nierówność  $x < 0$  ostra, zero nie jest włączone.



Nierówność ostra wartości  $x < 0$

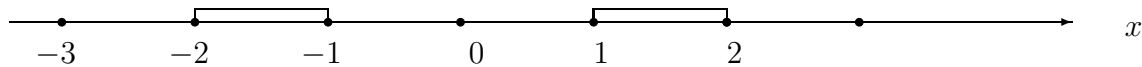
Zaznacz na osi liczbowej te wartości  $x$ , które leżą pomiędzy liczbą 1 i liczbą 2, to znaczy  $1 < x < 2$  nierówność  $1 < x < 2$  ostra,

wartości 1 i 2 nie są włączone.



Nierówność ostra wartości  $1 < x < 2$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości  $x$ , które leżą pomiędzy liczbą -2 i liczbą -1 lub liczbą 1 i liczbą 2, to znaczy  $-2 \leq x \leq -1$  lub  $1 \leq x \leq 2$ , nierówności słabe z włączeniem liczb -2, -1, 1, 2



Nierówność słaba  $-2 \leq x \leq -1$  lub  $1 \leq x \leq 2$

### 1.5.1 Ćwiczenia

**Zadanie 1.24** Rozwiąż nierówność

$$(i) \quad 2x - 1 > 1$$

$$(ii) \quad 4x - 6 \leq 10$$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości  $x$  dla których nierówność jest prawdziwa.

**Przykład 1.1** Rozwiąż nierówność

$$3(x - 1) < 2(x + 1)$$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości  $x$  dla których nierówność jest prawdziwa.

**Rozwiązanie**

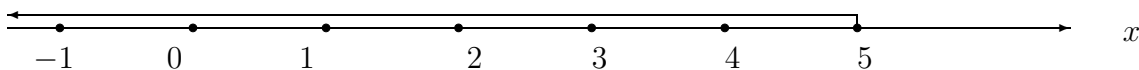
Wykonujemy mnożenia po lewej i po prawej stronie nierówności

$$3x - 3 < 2x + 2$$

Zawsze, przenosimy zmienną  $x$  na lewą stronę nierówności ze znakiem przeciwnym, natomiast liczby przenosimy na prawą stronę nierówności też ze znakiem przeciwnym

$$3x - 2x < 2 + 3, \quad x < 5$$

Na osi liczbowej zaznaczmy rozwiązanie  $x < 5$  nierówności.



Nierówność ostra wartości  $x < 5$

**Zadanie 1.25** Rozwiąż nierówność

$$(i) \quad 3(3x - 1) - 2(2x + 1) < 4(x - 1)$$

$$(ii) \quad 3(x - 2) + 4(x + 2) \leq 2x + 10$$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości  $x$  dla których nierówność jest prawdziwa.

## 1.6 Ułamki dziesiętne

Ułamki zwyczajne o mianownikach 10, 100, 1000 nazywamy ułamekami dziesiętnymi. Ułamki dziesiętne zapisujemy używając przecinka zamiast kreski.

$$\frac{1}{10} = 0,1, \quad \frac{1}{100} = 0,01, \quad \frac{1}{1000} = 0,001.$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{3}{10} &= 0,3, & \frac{5}{100} &= 0,05, \\ \frac{35}{1000} &= 0,035 & \frac{735}{1000} &= 0,735, \\ 2\frac{3}{10} &= 2,3, & 10\frac{12}{100} &= 10,12. \end{aligned}$$

Mamy relacje odwrotne, ułamki dziesiętne zamieniamy na ułamki zwyczajne

$$\begin{aligned} 0,1 &= \frac{1}{10}, & 0,01 &= \frac{1}{100}, \\ 0,001 &= \frac{1}{1000}, & 0,3 &= \frac{3}{10}, \\ 0,05 &= \frac{5}{100}, & 0,035 &= \frac{35}{1000}, \\ 0,735 &= \frac{735}{1000}, & 2,3 &= \frac{3}{10}, \\ 10,12 &= 10\frac{12}{100}. \end{aligned}$$

Każdy ułamek zwyczajny możemy zamienić na ułamek dziesiętny. Pierwszy prosty sposób zamiany ułamka zwyczajnego na dziesiętny polega

na zapisaniu tego ułamka przy mianowniku, 10, 100, 1000, ... Ten sposób jest prosty tylko dla wybranych ułamków.

### Przykład 1.2

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \frac{1 * 5}{2 * 5} = \frac{5}{10} = 0.1 \\ \frac{3}{4} &= \frac{3 * 25}{4 * 25} = \frac{75}{100} = 0.25 \\ \frac{7}{5} &= \frac{7 * 20}{5 * 20} = \frac{140}{100} = 1.4 \\ \frac{15}{250} &= \frac{15 * 4}{250 * 4} = \frac{60}{1000} = 0.06\end{aligned}$$

Drugi sposób zamiany ułamków zwyczajnych na dziesiętne polega na dzieleniu licznika przez mianownik.

**Przykład 1.3** Zamień ułamek  $\frac{1}{4}$  na ułamek dziesiętny.

**Rozwiązanie.** Dzielimy  $1=1,00$  przez 4. Zauważamy, że zera po przecinku nie zmieniają wartości 1

$$\begin{array}{r} 0,25 \\ \text{---} \\ 1,00 : 4 \\ - 0 \\ \text{---} \\ 10 \\ - 8 \\ \text{---} \\ 20 \\ - 20 \\ \text{---} \\ 0 \end{array}$$

Odpowiedź:  $\frac{1}{4} = 0,25$

### 1.6.1 Ćwiczenia

**Zadanie 1.26** Zamień ułamek zwyczajny na dziesiętny

$$(i) \quad \frac{3}{5}$$

$$(ii) \quad \frac{37}{50}$$

$$(iii) \quad \frac{253}{250}$$

**Zadanie 1.27** Zamień ułamek zwyczajny na dziesiętny

$$(i) \quad \frac{2}{15}$$

$$(ii) \quad \frac{23}{45}$$

$$(iii) \quad \frac{37}{150}$$

## 1.7 Procenty i promile

$p\%$  procent to ułamek  $\frac{p}{100}$  o mianowniku 100.

Na przykład

1% jeden procent to ułamek  $\frac{1}{100} = 0.01$  o mianowniku 100.

25% to ułamek  $\frac{25}{100} = 0.25$  o mianowniku 100.

100% to całość  $\frac{100}{100} = 1$ .

Obliczamy  $p\%$  procent z wartości  $a$

$$p\% * a = \frac{p}{100} * a$$

jako ułamek o liczniku  $p$  i o mianowniku 100 z  $a$ .

### 1.7.1 Ćwiczenia

**Przykład 1.4** Oblicz 15% z wartości  $a=60$

$$15\% * 60 = \frac{15}{100} * 60 = \frac{15 * 60}{100} = \frac{15 * 6}{10} = \frac{90}{10} = 9$$



**Przykład 1.5** Oblicz 25% z wartości  $a=3000$

$$25\% * 3000 = \frac{25}{100} * 3000 = \frac{25 * 3000}{100} = \frac{75000}{100} = 750$$

Odwrotnie, mając  $p\% * a$  procent wartości  $a$ , obliczamy wartość  $a$

**Przykład 1.6** 30% procent wartości  $a$  równa się 600. Oblicz wartość  $a$

**Rozwiązanie.**

$$30\% * a = 600, \quad \frac{30}{100} * a = 600, \quad a = \frac{600}{\frac{30}{100}} = \frac{600 * 100}{30} = 2000$$

**Zadanie 1.28** Oblicz 75% z wartości  $a = 2000$

**Zadanie 1.29** Oblicz 15% z wartości  $a = 4000$

Odwrotnie, mając  $p\% * a$  procent wartości  $a$ , oblicz wartość  $a$  podaną niżej w ćwiczeniach

**Zadanie 1.30** 50% procent wartości  $a$  równa się 800. Oblicz wartość  $a$

**Zadanie 1.31** 30% procent wartości  $a$  równa się 5000. Oblicz wartość  $a$

**Zadanie 1.32** Cena metra kwadratowego materiału na zasłony okien kosztowała 50 zł. Najpierw podwyższono cenę o 30% potem obniżono o 10 % za metr kwadratowy. Ile zapłacił klient za 10 m<sup>2</sup> materiału ?

**Zadanie 1.33** Cena materiału razem z 7% VAT kosztowała 107 zł. Podatek VAT materiału wzrósł do 22%. Ile kosztował materiał z całym VAT ?. O ile procent wrosła cena materiału ?

## 1.8 Promile

Promile to ułamki o mianowniku 1000.

$p\%$  promili to ułamek  $\frac{p}{1000}$  o mianowniku 1000.

Na przykład

1% jeden procent to ułamek  $\frac{1}{1000} = 0.001$  o mianowniku 1000.

25%% to ułamek  $\frac{25}{1000} = 0.025$  o mianowniku 1000.

1000%% to całość  $\frac{1000}{1000} = 1$ .

Obliczamy  $p\%$  procent z wartości  $a$

$$p\% * a = \frac{p}{1000} * a$$

jako ułamek o mianowniku 1000 z  $a$ .

### 1.8.1 Ćwiczenia

**Przykład 1.7** Oblicz 15%% z wartości  $a=3000$

$$15\% * 3000 = \frac{15}{1000} * 3000 = \frac{15 * 3000}{1000} = 45$$

**Przykład 1.8** Oblicz 25%% z wartości  $a=3000$

$$25\% * 3000 = \frac{25}{1000} * 3000 = \frac{25 * 3000}{1000} = 75$$

Odwrotnie, mając  $p\% * a$  procent wartości  $a$ , obliczamy wartość  $a$

**Przykład 1.9** 30%% procent wartości  $a$  równa się 600. Oblicz wartość  $a$

**Rozwiązanie.**

$$30\% * a = 600, \quad \frac{30}{1000} * a = 600, \quad a = \frac{600}{\frac{30}{1000}} = \frac{600 * 1000}{30} = 20000$$

**Zadanie 1.34** Oblicz 75%% z wartości  $a = 2000$

**Zadanie 1.35** Oblicz 15%% z wartości  $a = 4000$

Odwrotnie, mając  $p\% * a$  promili wartości  $a$ , oblicz wartość  $a$  podaną niżej w ćwiczeniach

**Zadanie 1.36** 50%% promili wartości  $a$  równa się 800. Oblicz wartość  $a$

**Zadanie 1.37** 30%% promili wartości  $a$  równa się 5000. Oblicz wartość  $a$

## 1.9 Procent składany

Wprowadźmy następujące oznaczenia

- $K_0$  - kapitał początkowy
- $K_n$  - kapitał po  $n$  latach
- $p$  - stopa procentowa w skali roku
- $n$  - ilość lat oszczędności

Po pierwszym roku oszczędzania kapitał  $K_0$  wzrośnie o  $p\%$

$$K_1 = K_0 + K_0 \frac{p}{100} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Po drugim roku oszczędności kapitał  $K_1$  wzrośnie o  $p\%$

$$K_2 = K_1 + K_1 \frac{p}{100} = K_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Ogólnie, stosując zasadę indukcji zupełnej, jeżeli po  $n - 1$  latach oszczędzania kapitał wzrośnie o  $p\%$

$$K_{n-1} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1}$$

to po  $n$  latach oszczędzania

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \frac{p}{100} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na końcowy kapitał po  $n$  latach oszczędzania

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

**Przykład 1.3** Oblicz o ile wzrośnie kapitał 150000 PLN po 10 latach, jeżeli stopa procentowa  $p = 5\%$ .

**Rozwiązanie.** Stosując wzór, obliczamy

$$K_{10} = 150000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10} = 150000 * 1.05^{10} = 150000 * 1.62889 = 244334 \text{ PLN}$$

Odpowiedź: Kapitał 150000 PLN wzrośnie przez 10 lat o 94334 PLN, jeżeli stopa procentowa w stosunku rocznym wynosi  $p = 5\%$ .

**Splata kredytu.** Podobnie obliczamy procent składany od kredytu.

Po pierwszym roku spłacania kapitał  $K_0$  zmaleje o  $p\%$

$$K_1 = K_0 - K_0 \frac{p}{100} = K_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Po drugim roku spłacania kapitał  $K_1$  zmaleje o  $p\%$

$$K_2 = K_1 - K_1 \frac{p}{100} = K_1 \left(1 - \frac{p}{100}\right) = K_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$$

Ogólnie, stosując zasadę indukcji zupełnej, jeżeli po  $n - 1$  latach spłacania kapitał zmaleje do sumy

$$K_{n-1} = K_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{n-1}$$

to po  $n$  latach spłacania kapitał zmaleje do sumy

$$K_n = K_{n-1} - K_{n-1} \frac{p}{100} = K_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na końcowy kapitał po  $n$  latach spłacania kredytu.

$$K_n = K_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

**Przykład 1.4** Oblicz o ile zmaleje kredyt od kapitału 150000 PLN po 10 latach spłacania. i po 150 latach spłacania, jeżeli stopa procentowa  $p = 5\%$ .

**Rozwiązanie.** Stosując wzór, obliczamy

$$K_{10} = 150000 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{10} = 150000 * 0.95^{10} = 150000 * 0.598737 = 89810 \text{ PLN}$$

$$K_{150} = 150000 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{150} = 150000 * 0.95^{150} = 150000 * 0.0004555 = 68.33 \text{ PLN}$$

Odpowiedź: Po 10 latach kredyt zmaleje o 60189.5 PLN. Natomiast po 150 latach kredyt zmaleje o 149931.67 PLN.

**Zadanie 1.38** Oblicz o ile zmaleje kredyt od kapitału 200000 PLN po 10 latach spłacania. i po 180 latach spłacania, jeżeli stopa procentowa  $p = 5\%$ .

## 1.10 Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna liczby to odległość punktu  $x$  od początku układu oznaczonego przez 0. Zatem, wartość bezwzględna liczby  $x$  jest zawsze nieujemna.

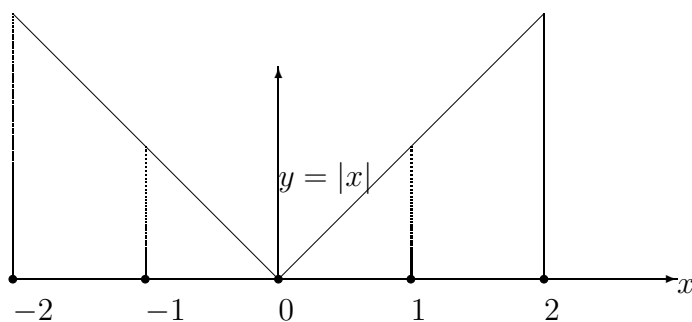
**Definition 1.3** Wartość bezwzględną liczby  $x$  określamy jak następuje:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0, \\ -x & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

Na przykład  $|5| = 5$  bo  $5 > 0$ , również  $|-5| = -(-5) = 5$ , gdy  $x = -5 < 0$ .  
Również wartość bezwzględna liczby  $x$  jest dana wzorem

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Zauważmy, że  $\sqrt{4} = 2$ , nigdy  $-2$ .



Wykres wartości bezwzględnej  $y = |x|$

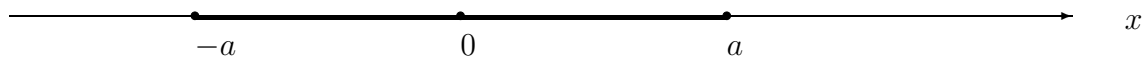
**Odcinek na osi liczbowej.** Z definicji wartości bezwzględnej liczby  $x$ , wynika nierówność

$$|x| \leq a, \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad -a \leq x \leq a, \quad a \geq 0.$$

Rzeczywiście, zauważamy, że

$$|x| \leq a, \quad \text{gdy} \quad x \leq a \quad \text{i} \quad -x \leq a, \quad \text{to znaczy} \quad -a \leq x \leq a.$$

Na osi liczbowej zaznaczmy zbiór liczb  $x$ , które spełniają  $-a \leq x \leq a$



Odcinek na osi liczbowej  $|x| \leq a$ .

Podobnie, odcinek  $[a, b]$  o początku w punkcie  $a$  i końcu w punkcie  $b$ , to jest zbiór punktów  $x$  leżących pomiędzy punktami  $a$  i  $b$  zapisujemy jak następuje:

$$[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$$

Długość odcinka  $[a, b]$ , to jest odległość punktu  $a$  od punktu  $b$ , równa się wartości bezwzględnej różnicy  $|b - a|$ .

**Przykład 1.5** *Rozwiąż równanie*

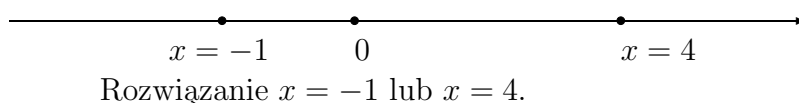
$$|2x - 3| = 5.$$

*Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.*

**Rozwiązanie.** Z definicji wartości bezwzględnej

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 = 5, & \text{gdy } 2x - 3 \geq 0, \quad \text{to } x = 4, \\ -(2x - 3) = 5 & \text{gdy } -2x + 3 \leq 0, \quad \text{to } x = -1, \end{cases}$$

Rozwiązanie  $x = -1$  lub  $x = 4$  podane jest niżej na osi liczbowej.



**Przykład 1.6** *Rozwiąż nierówność*

$$|x - 3| \leq 2.$$

**Rozwiązanie.** Z definicji wartości bezwzględnej nierówność

$$|x - 3| \leq 2.$$

jest równoważna z podwójną nierównością

$$-2 \leq x - 3 \leq 2, \quad \text{lub} \quad 1 \leq x \leq 5.$$

Odpowiedź:  $1 \leq x \leq 5$ .

**Przykład 1.7** *Podaj zbiór punktów, które spełniają nierówność*

$$|x - 1| + |x + 1| \leq 1.$$

*Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej.*

**Rozwiązanie.** Z definicji wartości bezwzględnej znajdujemy

$$1. \text{ dla } x - 1 \leq 0, \quad |x - 1| = -(x - 1) = 1 - x, \quad |x + 1| = -(x + 1) = -1 - x$$

$$|x - 1| + |x + 1| = 1 - x - 1 - x = -2x \leq 1,$$

$$\text{gdy } x \geq -\frac{1}{2},$$

$$2. \text{ dla } -1 \leq x \leq 1, \quad |x - 1| = (x - 1) = x - 1, \quad |x + 1| = -(x + 1) = -1 - x$$

$$|x - 1| + |x + 1| = x - 1 - 1 - x = -2 \leq 1,$$

$$\text{gdy } -1 \leq x \leq 1$$

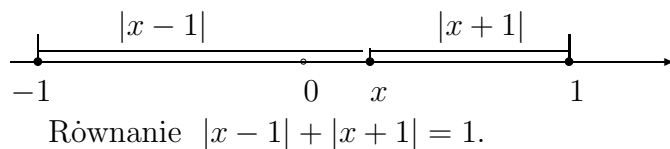
$$3. \text{ dla } x + 1 \geq 0, \quad |x - 1| = x - 1, \quad |x + 1| = x + 1$$

$$|x - 1| + |x + 1| = (x - 1) + (x + 1) = 2x \leq 1,$$

$$\text{gdy } x \leq \frac{1}{2},$$

Odpowiedź: Nierówność jest spełniona dla  $-1 \leq x \leq 1$ . To znaczy dla wszystkich  $x$  takich, że  $|x| \leq 1$ .

Również zauważmy, że odległość punktu  $x \in [-1, 1]$  od punktu  $-1$  plus odległość tego punktu  $x \in [-1, 1]$  od  $1$  równa się  $1$ . Zatem nierówność jest spełniona również dla  $x = -1$  lub  $x = 1$ , wtedy zachodzi znak równości. Zaznaczmy to rozwiązanie na rysunku.



### 1.10.1 Zadania

**Zadanie 1.39** Rozwiąż równanie

$$|3x - 5| = 4.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

**Zadanie 1.40** Rozwiąż równanie

$$|2x - 3| = 5.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

**Zadanie 1.41** Rozwiąż nierówność

$$|x - 5| \leq 2.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

**Zadanie 1.42** Podaj zbiór punktów, które spełniają nierówność

$$|x| + |x - 2| \leq 2.$$

Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej

## 1.11 Ciąg arytmetyczny i szereg arytmetyczny.

Wyrażenia postaci

$$a_0, a_0 + r, a_0 + 2r, a_0 + 3r, \dots, a_0 + n r; \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

nazywamy ciągiem arytmetycznym, gdzie  $a_0 \in R$  jest pierwszym wyrazem ciągu i  $r \in R$  jest różnicą ciągu.

Zatem wyraz ogólny ciągu  $a_n$  można zapisać wzorem

$$a_n = a_0 + n r, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

Różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu wynosi

$$a_{n+1} - a_n = a + (n+1)r - (a + nr) = r, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

Na przykład, ciąg kolejnych liczb naturalnych

$$0, 1, 2, \dots;$$

jest ciągiem arytmetycznym o wyrazie pierwszym  $a_0 = 0$ , różnicy  $r = 1$  i o wyrazie ogólnym  $a_n = n$ .

**Średnia Arytmetyczna.** Zauważmy, że wyraz ciągu arytmetycznego

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

jest średnią arytmetyczną wyrazu poprzedniego i następnego.

Rzeczywiście, obliczamy

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_0 + (n-1)r) + (a_0 + (n+1)r)}{2} = \frac{2a_0 + 2nr}{2} = a_n$$

Również sumy dwóch wyrazów odległych o liczbę  $k$  od  $a_0$  i o liczbę  $k$  od  $a_n$

$$a_0 + a_n = a_k + a_{n-k}$$

są równa dla każdego  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ;

Mianowicie, sprawdzamy, że dla każdego  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , mamy

$$a_k + a_{n-k} = \underbrace{a_0 + kr}_{a_k} + \underbrace{a_0 + (n-k)r}_{a_{n-k}} = a_0 + \underbrace{a_0 + nr}_{a_n} = a_0 + a_n.$$

**Przykład 1.8** Sprawdź czy następujący ciąg jest arytmetyczny

$$(i) \quad a_n = \frac{3n+1}{3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(ii) \quad a_n = 1 + n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, :$$

**Rozwiązanie (i).** Sprawdzamy czy różnica  $r$  kolejnych wyrazów ciągu jest stała, to znaczy jest niezależna od  $n$

$$r = a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+1}{3} - \frac{3n+1}{3} = \frac{3n+1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3n+1}{3} = \frac{1}{3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

Odpowiedź: Ciąg jest arytmetyczny, gdyż różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu jest stała  $r = \frac{1}{3}$  i nie zależy od  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;

**Rozwiązanie (ii).** Sprawdzamy czy różnica kolejnych wyrazów ciągu jest stała, to znaczy niezależny od  $n$

$$r = a_{n+1} - a_n = \underbrace{1 + (n+1)^2}_{a_{n+1}} - \underbrace{(1 + n^2)}_{a_n} = 1 + n^2 + 2n + 1 - (1 + n^2) = 1 + 2n,$$

Odpowiedź: Widzimy, że ciąg (ii) nie jest ciągiem arytmetycznym, gdyż różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu  $r = 2n + 1$  dla  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; zależy od  $n$ .



### 1.11.1 Zadania

**Zadanie 1.43** *Sprawdź czy następujący ciąg jest arytmetyczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{8n+1}{5}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(ii) \quad a_n = 1 + 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, :$$

**Postęp Arytmetyczny.** Postępem arytmetycznym nazywamy sumę wyrazów ciągu arytmetycznego

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

lub

$$a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \dots + (a_0 + nr),$$

W sigma notacji zapisujemy szereg arytmetyczny jako następującą sumę:

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

lub

$$\sum_{k=0}^n (a_0 + kr) = a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \dots + (a_0 + nr).$$

Łatwo wyprowadzić wzór na sumę  $n$  wyrazów ciągu arytmetycznego. Mianowicie, oznaczmy sumę przez

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Napiszmy tą sumę w odwrotnej kolejności dodawania wyrazów

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$$

Dodając stronami, otrzymamy

$$2S_n = (a_0 + a_n) + (a_1 + a_{n-1}) + (a_2 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_1) + (a_n + a_0)$$

Ponieważ, wyrazy postępu arytmetycznego spełniają równość

$$a_0 + a_n = a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2} = \dots = a_n + a_0$$

dlatego, suma wyrazów ciągu arytmetycznego

$$2S_n = (n+1)(a_0 + a_n)$$

lub

$$S_n = \frac{n+1}{2}(2a_0 + nr).$$

**Przykład 1.9** *Oblicz sumę postępu arytmetycznego*

$$1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

**Rozwiązanie.** Zauważmy, że w tym postępie arytmetycznym pierwszy wyraz  $a_0 = 0$  i różnica  $r = 1$ .

Stosując powyższy wzór, znajdujemy sumę

$$S_n = \frac{(n+1)}{2}(2a_0 + nr) = \frac{(n+1)n}{2}.$$

**Zadanie 1.44** Oblicz sumę  $n$  wyrazów postępu arytmetycznego o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{3n+5}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

### 1.11.2 Ciągi geometryczne i postępy geometryczne.

Wyrażenie postaci

$$a_0, a_0q, a_0q^2, a_0q^3, \dots, a_0q^n \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

nazywamy ciągiem geometrycznym, gdzie  $a_0 \in R$  jest pierwszym wyrazem ciągu i  $q \in R$  jest ilorazem ciągu.

Zatem wyraz ogólny ciągu geometrycznego zapisujemy wzorem

$$a_n = a_0q^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

Zakładamy nie trywialny przypadek gdy  $a_0 \neq 0$ ,  $q \neq 0$ .

Iloraz dwóch kolejnymi wyrazów ciągu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

Na przykład, ciąg liczb

$$1, 2, 2^2, 2^3 \dots; 2^n$$

o wyrazie pierwszym  $a_0 = 1$ , ilorazie  $q = 2$  i o wyrazie ogólnym  $a_n = 2^n$  jest ciągiem geometrycznym. Zauważmy, e gdy iloraz  $q = 0$  to cig geometryczny jest o wyrazie oglnym stajm  $a_n = a_0$  dla kadego  $n1, 2, \dots$ ;

**Średnia Geometryczna.** Zauważmy, że wartość bezwzględna wyrazu ciągu geometrycznego jest średnią geometryczną wyrazu poprzedniego i następnego

$$|a_n| = \sqrt{|a_{n-1}a_{n+1}|}$$

Rzeczywiście, obliczamy

$$a_{n-1} * a_{n+1} = a q^{n-1} * a * q^{n+1} = a^2 * q^{2n} = a_n^2.$$

Skąd wynika średnia geometryczna

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} * a_{n+1}}$$

Również iloczyny dwóch wyrazów odległych o liczbę  $k$  od  $a_0$  i liczbę  $k$  od  $a_n$

$$a_0 * a_n = a_k * a_{n-k}$$

są równa dla każdego  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ;

Mianowicie, sprawdzamy, że dla każdego  $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$a_k * a_{n-k} = \underbrace{a_0 * q^k}_{a_k} * \underbrace{a_0 * q^{n-k}}_{a_{n-k}} = \underbrace{a_0(a_0 q^n)}_{a_0(a_0 q^n)} = a_0 * a_n.$$

**Przykład 1.10** *Sprawdź czy następujący ciąg o danym wyrazie ogólnym jest geometryczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{3^n}{2^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(ii) \quad a_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots, :$$

**Rozwiązanie (i).** Sprawdzamy czy iloraz  $q$  kolejnych wyrazów ciągu jest stały, to znaczy jest niezależny od  $n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}\right) : \left(\frac{3^n}{2^n}\right) = \frac{3^{n+1} * 2^n}{2^{n+1} * 3^n} = \frac{3}{2} = q, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

Odpowiedź: Ciąg jest geometryczny, gdyż iloraz kolejnych wyrazów ciągu jest stały i nie zależy od  $n$ ,  $q = \frac{3}{2}$  dla  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;

**Rozwiązanie (ii).** Sprawdzamy czy iloraz  $q$  kolejnych wyrazów ciągu jest stały, to znaczy jest niezależny od  $n$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

Odpowiedź: Ciąg nie jest geometryczny, gdyż iloraz kolejnych wyrazów ciągu  $q = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$  dla  $n = 1, 2, \dots$ ; zależy od  $n$ .

### 1.11.3 Zadania

**Zadanie 1.45** *Sprawdź czy następujący ciąg jest geometryczny.*

$$(i) \quad \frac{(\sqrt{2})^n}{5^n}, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(ii) \quad \sqrt{n}, \dots \quad n = 1, 2, \dots;$$

**Zadanie 1.46** *Podaj pierwszy wyraz,  $n$ -ty wyraz i oblicz iloraz ciągu geometrycznego*

$$(i) \quad \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3^2}{5}, \frac{3^3}{5}.$$

$$(ii) \quad \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots :$$

