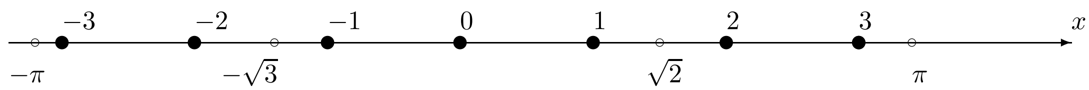
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

$$\sqrt{x^2} = |x|, \; dlatego \;\; \sqrt{4} = 2, \;\; nigdy \;\; -2$$



Oś liczbowa. Liczby rzeczywiste

LICZBY WYMIERNE I RZECZYWISTE[1]

Tadeusz STYŠ

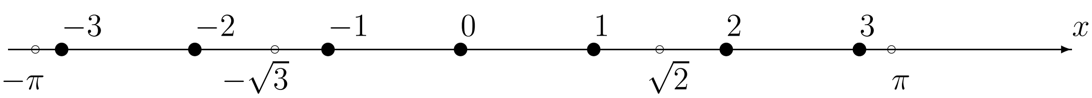
Warszawa 2020

[1]Rozdział 2. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.

Chapter 1

Liczby wymierne i liczby rzeczywiste

$$\sqrt{x^2} = |x|, \ \textit{dlatego} \ \sqrt{4} = 2, \ \ \textit{nigdy} \ \ -2$$



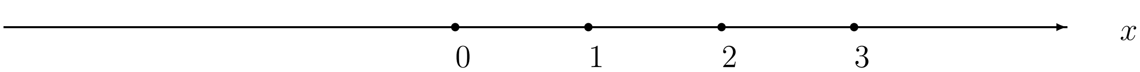
Oś liczbowa. Liczby rzeczywiste

1.1 O liczbach naturalnych i całkowitych

Zacznijmy od przypomnienia własności zbioru liczb naturalnych i liczb całkowitych. Niżej podajemy graficzny obraz tych zbiorów na osi liczbowej.
Zbiór liczb naturalnych

$$N = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

zaznaczamy na osi liczbowej



Oś liczbowa, Liczby naturalne

Przypominamy, że w zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie. To znaczy, że suma dwóch liczb natualnych

$$m + n = s, \ \ m, n \in N, \ \ \text{to} \ \ \ s \in N$$

jest liczbą naturalną
Na przyklad

$$3 + 5 = 8, \quad 3, 5 \in N, \ \ 8 \in N$$

Podobnie iloczyn dwóch liczb naturalnych

$$m * n = s, \ \ m, n \in N, \ \ \text{to} \ \ \ s \in N$$

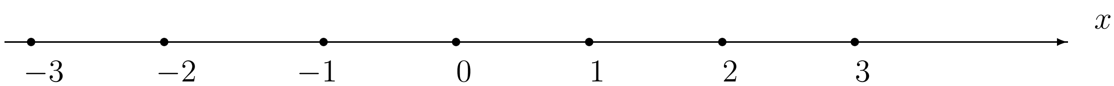
jest liczbą naturalną
Na przyklad

$$3 * 5 = 15, \quad 3, 5 \in N, \;\; 15 \in N$$

Dołanczając wszystkie liczby ujemne przeciwne do liczba naturalnych otrzymamy zbiór liczb całkowitych Zbiór liczb całkowitych

$$C = \{..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

zaznaczamy na osi liczbowej



Oś liczbowa. Liczby całkowite

Zbiór liczb całkowitych jest zamknięty ze względu na dodawanie, odejmowanie i mnożenie. To znaczy, że suma dwóch liczb całkowitych

$$m + n = s, \;\; m, n \in C, \;\; \text{to} \;\; s \in C$$

jest liczbą naturalną
Na przyklad

$$-10 + (-5) = -10 - 5 = -15, \quad -10, -5 \in N, \;\; -15 \in N$$

Podobnie różnica dwóch liczb całkowitych

$$n - m = s, \;\; n, m \in C, \;\; \text{to} \;\; s \in C$$

jest liczbą całkowitą
Na przyklad

$$-12 - (-5) = -12 + 5 = -7, \quad -12, -5 \in C, \;\; -7 \in C$$

Również iloczyn dwóch liczb całkowitych

$$m * n = s, \;\; m, n \in C, \;\; \text{to} \;\; s \in C$$

jest liczbą całkowitą
Na przyklad

$$-10 * (-5) = 50, \quad -10, -5 \in C, \;\; 50 \in C$$

Natomiast, iloraz dwóch liczb całkowitych nie musi być liczbą całkowitą
Na przykład

$$\frac{3}{5}$$

jest ułamkiem, a nie jest liczbą całkowitą.
Niżej określamy liczby wymierne jako zbiór wszystkich możliwych ułamków.

1.2 Ułamki zwykłe

Licznik i mianownik ułamka zwykłego

$$\frac{\overbrace{5}^{licznik}}{\underbrace{8}_{mianownik}}$$

Ułamki zwykłe

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{9}$$

W tych ułamkach liczniki są te same równe 1. Natomiast mianowniki tych ułamków są kolejnymi liczbami $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
Niżej podane ułamki mają różne liczniki i różne mianowniki.

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{8},\ \frac{9}{10},\ \frac{3}{11},\ \frac{5}{12},\ \frac{7}{15}$$

1.3 Dodawanie ułamków. Przykłady

Dodawanie ułamków o tych samych mianownikach. W tym przypadku dodajemy liczniki zostawiamy ten sam mianownik.

Przykład 1.1 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1+1+1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+1+1+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Przykład 1.2 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{1+2+3+5}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

Dodawanie ułamków o różnych mianownikach. Żeby dodać ułamki o różnych mianownikach: należy znaleźć wspólny mienownik. Może to być najmniesza wspólna wielokrotna mianowników.

Przykład 1.3 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{20}{6}+\frac{15}{60}+\frac{24}{60}=\frac{20+15+24}{60}=\frac{59}{60}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{3}{5}=\frac{5}{20}+\frac{12}{20}=\frac{5+12}{20}=\frac{17}{20}$$

1.4 Odejmowanie ułamkòw

Odejmowanie ułamkòw o tych samych mianownikach. Odejmujemy ułamki o tych samych mianownikach tak: odejmujemy liczniki i zostawiamy ten sam mianownik

Przykład 1.4 *Odejmij ułamki*

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1-1}{2}=0$$
$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{4}{5}-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4-2-1}{5}=\frac{1}{5}$$

Przykład 1.5 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{1+2+4}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{1+2+3+5}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$$

Przykład 1.6 *Odejmij ułamki*

$$\frac{7}{9}-\frac{1}{9}=\frac{7-1}{9}=\frac{6}{9}$$
$$\frac{13}{20}-\frac{5}{20}+\frac{3}{20}=\frac{13-5+3}{20}=\frac{12}{20}$$
$$\frac{37}{50}-\frac{23}{50}=\frac{37-23}{50}=\frac{14}{50}$$

Odejmowanie ułamkò o rȯżnych mianownikach. Odejmując ułamki o rȯżnych mianownikach: należy znaleźċ wspólny mienownik. Może to byċ najmniesza wspȯlna wielokrotna mianownikȯw.

Przykład 1.7 *Odejmij ułamki*

$$\frac{5}{9} - \frac{1}{3} = \frac{5 - 3 * 1}{9} = \frac{2}{9}$$
$$\frac{33}{25} - \frac{21}{50} = \frac{2 * 33 - 21}{50} = \frac{45}{50} = \frac{9}{10}$$
$$\frac{14}{15} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{14 - 3 * 2 + 5 * 2}{15} = \frac{14 - 6 + 10}{15} = \frac{18}{15}$$
$$\frac{253}{500} - \frac{126}{1000} = \frac{2 * 253 - 126}{1000} = \frac{506 - 126}{1000} = \frac{380}{1000}$$

1.5 Mnożenie ułamków

Operacja mnożenia ułamków jest bardzo prosta. Ułamek $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ mnożymy przez ułamek $\frac{s}{t}$, $s \neq 0$ według schematu: licznik razy licznik, mianownik razy mianownik

$$\frac{p}{q} * \frac{s}{t} = \frac{p * s}{q * t}, \quad q \neq 0, \ \ t \neq 0$$

Przykład 1.8 *Pomnóż ułamki*

$$(a) \quad \frac{2}{3} * \frac{4}{5} = \frac{2 * 4}{3 * 5} = \frac{8}{15}$$
$$(b) \quad \frac{10}{13} * \frac{21}{25} = \frac{10 * 21}{13 * 25} = \frac{210}{273}$$

1.6 Dzielenie ułamków

Operacja dzielenia ułamków jest bardzo prosta. Ułamek $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ dzielimy przez ułamek $\frac{s}{t}$, $s \neq 0$ według schematu: licznik razy mianownik, mianownik razy licznik

$$\frac{p}{q} : \frac{s}{t} = \frac{p * t}{q * s}, \quad q, s \neq 0, \ \ p, t \neq 0$$

Przykład 1.9 *Podziel ułamki*

$$(a) \quad \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2 * 5}{3 * 4} = \frac{10}{12}$$
$$(b) \quad \frac{10}{13} : \frac{21}{25} = \frac{10 * 25}{13 * 21} = \frac{250}{273}$$

1.7 Zbiór liczb wymiernych

Dołanczając do zbioru liczb całkowitych wszystkie ułamki otrzymamy zbiór liczb wymiernych. Ułamki

$$...-\frac{17}{5},-\frac{7}{2},-\frac{3}{4},-\frac{2}{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{2},\frac{4}{5},\frac{7}{4},\frac{5}{3},,\frac{9}{2},\frac{16}{3},...$$

nie są liczbami całkowitymi. Ogólnie, dla liczb całkowitych p i $q \neq 0$ ułamek

$$\frac{p}{q},$$

nie jest liczbą całkowitą, jeżeli $q \neq 1$. Dla $q = 1$ ułamek jest liczbą całkowitą. Zbiór wszystkich liczb całkowitych razem ze zbiórem wszystkich możliwych ułamków tworzą zbiór liczb wymiernych. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą W i piszemy

$$W = \{\frac{p}{q}: \quad \text{dla calkowitych liczb } p \text{ i } q \neq 0\}$$

Zbiór liczb wymiernych jest zamknięty ze względu na cztery operacje arytmetyczne dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez liczby różne od zera. To znaczy dla dowolnych liczb wymiernych $w_1, w_2 \in W$ wynik czterech operacji jest liczbą wymierną

$$w_1 + w_2 \in W, \quad w_1 - w_2 \in W, \quad w_1 * w_2 \in W, \quad \frac{w_1}{w_2} \in W, \;\; w_2 \neq 0.$$

Na przykład, dla

$$w_1 = -\frac{2}{3} \in W, \; w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

suma

$$w_1 + w_2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2*4+3*3}{12} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12} = \in W$$

jest liczbą wymierną
Dla

$$w_1 = -\frac{1}{2} \in W, \; w_2 = \frac{2}{3} \in W$$

różnica

$$w_1 - w_2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1*3-2*3}{6} = \frac{3-6}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \in W$$

jest liczbą wymierną
Dla

$$w_1 = \frac{2}{3} \in W, \; w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

iloczyn

$$w_1 * w_2 = \frac{2}{3} * \frac{3}{4} = \frac{2*3}{3*4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \in W$$

jest liczbą wymierną
Rȯwnież, dla liczb

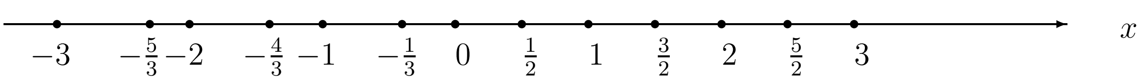
$$w_1 = \frac{2}{3} \in W,\ w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

iloraz

$$w_1 : w_2 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2 * 4}{3 * 3} = \frac{8}{9} \in W$$

jest liczbą wymierną
Zauważmy, że zbiór liczb wymiernych jest wszędzie gęsty. To znaczy pomiędzy dwoma różnymi liczbami wymiernymi w_1, w_2 istnieje "dużo" innych liczb wymiernych, na prrzykład ich średnia arytmetyczna $\frac{w_1 + w_2}{2} \in W$.
Ponadto, zbiór liczb wymiernych W jest najmnieszym zbiorem liczbowym zamkniętym ze względu na cztery operacje arytmetyczne. Mianowicie, złóżmy na chwile, że liczba wymierna x nie należy do zbioru W, $(x \notin W)$. Ponieważ każda liczba wymierna ma postać $\frac{p}{q}$ dla pewnych całkowitych p i $q \neq 0$. To znaczy, że nie ma liczb wymiernych poza zbiorem W.

Liczby wymierne są reprezentowane jako punkty na osi liczbowej



Oś liczbowa. Liczby wymierne

1.8 Liczby rzeczywiste

Dotychczas poznaliśmy zbiȯr liczb naturalnych N, zbiȯr liczb całkowitych C i zbiȯr liczb wymiernych W. Wiemy, że w zbiorze liczb naturalnych wykonalne są dwie operacje arytmetyczne, dodawanie i mnożenie, natomiast wynik odejmowania lub dzielenia dwȯch liczb naturalnych może nie byċ liczbą naturalną.
Rozszerzeniem zbioru liczb naturalnych N jest zbiȯr liczb całkowitych C. Zatem wszystkie liczby naturalne są liczbami całkowitymi, piszemy $N \subset C$. W zbiorze liczb całkowitych C wykonalne są trzy operacje arytmetyczne dodawanie odejmowanie i mnożenie, a wynik dzielenia dwȯch liczb całkowitych może nie byċ liczbą całkowitą.
Rozszerzeniem zbioru liczb całkowitych C jest zbiȯr liczb wymiernych W. Zatem wszystkie liczby całkowite są liczbami wymiernymi, piszemy $C \subset W$. W zbiorze liczb wymiernych W wykonalne są wszystkie cztery operacje arytmetyczne dodawanie odejmowanie i mnożenie i dzielenie.
Zauważmy, że w zbiorze liczb wymiernych W nie zawsze jest wykonalna operacja odwrotna do operacji potęgowania.
Na przykład, nie ma liczby wymiernej x, ktȯrej kwadrat rȯwny byłby 2. Inaczej

równanie

$$x^2 = 2$$

nie ma rozwiązania w zbiorze liczb wymiernych.
Istotnie, gdyby istniała liczba wymierna

$$x = \frac{p}{q}, \; q \neq 0,$$

o największym wspólnym dzielniku $NWD(p, q) = 1$ to ta liczba wymierna byłaby rozwiązaniem równania

$$(\frac{p}{q})^2 = 2, \qquad i \;\; p^2 = 2q^2.$$

Wtedy liczba całkowita p byłaby liczbą parzystą, to znaczy $p = 2k$ dla pewnej liczby całkowitej k. W tym przypadku liczba q musiałaby być również liczbą parzystą, to znaczy

$$q = 2s$$

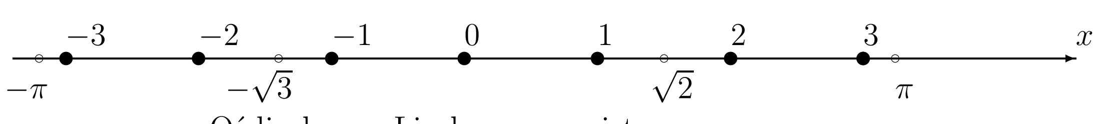
dla pewnego całkowitego s.
W konsekwencji mamy nierówność $NWD(p, q) >= 2$, która przeczy istnieniu liczby wymiernej w postaci nieskracalnego ułamka $\frac{p}{q}$, w którym największy wspólny dzielnik licznika p i mianownika q, $NWD(p, q) = 1$.
Kolejnym rozszerzeniem zbiorów liczb

$$N, \; C, \; W$$

jest zbiór liczb rzeczywistych R w którym operacja odwrotne do potęgowanie jest wykonalna.
Do zbioru liczb rzeczywistych należą wszystkie liczby wymierne i wszystkie liczby niewymierne takie jak

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[5]{7} \;\; \pi, ...;$$

$\sqrt{x^2} = |x|, \; dlatego \;\; \sqrt{4} = 2, \;\; nigdy \;\; -2$



Oś liczbowa. Liczby rzeczywiste

Zbiór liczb rzeczywistych

$$R = \{....... - \pi, -3, -\sqrt{5}, -2, -\sqrt{2} - 1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, \sqrt[3]{9}, 3, \pi ...; \}$$

1.9 Zadania

Zadanie 1.1 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$20\frac{(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})}{(2-\frac{1}{3})(1+\frac{2}{3})}$$

Zadanie 1.2 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$5[(\frac{4}{5}+\frac{7}{10})(\frac{1}{5}+\frac{1}{10})+(\frac{4}{5}-\frac{7}{10})(\frac{4}{5}+\frac{7}{10})]$$

Zadanie 1.3 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{1}{2}(\frac{2}{5}+1.5):(\frac{5}{7}-1\frac{2}{3})$$

Zadanie 1.4 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego*

$$36(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})$$

dla $a = 3$ *i* $b = 2$

Zadanie 1.5 *Wykonaj operacje arytmetyczne*

$$a * b, \quad a - b, \quad b : a$$

dla $a = 3 + \sqrt{7}, \quad b = 4 - 2\sqrt{7}$

Zadanie 1.6 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\sqrt{67 - \sqrt[3]{27}}$$

Zadanie 1.7 *Udowodnij, że liczba* $\sqrt{3}$ *jest liczbą niewymierną*

Zadanie 1.8 *Udowodnij, że liczba* $\sqrt[3]{7}$ *jest liczbą niewymierną*

Zadanie 1.9 *Znajdź wartości parametrów* a *i* b *dla których*

$$a\sqrt{b} = \sqrt{50} + \sqrt{128} + \sqrt{162}$$

Zadanie 1.10 *Dla zbiorów*

$$A = \{x : \ -\infty < x < 5\} \quad \text{oraz} \quad B = \{x : \ 2 < x \leq 9\}$$

Zaznacz na osi liczbowej alternatywę $A \smile B$ *i koniukcję* $A \frown B$ *tych zbiorów.*