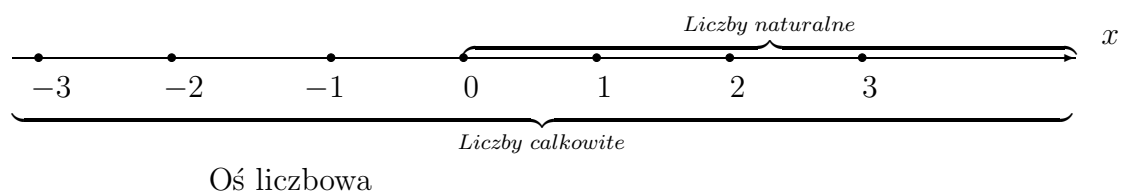


SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16



LICZBY NATURALNE I CAŁKOWITE¹

Tadeusz STYŚ

WARSZAWA 2020

¹Rozdział 1. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.

Chapter 1

Liczby naturalne i całkowite

1.1 Wstęp

Koncepcja liczb naturalnych i proste operacje arytmetyczne były znane już od około 50 tysięcy lat temu. To wiemy na podstawie archeologicznych i historycznych odkryć.

Natomiast pierwszy systematyczny opis arytmetyki liczb naturalnych opracowany został przez starożytnych greków w szkole Jońskiej Talesa, (625-545 p.n.e.), w szkole Pitagorejskiej (569-475 p.n.e.), na uniwersytecie w Aleksandrii przez Euklidesa (330-2675 p.n.e.) i przez Archmedesa z Syrakus (287-212 p.n.e.)

Teoria liczb jest w dalszym ciągu inspirującym przedmiotem licznych prac publikowanych w wiodących pismach poświęconych teorii liczb. W ostatnich kilkudziesięciu latach obserwuje się szerokie zastosowania teorii liczb w projektowaniu systemów komputerowych w kryptografii i ochronie danych oraz w tworzeniu nowych algorytmów dla potrzeb administracji i programów społecznych.

1.2 Liczby naturalne

Zbiór liczb naturalnych dodatnich oznaczmy symbolem

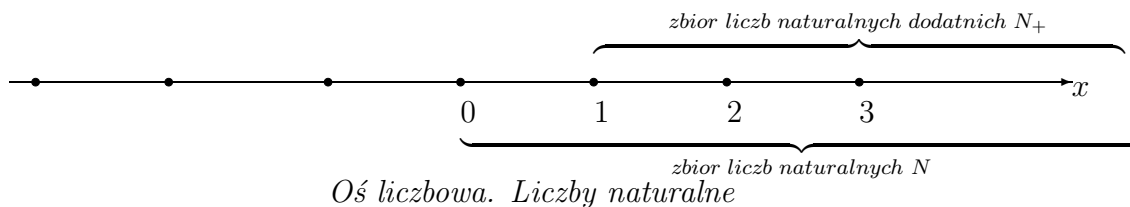
$$N_+ = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \quad (1.1)$$

Umownie do zbioru liczb naturalnych zalicza się zero. Wtedy zbiór liczb naturalnych oznaczamy symbolem

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \quad (1.2)$$

1.2.1 Własności liczb naturalnych

Oczywiste własności zbiorów N_+ i N .



Zbiór liczb naturalnych N_+ zawarty jest w zbiorze liczb naturalnych N , piszemy $N_+ \subset N$.

Suma liczb naturalnych $m + n$ też jest liczbą naturalną. Zatem dla dowolnych liczb naturalnych $m, n \in N$ ich suma

$$m + n \in N$$

należy do zbioru liczb naturalnych.

To znaczy że zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na operacje dodawania.

Na przykład dla $m = 7$, $n = 5$, mamy

$$m + n = 7 + 5 = 12 \in N$$

jest liczbą naturalną.

Operacja dodawania jest przemienne dla dowolnych liczb naturalnych m, n suma

$$m + n = n + m$$

Na przykład $5 + 3 = 3 + 5 = 8 \in N$.

Podobnie zbiór liczb naturalnych jest zamknięty na operacje mnożenia oraz operacja mnożenia jest przemienne

Mianowicie, iloczyn liczb naturalnych $m * n$ jest liczbą naturalną.

Zatem dla dowolnych liczb naturalnych $m, n \in N$ ich iloczyn

$$m * n \in N$$

należy do zbioru liczb naturalnych.

To znaczy że zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na operacje mnożenia.

Na przykład dla $m = 7$, $n = 5$ mamy

$$m * n = 7 * 5 = 35 \in N$$

jest liczbą naturalną. Operacja mnożenia jest przemienne dla dowolnych liczb naturalnych m, n iloczyn

$$m * n = n * m$$

Natomiast, wynik odejmowania liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną.

Na przykład, różnica liczb

$$3 - 5$$

nie jest liczbą naturalną, ale różnica $3 - 5 = -2$ jest liczbą całkowitą. Liczby całkowite omówimy w następnym paragrafie.

1.2.2 Przykłady

Przykład 1.1 *Oblicz sumę kolejnych 10 liczb naturalnych*

$$S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:

Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{rcl} S_{10} & = & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ S_{10} & = & 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline \dots & & \dots \\ 2 * S_{10} & = & \underbrace{11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11}_{10 \text{ składników sumy}} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{10} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{10} = 10 * 11 : 2 = 55$$

Przykład 1.2 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb naturalnych*

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:

Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy równości stronami, jak niżej:

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n \\ S_n & = & n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline \dots & & \dots \\ 2 * S_n & = & \underbrace{(n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) + (n + 1)}_{n \text{ składników sumy}} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_n .

$$S_n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{10}

$$S_{10} = \frac{10 * 11}{2} = 55$$

1.3 Liczby całkowite

Jak wiemy w zbiorze liczb naturalnych operacja odejmowania nie zawsze jest wykonalna.

Na przykład nie ma liczby naturalnej, która byłaby wynikiem odejmowania liczby 9 od liczby 5, gdyż różnica

$$5 - 9$$

nie jest liczą naturalną.

1.3.1 Liczby przeciwne

Liczbami przeciwnymi nazywamy dwie liczby leżące na osi liczbowej w tej samej odległości od zera, ale po przeciwnych stronach zera.

Liczby przeciwne mają tę własność, że ich suma wynosi 0.

Zatem liczba $-m$ jest przeciwna do liczby m wtedy

$$-m + m = 0$$

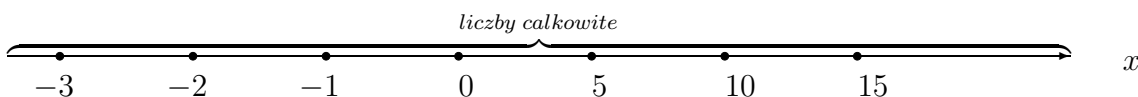
Na przykład

$$\text{dla } m = 7, \text{ liczba przeciwna } -m = -7, \text{ wtedy } -7 + 7 = 0$$

Na osi liczbowej mamy zaznaczone liczby naturalne po prawej stronie zera, a po lewej stronie zera mamy zaznaczone liczby przeciwne do liczb naturalnych.



Niżej na osi liczbowej zaznaczone są liczby całkowite

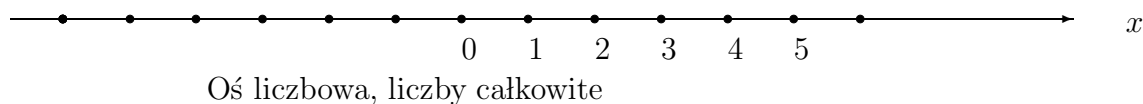


Wszystkie liczby naturalne razem ze wszystkimi liczbami do nich przeciwnymi tworzą zbiór liczb całkowitych

Zbiór liczb całkowitych oznaczamy literą C , piszemy

$$C = \{ \dots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots \}$$

Przykład 1.1 Zaznacz na osi liczbowej liczby przeciwne do wskazanych liczb naturalnych

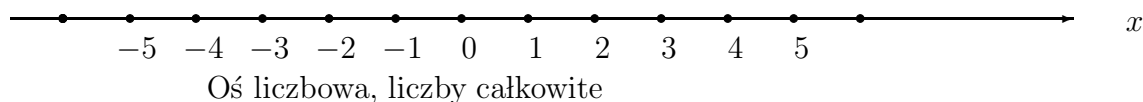


Niżej na osi liczbowej widzimy liczby naturalne

$$0, 1, 2, 3, 4, 5$$

i liczby przeciwne do liczb naturalnych

$$0, -1, -2, -3, -4, -5$$



Odejmując od 0 liczby naturalne znajdujemy liczby całkowite ujemne.

1.3.2 Proste przykłady odejmowania liczb naturalnych

Przykład 1.3 *Sprawdzamy odejmowanie kolejnych liczb całkowitych od zera*

$$\begin{aligned} 0 - 1 &= -1, & 0 - 6 &= -6 \\ 0 - 2 &= -2, & 0 - 7 &= -7 \\ 0 - 3 &= -3, & 0 - 8 &= -8 \\ 0 - 4 &= -4, & 0 - 9 &= -9 \\ 0 - 5 &= -5, & 0 - 10 &= -10 \end{aligned}$$

Przykład 1.4 *Wykonaj sam odejmowanie*

$$\begin{aligned} 0 - 11 &= \quad, & 0 - 16 &= \\ 0 - 12 &= \quad, & 0 - 17 &= \\ 0 - 13 &= \quad, & 0 - 18 &= \\ 0 - 14 &= \quad, & 0 - 19 &= \\ 0 - 15 &= \quad, & 0 - 20 &= \end{aligned}$$

Przykład 1.5 *Sprawdź odejmowanie*

$$5 - 10 = -5, \quad 10 - 16 = -6$$

$$6 - 12 = -6, \quad 11 - 17 = -6$$

$$7 - 13 = -6, \quad 12 - 18 = -6$$

$$8 - 14 = -6, \quad 13 - 19 = -6$$

$$9 - 15 = -6, \quad 14 - 20 = -6$$

Przykład 1.6 *Wykonaj odejmowanie*

$$1 - 10 = \quad, \quad 10 - 20 =$$

$$3 - 12 = \quad, \quad 11 - 21 =$$

$$5 - 14 = \quad, \quad 12 - 22 =$$

$$7 - 15 = \quad, \quad 13 - 23 =$$

$$9 - 16 = \quad, \quad 14 - 24 =$$

1.4 Dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych

Dodanie liczby całkowitej ujemnej do liczby całkowitej dodatniej oznacza różnicę tych liczb.

Przykład 1.7

$$5 + (-4) = 5 - 4 = 1, \quad 9 + (-7) = 9 - 7 = 2,$$

$$5 + (-4) = 5 - 4 = 1, \quad 9 + (-7) = 9 - 7 = 2,$$

$$-15 + 5 = 5 - 15 = -10, \quad -12 + 7 = 7 - 12 = -5,$$

$$-14 + (-4) = -14 - 4 = -18, \quad -21 + (-7) = -21 - 7 = -28$$

Jeżeli mamy minus przed nawiasem, to nawias opuszczamy zmieniając znaki w nawiasie na przeciwne

Przykład 1.2

$$-(-10) = 10, \quad -(1 + 2) = -1 - 2 = -3,$$

$$-(1 - 2) = -1 + 2 = 1, \quad -(-1 - 2) = 1 + 2 = 3,$$

$$-(-(-3)) = (-3) = -3, \quad -(-(1 - 2)) = (1 - 2) = -1$$

Przykład 1.8 Sprawdź wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami

$$-(9 - 10) - (5 - 6) = -9 + 10 - 5 + 6 = 2,$$

$$-(1 + 2) - (7 - 10) = -1 - 2 - 7 + 10 = 0,$$

$$(1 - 2) + (9 - 6) = 1 + 2 + 9 - 6 = 6,$$

$$-(-1 - 2) - (9 - 6) = 1 + 2 - 9 + 6 = 0,$$

$$-(-(2 - 3)) + (-(4 - 5)) = (2 - 3) - (4 - 5) = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0,$$

$$-(-(1 - 2)) - (-(4 - 5)) = (1 - 2) + (4 - 5) = -1 + 2 + 4 - 5 = 0.$$

1.5 Mnożenie liczb całkowitych

Iloczyn liczby całkowitej dodatnie przez liczbę całkowitą dodatnią jest liczbą całkowitą dodatnią

Przykład 1.3

$$8 * 8 = 64, \quad 6 * 7 = 42$$

Iloczyn liczb całkowitych ujemnych jest dodatni

Przykład 1.4

$$(-8) * (-8) = 64, \quad (-6) * (-7) = 42$$

Iloczyn liczby całkowitej ujemnej przez liczbę dodatnią jest liczbą ujemną

Przykład 1.5

$$(-8) * (8) = -64, \quad 6 * (-7) = -42$$

Iloczyn każdej liczby całkowitych przez liczbę 0 jest równy 0

Przykład 1.6

$$(-8) * 0 = 0, \quad 0 * (-7) = 0$$

Przykład 1.7 Sprawdź wartość wyrażenia arytmetycznego

$$(-8) * (-8) + (-2) * 7 = 64 + (-14) = 64 - 14 = 50$$

Zadanie 1.1 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$(-9) * (-9) + (-6) * (-6) =$$

$$20 * (-1) - 14 * (-2) =$$

$$(-3) * 4 - (12 * (-2) - (-5)) =$$

1.6 Dzielenie liczb całkowitych

Wynik dzielenia dwóch dodatnich liczb całkowitych jest liczbą dodatnią

Przykład 1.8

$$8 : 4 = 2, \quad 15 : 3 = 5$$

Wynik dzielenia dwóch ujemnych liczb całkowitych jest liczbą dodatnią

Przykład 1.9

$$(-8) : (-4) = 2, \quad (-15) : (-3) = 5$$

Wynik dzielenia liczby całkowitej ujemnej przez liczbę całkowitą dodatnią jest liczbą ujemną. Podobnie wynik dzielenia liczby całkowitej dodatniej przez liczbę całkowitą ujemną jest ujemną.

Przykład 1.10

$$(-8) : 4 = -2, \quad 8 : (-4) = -5$$

Zadanie 1.2 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$(-8 : 4 + 14 : 7) - (9 : 3 - 6 : 2) =$$

$$(-18) : 3 + 12 : 3 - (15 : (-5) - (16 : 2)) =$$

$$((-24) : 6 + 12 : 3) - (15 : (-5) - (16 : 2)) =$$

1.7 Liczby parzyste, nieparzyste

Zbiór liczb naturalnych składa się z dwóch podzbiorów rozłącznych z podzbioru liczb parzystych i podzbioru liczb nieparzystych.

Liczby parzyste zapisujemy wzorem

$$n = 2k \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

Mamy więc ciąg nieskończony liczb parzystych

$$0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots,$$

Liczby nieparzyste. Podobnie, liczby nieparzyste zapisujemy wzorem

$$n = 2k + 1, \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

Zatem mamy ciąg nieskończony liczb nieparzystych

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots,$$

Zauważamy, że liczby parzyste dzielą się przez 2, natomiast liczby nieparzyste dzielą się przez 2 z resztą 1.

1.7.1 Przykłady

Przykład 1.9 Suma trzech kolejnych liczb parzystych równa jest 84. Znajdź te liczby.

Rozwiązanie:

Kolejne liczby parzyste to

$$2n - 2, \quad 2n, \quad 2n + 2,$$

Ich suma

$$(2n - 2) + 2n + (2n + 2) = 6n = 84$$

Obliczamy n :

$$6n = 84, \quad n = 84 : 6 = 14$$

Obliczmy trzy kolejne liczby parzyste

$$\begin{aligned} 2n - 2 &= 2 * 14 - 2 = 26, \\ 2n &= 2 * 14 = 28, \\ 2n + 2 &= 2 * 14 + 2 = 30 \end{aligned}$$

Sprawdzenie: Obliczamy sumę trzech kolejnych liczb parzystych

$$26 + 28 + 30 = 84.$$

Przykład 1.10 Ile różnych liczb parzystych trzycyfrowych można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

Rozwiązanie:

Liczby parzyste utworzone z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 mają trzy cyfry jedności 2 lub 4 lub 6

Napiszmy wszystkie różne liczby parzyste dwucyfrowe, które mają cyfrę jedności 2 lub 4 lub 6

12	14	16
22	24	26
32	34	36
42	44	46
52	54	56
62	64	66
72	74	76

Niżej podane są wszystkie różne liczby parzyste trzycyfrowe, które mają cyfrę jedności 2

112		212		312		412		512		612		712
122		222		322		422		522		622		722
132		232		332		432		532		632		732
142		242		342		442		542		642		742
152		252		352		452		552		652		752
162		262		362		462		562		662		762
172		172		372		472		572		672		772

Niżej podane są wszystkie różne liczby parzyste trzycyfrowe, które mają cyfrę jedności 4

114		214		314		414		514		614		714
124		224		324		424		524		624		724
134		234		334		434		534		634		734
144		244		344		444		544		644		744
154		254		354		454		554		654		754
164		264		364		464		564		664		764
174		174		374		474		574		674		774

Niżej podane są wszystkie różne liczby parzyste trzycyfrowe, które mają cyfrę jedności 6

116		216		316		416		516		616		716
126		226		326		426		526		626		726
136		236		336		436		536		636		736
146		246		346		446		546		646		746
156		256		356		456		556		656		756
166		266		366		466		566		666		766
176		176		376		476		576		676		776

Teraz liczymy wszystkie liczby parzyste utworzone z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 W tabeli pierwszej z cyfrą jedności 2 jest ich $7 * 7 = 49$

Podobnie, w tabeli drugiej z cyfrą jedności 4 jest ich $7 * 7 = 49$

oraz w tabeli trzeciej z cyfrą jedności 6 jest ich $7 * 7 = 49$

Zatem razem w trzech tabelach jest różnych liczb parzystych

$$7 * 7 * 3 = 49 * 3 = 147$$

Przykład 1.11 Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 51. Znajdź te liczby.

Rozwiązanie:

Kolejne liczby nieparzyste to

$$2n + 1, \quad 2n + 3, \quad 2n + 5.$$

Ich suma

$$(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) = 6n + 9 = 51.$$

Obliczamy n :

$$6n + 9 = 51, \quad 6n = 42, \quad n = 42 : 6 = 7.$$

Obliczmy trzy kolejne liczby nieparzyste

$$2n + 1 = 2 * 7 + 1 = 15,$$

$$2n + 3 = 2 * 7 + 3 = 17,$$

$$2n + 5 = 2 * 7 + 5 = 19.$$

Sprawdzenie: Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych

$$15 + 17 + 19 = 51.$$

Przykład 1.12 Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb parzystych

$$S_{10} = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Rozwiązanie:

Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{rcl} S_{20} & = & 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 \\ S_{20} & = & 20 + 18 + 16 + 14 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 \\ \hline \dots & & \dots \\ 2 * S_{20} & = & \underbrace{22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22}_{10 \text{ składników sumy}} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{20} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{20} = 10 * 22 : 2 = 110 \quad \text{lub} \quad S_{20} = \frac{10 * 22}{2} = 110$$

Przykład 1.13 Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb parzystych

$$S_n = 2 + 4 + \dots + (2n - 2) + 2n$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:

Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{rcl} S_{2n} & = & 2+ \quad 4+ \quad 6+ \quad \dots + \quad 2n - 2+ \quad 2n \\ S_{2n} & = & 2n+ \quad (2n - 2)+ \quad (2n - 4)+ \quad \dots + \quad 4+ \quad 2 \\ \hline \dots & & \dots \\ 2 * S_{2n} & = & (2n + 2)+ \quad (2n + 2)+ \quad (2n + 2)+ \quad \dots + \quad (2n + 2)+ \quad (2n + 2) \end{array}$$

$$\overbrace{\hspace{15em}}^{n \text{ składników sumy}}$$

Skąd obliczymy sumę S_{2n} .

$$S_{2n} = \frac{n(2n+2)}{2} = \frac{2n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{20}

$$S_{20} = \frac{10 * 22}{2} = 10 * 11 = 110$$

Przykład 1.14 Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb nieparzystych

$$S_{19} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Rozwiązanie:

Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy równości stronami, jak niżej:

$$\begin{array}{rcl} S_{19} & = & 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 \\ S_{19} & = & 19 + 17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 \\ \hline \dots & & \dots \\ 2 * S_{19} & = & \underbrace{20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20}_{10 \text{ składników sumy}} \end{array}$$

Skąd obliczymy sumę S_{19} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{19} = 10 * 20 : 2 = 100 \quad \text{lub} \quad S_{19} = \frac{10 * 20}{2} = 100$$

Przykład 1.15 Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb nieparzystych

$$S_n = 1 + 3 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1)$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:

Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{rcl} S_{2n-1} & = & 1 + \quad \quad 3 + \quad \quad 5 + \quad \quad \dots + \quad (2n-3) + \quad (2n-1) \\ S_{2n-1} & = & (2n-1) + \quad (2n-3) + \quad (2n-5) + \quad \dots + \quad 3 + \quad 1 \\ \hline \dots & & \dots \\ 2 * S_{2n-1} & = & \underbrace{2n + \quad \quad 2n + \quad \quad 2n + \quad \quad \dots + \quad 2n + \quad \quad 2n}_{n \text{ składników sumy}} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{2n-1} .

$$S_{2n-1} = \frac{n * 2n}{2} = n * n = n^2$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{19}

$$S_{19} = 10 * 10 = 100$$

Przykład 1.16 Udowodnij, że wyrażenie algebraiczne

$$a^2 + (a + 2)(a + 2) + (a + 4)(a + 4) + 1$$

jest podzielne przez 12 dla każdej liczby nieparzystej a .

Rozwiązanie:

Ponieważ liczba a jest nieparzysta to dla pewnego n

$$a = 2 * n - 1$$

gdyż dla każdej liczby nieparzystej jest naturalne n , takie że

$$a = 2 * n - 1$$

Podstawiając do tego wyrażenia algebraicznego

$$a = 2 * n - 1$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} & a^2 + (a + 2)(a + 2) + (a + 4)(a + 4) + 1 = \\ & = (2 * n - 1)(2 * n - 1) + (2 * n - 1 + 2)(2 * n - 1 + 2) + \\ & + 2 * n - 1 + 4)(2 * n - 1 + 4) + 1 = \\ & = (4 * n * n - 4 * n + 1) + (2 * n + 1)(2 * n + 1) + \\ & + (2 * n + 3)(2 * n + 3) + 1 = \\ & = (4 * n^2 - 4 * n + 1) + (4 * n^2 + 4 * n + 1) + (4 * n^2 + 12 * n + 9) = \\ & = 12 * n^2 + 12 * n + 12 = \\ & = 12 * (n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

Dla każdej nieparzystej liczby $a = 2 * n - 1$ to wyrażenie rozkłada się na czynniki 12 razy $(n^2 + n + 1)$. Zatem to wyrażenie algebraiczne jest podzielne przez 12 dla każdej nieparzystej wartości parametru a .

1.7.2 Zadania

Zadanie 1.3 Ile różnych liczb nieparzystych trzycyfrowych można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

Zadanie 1.4 *Oblicz sumę kolejnych 15 liczb naturalnych*

$$S_{15} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$$

używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Zadanie 1.5 *Oblicz sumę kolejnych liczb naturalnych*

$$S_{19} = 10 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19$$

stosując wzór na sumę n kolejnych liczb naturalnych.

Zadanie 1.6 *Suma trzech kolejnych liczb naturalnych równa jest 45. Znajdź te liczby.*

Zadanie 1.7 *Suma trzech kolejnych liczb parzystych równa jest 120. Znajdź te liczby.*

Zadanie 1.8 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 180. Znajdź te liczby.*

Zadanie 1.9 *Wykaż, że wartość wyrażenia algebraicznego*

$$n^2 + n + 1$$

jest liczbą nieparzystą dla każdego naturalnego $n = 0, 1, 2, 3, \dots$;

1.8 Operacja potęgowania

Mnożąc liczbę przez siebie kilka razy obliczamy jej potęgę. Na przykład, mnożąc liczbę 2 otrzymamy jej kolejne potęgi

$$\begin{aligned} 2^0 &= 1 \\ 2^1 &= 2 \\ 2 * 2 &= 2^2 = 4 \\ 2 * 2 * 2 &= 2^3 = 8 \\ 2 * 2 * 2 * 2 &= 2^4 = 16 \end{aligned}$$

Podobnie, mnożąc liczb 3 przez siebie otrzymamy kolejne jej potęgi

$$\begin{aligned} 3^0 &= 1 \\ 3^1 &= 3 \\ 3 * 3 &= 3^2 = 9 \\ 3 * 3 * 3 &= 3^3 = 27 \\ 3 * 3 * 3 * 3 &= 3^4 = 81 \\ 3 * 3 * 3 * 3 * 3 &= 3^5 = 243 \end{aligned}$$

Każda liczba $a \neq 0$ różna od zera podniesiona do potęgi 0 równą jest 1

¹ Na przykład

$$1^0 = 1, \quad 5^0 = 1, \quad 6^0 = 1, \quad 7^0 = 1, \quad 14^0 = 1, \quad 259^0 = 1$$

Ogólnie, potęgą liczby $a \neq 0$ różnej od zera o wykładniku naturalnym n nazywamy iloczyn tej liczby pomnożonej przez siebie n razy i zapisujemy

$$\begin{array}{l} a^0 = 1, \quad 2^0 = 1 \\ \underbrace{a * a \dots * a}_{n\text{-czynniki}} = a^n, \quad \underbrace{2 * 2 \dots * 2}_{n\text{-czynniki}} = 2^n \end{array}$$

Wtedy a nazywamy podstawą i n wykładnikiem potęgi a^n .

Przykład 1.11 *Oblicz potęgi*

$$\begin{array}{l} 4^0 = \quad, \quad 4^1 = \quad, \quad 4^2 = \quad \\ 5^2 = \quad, \quad 5^3 = \quad, \quad 5^4 = \quad \\ 10^2 = \quad, \quad 10^3 = \quad, \quad 10^4 = \quad \end{array}$$

Operacje arytmetyczne na potęgach. Na potęgach następujące operacje są wykonalne:

1. Mnożenie potęg o tych samych podstawach

$$a^p * a^q = a^{p+q}$$

dla dowolnych p, q .

Na przykład dla $a = 2, p = 3, q = 5$ mamy

$$2^3 * 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$$

2. Dzielenie potęg o tych samych podstawach

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q},$$

dla dowolnych liczb p, q .

Na przykład dla $a = 2, p = 5, q = 3$ mamy

$$2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

3. Potęgowanie potęg o tych samych podstawach

$$(a^p)^q = a^{p*q},$$

dla dowolnych p, q .

Na przykład dla $a = 2, p = 2, q = 3$ mamy

$$(2^3)^2 = 2^{2*3} = 2^6 = 64$$

¹Symbol 0^0 jest nieokreślony, nie ma sensu liczbowego

4. Potęga iloczynu liczb o tym samym wykładniku

$$(a * b)^n = a^n * b^n$$

równa jest iloczynowi potęg.

Na przykład dla $a = 2$, $b = 3$, $n = 3$ mamy

$$(2 * 3)^3 = 2^3 * 3^3 = 8 * 27 = 216$$

5. Potęga ilorazu liczb o tym samym wykładniku

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

równa jest ilorazowi potęg.

Na przykład dla $a = 4$, $b = 2$, $n = 3$ mamy

$$(4 : 2)^3 = 4^3 : 2^3 = 64 : 8 = 8 \quad \text{lub} \quad \left(\frac{4}{2}\right)^3 = \frac{4^3}{2^3} = \frac{64}{8} = 8$$

Przykład 1.17 *Oblicz*

$$\frac{2^3 * 3^4}{2^2 * 3^3}$$

Rozwiązanie. Wykonując działania na potęgach obliczmy

$$\frac{2^3 * 3^4}{2^2 * 3^3} = 2 * 3 = 6$$

Zadanie 1.10 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$(i) \quad 5^2 * 2^3 + 3^2 * 2^3 - 4^2 * 5^2$$

$$(ii) \quad \frac{2^3 * 3^2 + 5^2 * 7^2 - 2 * 6 * 8 - 1}{3^2 * 5^2 - 2^3 * 4^2 + 3}$$

Odp (ii) :12

Zadanie 1.11 *Oblicz*

$$\frac{3^3 * 2^3 - 3^2 * 2^2}{3 * 2^3 + 2 * 3}$$

Odp:6

1.9 Testy podzielności liczb naturalnych

- Pierwszy test podzielności:
Liczby parzyste

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, ...;

zapisujemy w postaci ogólnej

$$n = 2k, \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

Liczby parzyste są podzielne przez 2.

Obliczmy

$$2 * k : 2 = k, \quad \text{lub} \quad \frac{2 * k}{2} = k$$

dla każdego naturalnego $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$;

Przykład 1.12

$$124 : 2 = 62, \quad \text{lub} \quad \frac{124}{2} = 62$$

$$316 : 2 = 158, \quad \text{lub} \quad \frac{2528}{2} = 1264$$

- Drugi test podzielności
Liczby podzielne przez 3

$$0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, \dots;$$

zapisujemy w postaci ogólnej

$$n = 3k, \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

Jasne, że liczby postaci $3 * k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ są podzielne przez 3, gdyż

$$3 * k : 3 = k, \quad \text{lub} \quad \frac{3 * k}{3} = k$$

dla każdego naturalnego $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$;

Podzielność liczby n przez 3 poznajemy używając testu:

Liczba n jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma cyfr liczby n dzieli się przez 3.

1.9.1 Przykłady liczb podzielnych przez 3

Przykład 1.13 *Liczba $n = 54$ jest podzielna przez 3, ponieważ jej suma cyfr $5 + 4 = 9$ jest podzielna przez 3.*

$$54 : 3 = 18, \quad \text{bo } 3 * 18 = 54$$

Podobnie,

Przykład 1.14 Liczba $n = 756$ jest podzielna przez 3, ponieważ jej suma cyfr $7 + 5 + 6 = 18$ jest podzielna przez 3.

$$756 : 3 = 252 \quad \text{bo} \quad 3 * 252 = 756$$

Test podzielności liczby $n = a_1a_0$ przez 3 ma proste uzasadnienie dla liczb dwucyfrowych. Liczba dwucyfrowa ma cyfrę dziesiątek a_1 , i drugą cyfrę jedności a_0 .

$$a_1a_0 = a_1 * 10 + a_0 = a_1(9 + 1) + a_0 = 9 * a_1 + a_1 + a_0$$

Pierwszy składnik $9 * a_1$ dzieli się przez 3 bo

$$9 * a_1 : 3 = 3a_1, \quad \text{lub} \quad \frac{9 * a_1}{3} = 3a_1$$

Jeżeli drugi składnik sumy $a_1 + a_0$ dzieli się przez 3 to cała suma też dzieli się przez 3

1.9.2 Liczby dwucyfrowe podzielne przez 3. Przykłady

Przykład 1.15 Liczba $n = 57$ ma cyfrę dziesiątek 5 i cyfrę jedności 7. Zatem suma cyfr $5 + 7 = 12$ dzieli się przez 3 i liczba 57 też dzieli się przez 3.

Rzeczywiście mamy

$$57 = 5 * 10 + 7 = 5 * (9 + 1) + 7 = 5 * 9 + 5 + 7,$$

$$(5 * 9 + 5 + 7) : 3 = 5 * 9 : 3 + 12 : 3 = 5 * 3 + 4 = 19$$

- Trzeci test podzielności.

1.9.3 Liczby podzielne przez 5

Zauważmy, że liczby

$$0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, \dots;$$

zapisujemy w postaci ogólnej

$$n = 5k, \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

Jasne że liczby postaci $5 * k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$; są podzielne przez 5, ponieważ

$$5 * k : 5 = k, \quad \text{lub} \quad \frac{5 * k}{5} = k$$

dla każdego naturalnego $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$;

Podzielność liczby n przez 5 poznajemy używając testu:

Liczba n jest podzielna przez 5 wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej cyfra jedności jest 0 lub 5.

Przykład 1.18 *Liczba $n = 50$ jest podzielna przez 5, ponieważ jej cyfra jedności jest równa 0.*

$$50 : 5 = 10, \quad \text{bo} \quad 5 * 10 = 50$$

Przykład 1.19 *Liczba $n = 265$ jest podzielna przez 5, ponieważ jej cyfra jedności jest równa 5.*

$$265 : 5 = 53, \quad \text{bo} \quad 5 * 53 = 265$$

1.10 Dzielenie liczb przez liczby jednocyfrowe z resztą

Liczby naturalne, które spełniają testy podzielności przez liczby 2 lub 3 lub 5, dzielą się z resztą 0. Wtedy mówimy, że są podzielne przez 2 lub 3 lub 5. Jednak, jest dużo liczb, które nie spełniają testów podzielności, wtedy dzielenie wykonujemy z resztą.

1.11 Dzielenie z resztą

Rozpatrzmy następujące przykłady

Przykład 1.16 *Podziel liczbę 13 przez 3*

$$\frac{13}{3} = \frac{\overbrace{3 * 4 + 1}^{13}}{3} = 4 + \frac{1}{3}$$

Liczba 13 dzielona przez 3 równa się 4 z resztą 1.

Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{r} 4 \\ - - \\ 13 : 3 \\ -12 \\ - - \\ 1 \end{array}$$

Odpowiedź: 13 podzielić przez 3 równa się 4 z resztą 1

Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$13 = 4 * 3 + 1$$

Przykład 1.17 Podziel liczbę 53 przez 8

$$\frac{53}{8} = \frac{\overbrace{6 * 8 + 5}^{53}}{8} = 6 + \frac{5}{8}$$

Liczba 53 dzieli się przez 8 z resztą 5.

Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{r} 6 \\ \text{---} \\ 53 : 8 \\ -48 \\ \text{---} \\ 5 \end{array}$$

Odpowiedź: 53 podzielić przez 8 równa się 6 z resztą 5

Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$53 = 6 * 8 + 5$$

Przykład 1.18 Podziel liczbę 85 przez 9

$$\frac{85}{9} = \frac{\overbrace{9 * 9 + 4}^{85}}{9} = 9 + \frac{4}{9}$$

Liczba 85 dzieli się przez 9 z resztą 4.

Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{r} 9 \\ \text{---} \\ 85 : 9 \\ -81 \\ \text{---} \\ 4 \end{array}$$

Odpowiedź: 85 podzielić przez 9 równa się 9 z resztą 4

Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$85 = 9 * 9 + 4$$

Ogólnie piszemy, że liczba n dzieli się przez liczbę d z resztą r według wzoru

Przykład 1.19 Dzielimy liczbę n przez d

$$\frac{n}{d} = \frac{\overbrace{k * d + r}^n}{d} = k + \frac{r}{d}$$

Liczba n dzieli się przez d z resztą r .

Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{r} k \\ \hline n : d \\ -k * d \\ \hline r \end{array}$$

Odpowiedź: n podzielić przez d równa się k z resztą r

Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$n = k * d + r$$

1.12 Dzielenie liczb przez liczby dwucyfrowe z resztą

Przykład 1.20 Podziel liczbę 78 przez 42

$$\frac{78}{42} = \frac{\overbrace{42 + 36}^{78}}{42} = 1 + \frac{36}{42}$$

Liczba 78 dzieli się przez 42 z resztą 36.

Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 78 : 42 \\ -42 \\ \hline 36 \end{array}$$

Odpowiedź: 78 podzielić przez 42 równa się 1 z resztą 36

Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$78 = 1 * 42 + 36$$

Przykład 1.21 Podziel liczbę 1190 przez 25

$$\frac{1190}{25} = \frac{\overbrace{47 * 25 + 15}^{1190}}{25} = 47 + \frac{15}{25}$$

Liczba 1190 dzieli się przez 25 z resztą 15.

Teraz dzielimy według schematu

$$\begin{array}{r}
 47 \\
 \text{---} \\
 1190 : 25 \quad 25 \text{ mieści się w } 119 \text{ cztery razy, piszemy nad kreską } 4 \\
 -100 \quad 4 * 25 = 100; \text{ odejmujemy } 100 \\
 \text{---} \\
 190 \quad \text{różnica } 19 \text{ dopisujemy następną cyfrę } 0, \\
 -175 \quad 25 \text{ mieści się w } 190 \text{ siedem razy piszemy nad kreską } 7 \\
 \text{---} \\
 15 \quad 7 * 25 = 175; \text{ odejmujemy } 175 \\
 \text{---} \\
 15 \quad \text{reszta } 15
 \end{array}$$

Odpowiedź: 1190 podzielić przez 25 równa się 47 z resztą 15

Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$1190 = 47 * 25 + 15 \quad \text{lub} \quad \frac{1190}{25} = 47 + \frac{15}{25} = 47 + \frac{3}{5}$$

Przykład 1.22 Podziel liczbę 1995 przez 17

$$\frac{1995}{17} = \frac{\overbrace{117 * 17 + 6}^{1995}}{17} = 117 + \frac{6}{17}$$

Liczba 1995 dzieli się przez 17 z resztą 6.

Teraz dzielimy według schematu

$$\begin{array}{r}
 117 \\
 \text{---} \\
 1995 : 17 \quad 17 \text{ mieści się w } 19 \text{ jeden raz, piszemy } 1 \text{ nad kreską} \\
 -17 \quad 1 * 17 = 17; \text{ odejmujemy } 17 \\
 \text{---} \\
 29 \quad \text{różnica } 2 \text{ dopisujemy następną cyfrę } 9 \\
 -17 \quad 17 \text{ mieści się } 29 \text{ jeden raz, piszemy drugie } 1 \text{ nad kreską} \\
 \text{---} \\
 125 \quad \text{różnica } 12 \text{ dopisujemy następną cyfrę } 5 \\
 -119 \quad 17 \text{ mieści się } 125 \text{ siedem razy} \\
 \text{---} \\
 6 \quad 7 * 17 = 119 \text{ piszemy } 7 \text{ nad kreską} \\
 \text{---} \\
 6 \quad \text{reszta } 6
 \end{array}$$

Odpowiedź: 1995 podzielić przez 17 równa się 117 z resztą 6

Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$1995 = 117 * 17 + 6 \quad \text{lub} \quad \frac{1995}{17} = 117 + \frac{6}{17}$$

1.12.1 Zadania

Zadanie 1.12 Wykonaj dzielenie pisemne

$$(i) \quad 2546 : 3, \quad (ii) \quad 5796 : 9$$

Zadanie 1.13 Wykonaj dzielenie pisemne

$$(i) \quad 455 : 13, \quad (ii) \quad 18011 : 31$$

Zadanie 1.14 Wykonaj dzielenie pisemne z resztą

$$(i) \quad 2547 : 3, \quad (ii) \quad 5766 : 9$$

Zadanie 1.15 Udowodnij, że liczba $\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0$ jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma cyfr

$$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$$

jest podzielna przez 3. Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, żeby liczba $\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0$ była podzielna przez 9.

Zadanie 1.16 Podaj najmniejszą liczbę naturalą większą od liczby 2018, która ma sumę cyfr 11.

Zadanie 1.17 Udowodnij, że liczba czterocyfrowa $\alpha_3\alpha_225$ jest podzielna przez 25 dla dowolnych cyfr α_3, α_2 .

Zadanie 1.18 .

- (a) Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 3. Wypisz 5 kolejnych liczb podzielnych przez 3.
- (b) Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 3 z resztą 1. Wypisz 6 kolejnych liczb podzielnych przez 3 z resztą 1
- (c) Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 3 z resztą 2. Wypisz pierwsze 7 kolejnych liczb podzielnych przez 3 z resztą 2.

Zadanie 1.19 Bracia Antek, Bolek, Wacek i Staś dostali od ojca razem 400 zł na zakupy szkolne. Bolek wydał o 4zł więcej niż Antek, Wacek wydał o 3zł mniej niż Bolek, Staś wydał tyle samo co Wacek.

Ile każdy z nich wydał na zakupy szkolne?

Zadanie 1.20 W gospodarstwie były krowy, owce, kury i gęsi. Owiec było 2 razy więcej niż krów, gęsi było 4 razy więcej niż owiec, kur było 6 razy więcej niż gęsi. Razem mieli 124 nogi. Ile było w gospodarstwie krów, owiec, kur i gęsi ?