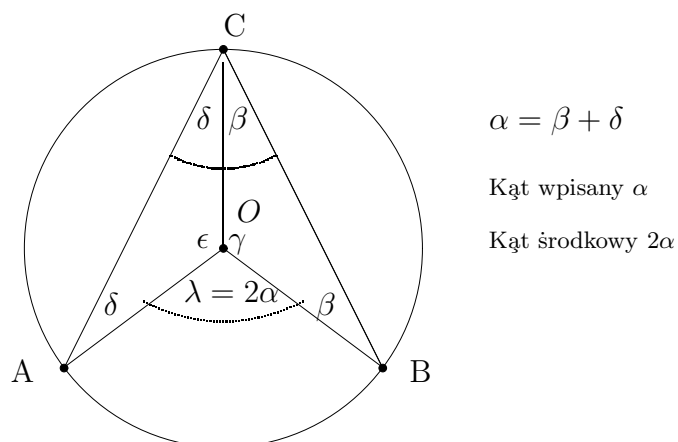


SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS  
02-892 WARSZAWA  
ul. BAŻANCIA 16

Kąt środkowy  $2\alpha$  jest dwa razy większy od kąta wpisanego  $\alpha$



## Geometria płaska. Planimetria <sup>1</sup>

Tadeusz STYŚ

WARSZAWA 2020

<sup>1</sup>Rozdział 18. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.



# Contents

<b>1 Geometria płaska. Planimetria</b>	<b>5</b>
1.1 Wstęp	5
1.2 Punkty, odcinki i wektory na płaszczyźnie	5
1.3 Położenie figur geometrycznych na płaszczyźnie.	6
1.3.1 Operacje arytmetyczne na punktach	6
1.3.2 Wektory na płaszczyźnie	7
1.3.3 Operacje arytmetyczne na wektorach	8
1.3.4 Iloczyn skalarny wektorów	9
1.4 Konstrukcje podstawowe z cyrklem i linijką	12
1.4.1 Konstrukcja symetralnej odcinka.	12
1.4.2 Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej	13
1.4.3 Konstrukcja dwusiecznej danego kąta	13
1.4.4 Dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą	16
1.5 Okrąg i koło	17
1.5.1 Miara łukowa kąta	18
1.5.2 Kąt wpisany w okrąg i kąt środkowy	20
1.5.3 Związek pomiędzy kątem środkowym i kątem wpisanym	21
1.6 Trójkąty	24
1.6.1 Konstrukcja trójkąta o danych bokach	24
1.6.2 Suma kątów trójkąta	24
1.6.3 Konstrukcja trójkąta o tych samych kątach i o bokach proporcjonalnych.	25
1.6.4 Trójkąt równoboczny.	26
1.6.5 Trójkąt równoramienny	27
1.6.6 Trójkąt prostokątny	28
1.7 Cechy przystawania i podobieństwo trójkątów	29
1.7.1 Trójkąty przystające	29
1.7.2 Trójkąty podobne	29
1.7.3 Twierdzenie Talesa	31
1.7.4 Twierdzenie Pitagorasa	33
1.7.5 Wzór Herona. Związek pomiędzy obwodem i polem trójkąta.	35
1.8 Czworokąty	37
1.8.1 Czworokąt foremny. Kwadrat.	38
1.8.2 Prostokąt.	39
1.8.3 Równoległobok.	40
1.8.4 Romb.	40
1.8.5 Trapez	41
1.8.6 Deltoid.	42
1.8.7 Okrąg opisany na czworokącie.	43
1.8.8 Okrąg wpisany w czworokąt	44

1.8.9	Związki miarowe w trójkącie prostokątnym . . . . .	46
1.9	Zastosowanie iloczynu wektorowego do obliczania pola czworokąta dowolnego. . . . .	46
1.9.1	Iloczyn wektorowy w przestrzeni trójwymiarowej $R^3$ . . . . .	46
1.9.2	Pole czworokąta. Przykłady . . . . .	48
1.10	Figury płaskie foremne . . . . .	51
1.10.1	Trójkąt foremny . . . . .	51
1.10.2	Czworokąt foremny . . . . .	53
1.10.3	Pięciokąt foremny . . . . .	53
1.10.4	Sześciokąt foremny . . . . .	55
1.10.5	Ośmiokąt foremny . . . . .	57
1.10.6	Konstrukcja ośmiokąta foremnego. . . . .	57

# Chapter 1

## Geometria płaska. Planimetria

### 1.1 Wstęp

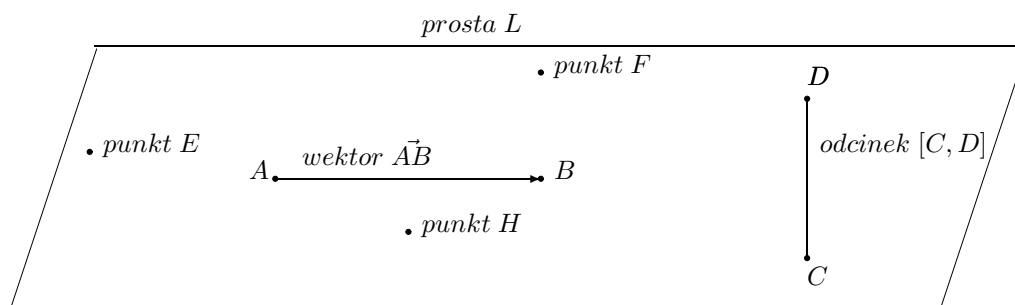
Geometria Euklidesowa, która obejmuje geometrię płaską i geometrie przestrzenną wchodzi do podstawy programu nauczania na poziomie podstawowym i średnim. W szkole podstawowej do programu rozszerzonego matematyki wchodzi tylko niektóre tematy wsparte ćwiczeniami, które są opisane w rozdziale I.

Zakres geometrii płaskiej obejmuje konstrukcje z linijką i cyrklem figur płaskich oraz związki miarowe w trójkątach, prostokątach, równoległobokach, w okręgach i w wielokątach foremnych.

### 1.2 Punkty, odcinki i wektory na płaszczyźnie

Punkty, proste i płaszczyzny są pojęciami pierwotnymi, nie wymagają definicji. Punkt rozumiany jest jako figura geoametryczna bezwymiarowa. Prosta to przestrzeń euklidesowa jednowymiarowa, która składa się z punktów współ-liniowych. Podobnie płaszczyzna tworzy przestrzeń euklidesową złożoną z punktów współ-płaszczyźnianych. Punkty położone na prostej lub na płaszczyźnie oznaczamy dużymi literami  $A, B, C, \dots$ ; Odcinek o początku w punkcie  $A$  i końcu w punkcie  $B$  oznaczamy symbolem  $[A, B]$ . Długość odcinka  $[A, B]$  o początku  $A$  i końcu  $B$  oznaczamy modulem  $|AB|$ .

Wektorem o początku w punkcie  $A$  i końcu w punkcie  $B$  nazywamy odcinek skierowany  $\vec{AB}$  o zwrocie od  $A$  do  $B$ . Długość wektora  $|\vec{AB}|$  równa jest długości odcinka  $|AB|$ .



### 1.3 Położenie figur geometrycznych na płaszczyźnie.

Położenie figur geometrycznych na płaszczyźnie określamy we współrzędnych kartezjańskich. W kartezjańskim układzie współrzędnych współrzędne punktów punkty

$$A = (a_1, a_2) \quad i \quad B = (b_1, b_2)$$

piszemy w nawiasach zwykłych. Natomiast wektor

$$\vec{AB} = [a_2 - a_1, b_2 - b_1]$$

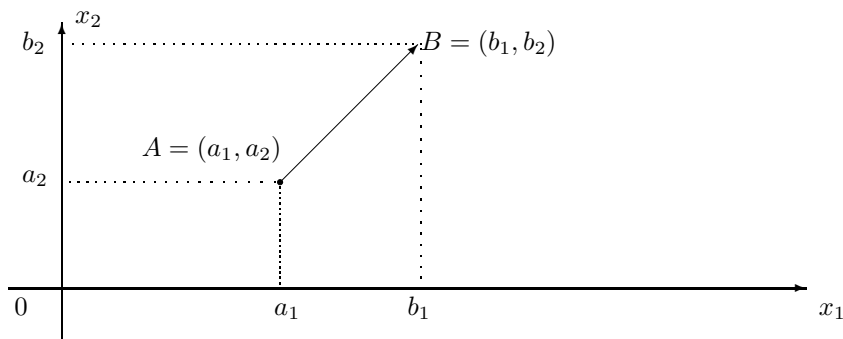
o współrzędnych różnicy współrzędnych piszemy w nawiasach kwadratowych.

**Przykład 1.1** Niech punkty  $A = (3, 1.5)$  i  $B = (5, 3.5)$  tworzą wektor  $\vec{AB}$  o puczką  $A$  i końcu  $B$ . Wtedy wektor

$$\vec{AB} = [5 - 3, 3.5 - 1.5] = [2, 2]$$

ma współrzędne  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 2$ .

#### Kartezjański układ współrzędnych



#### 1.3.1 Operacje arytmetyczne na punktach

*Dodawanie punktów.* Suma dwóch punktów

$$A = (a_1, a_2) \quad i \quad B = (b_1, b_2)$$

równa jest punktowi

$$P = (p_1, p_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

o współrzędnych  $p_1 = a_1 + b_1$  i  $p_2 = a_2 + b_2$ .

**Przykład 1.2** Oblicz sumę punktów

$$A = (1, 2) \quad i \quad B = (2, 1)$$

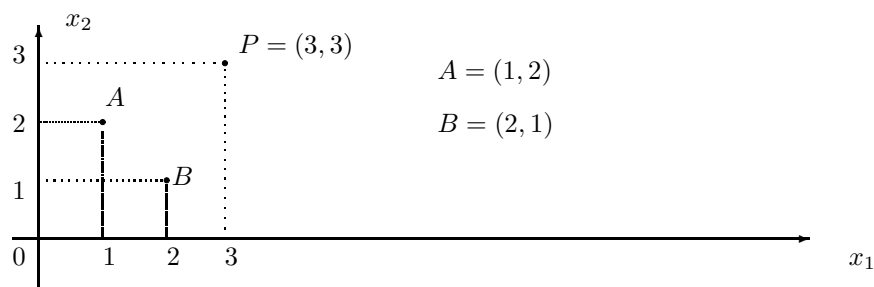
*Rozwiązanie.* Suma

$$A + B = (1, 2) + (2, 1) = (1 + 2, 2 + 1) = (3, 3)$$

*Opowiedź:* Sumą danych punktów  $A = (1, 2)$  i  $B = (2, 1)$  jest trzeci punkt  $P = (3, 3)$ . o współrzędnych  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 3$ .

Niżej na rysunku podana jest geometryczna interpretacja sumy punktów

$$A + B = (1, 2) + (2, 1)$$



Odejmowanie punktów. Różnica dwóch punktów

$$A = (a_1, a_2) \quad i \quad B = (b_1, b_2)$$

równa jest punktowi  $P = (p_1, p_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$   
o współrzędnych  $p_1 = a_1 - b_1$  i  $p_2 = a_2 - b_2$ .

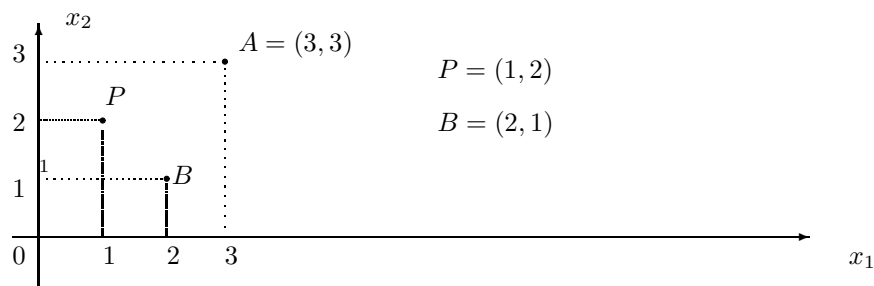
**Przykład 1.3** Oblicz różnicę punktów

$$A = (1, 2) \quad i \quad B = (2, 1)$$

*Rozwiązanie.* Różnica

$$A - B = (3, 3) - (2, 1) = (3 - 2, 3 - 1) = (1, 2)$$

*Opowiedź:* Różnicą danych punktów  $A = (3, 3)$  i  $B = (2, 1)$  jest punkt  $P = (1, 2)$ .



### 1.3.2 Wektory na płaszczyźnie

Niech dane będą punkty  $A = (a_1, a_2)$  i  $B = (b_1, b_2)$ .

Wektor  $\vec{AB}$  o początku w punkcie  $A = (a_1, a_2)$  i końcu w punkcie  $B = (b_1, b_2)$  określamy jako różnicę punktów

$$\vec{AB} = B - A = [b_1 - a_1, b_2 - a_2].$$

<sup>2 3</sup> Na przykład wektor związany o początku w punkcie  $A = (0, 1)$  i końcu w punkcie  $B = (2, 0)$  ma współrzędne

$$\vec{AB} = b - a = (2, 0) - (0, 1) = [2, -1].$$

<sup>1</sup>Nie ma pojęcia iloczynu lub ilorazu punktów

<sup>2</sup>Współrzędne  $v_1, v_2$  wektora swobodnego  $\vec{v} = [v_1, v_2]$  piszemy w nawiasach kwadratowych.

<sup>3</sup>Wektor swobodny określony jest przez jego długość, kierunek i zwrot, nie zależy od położenia na płaszczyźnie.

### 1.3.3 Operacje arytmetyczne na wektorach

#### Dodawanie wektorów

Suma dwóch wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2]$$

równajest wektorowi

$$\vec{Q} = [z_1, z_2] = [v_1 + w_1, v_2 + w_2]$$

o współrzędnych  $z_1 = v_1 + w_1$  i  $z_2 = v_2 + w_2$ .

**Przykład 1.4** Oblicz sumę wektorów

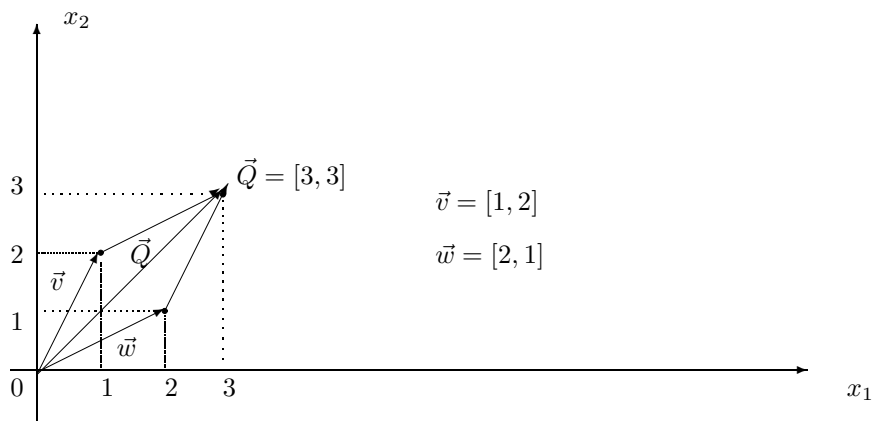
$$\vec{v} = [1, 2] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1]$$

*Rozwiązanie.* Suma

$$\vec{v} + \vec{w} = [1, 2] + [2, 1] = [1 + 2, 2 + 1] = [3, 3]$$

*Opowiedź:* Sumą danych punktów  $\vec{v} = [1, 2]$  i  $\vec{w} = [2, 1]$  jest wektor

$$\vec{Q} = [3, 3].$$



#### Odejmowanie wektorów

Różnica dwóch wektorów  $\vec{v} = [v_1, v_2]$  i  $\vec{w} = [w_1, w_2]$  równa jest wektorowi

$$\vec{Q} = [z_1, z_2] = \vec{v} - \vec{w} = [v_1 - w_1, v_2 - w_2]$$

o współrzędnych  $z_1 = v_1 - w_1$  i  $z_2 = v_2 - w_2$ .

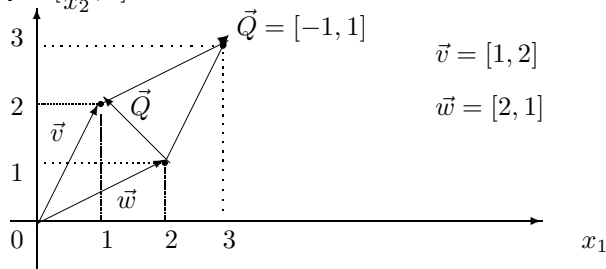
**Przykład 1.5** Oblicz różnicę wektorów  $\vec{v} = [1, 2]$  i  $\vec{w} = [2, 1]$

*Rozwiązanie.* Obliczamy różnicę wektorów

$$\vec{v} - \vec{w} = [1, 2] - [2, 1] = [1 - 2, 2 - 1] = [-1, 1]$$

*Opowiedź:* Wynikiem odejmowania danych wektorów  $\vec{v} = [1, 2]$  i  $\vec{w} = [2, 1]$  jest wektor

$$\vec{Q} = [-1, 1].$$





### 1.3.4 Iloczyn skalarny wektorów

<sup>4</sup> Iloczyn skalarny wektorów jest ważną operacją na wektorach stosowaną w matematyce stosowanej, w fizyce, chemii i w innych przedmiotach ścisłych.

**Definition 1.1** *Iloczynem skalarnym wektorów  $\vec{v} = [v_1, v_2]$  i  $\vec{w} = [w_1, w_2]$  nazywamy liczbę*

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2$$

Iloczyn skalarny wektorów nie jest wektorem, natomiast jest liczbą

**Przykład 1.6** *Oblicz iloczyn skalarny wektorów*

$$\vec{v} = [2, 5] \quad i \quad \vec{w} = [7, 3]. \quad (1.1)$$

*Rozwiązanie.* Stosując wzór (1.1) obliczamy iloczyn skalarny danych wektorów, piszemy

$$(\vec{v}, \vec{w}) = ([2, 5] * [7, 3]) = 2 * 7 + 5 * 3 = 14 + 15 = 29.$$

*Odpowiedź:* Iloczyn skalarny danych wektorów  $\vec{v} = [2, 5]$  i  $\vec{w} = [7, 3]$  jest liczbą 29, piszemy

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 29.$$

Iloczyn skalarny wektorów zachowuje wszystkie własności operacji arytmetycznej mnożenia. Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2]$$

- iloczn skalarny jest przemienny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{v})$$

Istotnie, sprawdzamy, że

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2 = w_1 * v_1 + w_2 * v_2 = (\vec{w}, \vec{v})$$

- mnożenie skalarne wektorów jest rozdzielne względem dodawania

$$(\vec{v}, (\vec{w} + \vec{Q})) = (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{Q})$$

Istotnie sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w} + \vec{Q}) &= v_1 * (w_1 + z_1) + v_2 * (w_2 + z_2) \\ &= v_1 * w_1 + v_1 * z_1 + v_2 * w_2 + v_2 * z_2 \\ &= \underbrace{v_1 * w_1 + v_2 * w_2}_{(\vec{v}, \vec{w})} + \underbrace{v_1 * z_1 + v_2 * z_2}_{(\vec{v}, \vec{Q})} \\ &= (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{Q}) \end{aligned}$$

- Iloczyn skalarny wektora  $\vec{v}$  przez siebie równy jest kwadratowi jego długości

$$(\vec{v}, \vec{v}) = v_1 * v_1 + v_2 * v_2 = v_1^2 + v_2^2 = |\vec{v}|^2$$

---

<sup>4</sup>Wielkość skalarna to znaczy wielkość określona liczbą

Teraz podamy ważne w zastosowaniach następujące twierdzenie

**Twierdzenie 1.1** *Wektory  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, jeżeli ich iloczyn skalarny równy jest zero, piszmy*

$$\vec{v} \perp \vec{w} \iff (\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

**Dowód.** Istnieje kilka dowodów tego twierdzenia. Tutaj podamy dowód oparty na twierdzeniu Pitagorasa. Mianowicie, udowodnimy, że trójkąt o ramionach  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Obliczamy kwadrat długości różnicy wektorów  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$

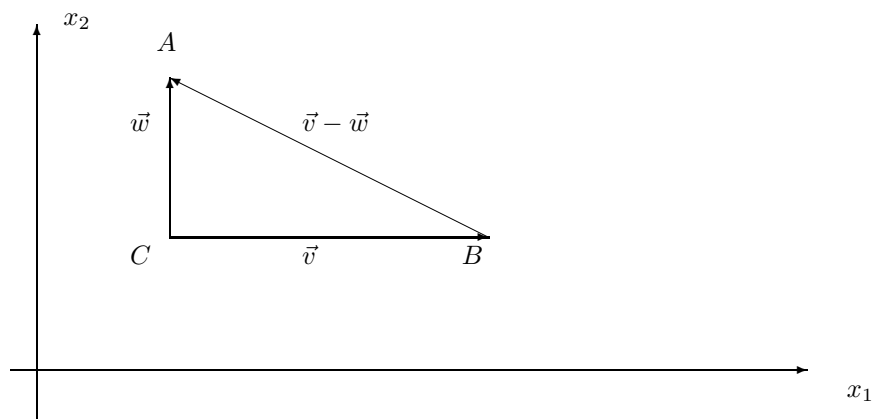
$$\begin{aligned} |\vec{v} - \vec{w}|^2 &= (\vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) \\ &= (\vec{v}, \vec{v}) - 2(\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{w}) \\ &= |\vec{v}|^2 - 2(\vec{v}, \vec{w}) + |\vec{w}|^2 \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

to boki trójkąta  $\triangle ABC$

$$|AB| = |\vec{v}|, \quad |AC| = |\vec{w}|, \quad |BC| = |\vec{v} - \vec{w}|$$



spełniają równość

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = |\vec{v} - \vec{w}|^2 \tag{1.2}$$

wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Z drugiej strony z twierdzenia Pitagorasa wynika, że suma kwadratów dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości boku trzeciego (cf. (1.2)) wtedy i tylko wtedy, jeżeli ten trójkąt jest prostokątny.

Zatem kąt  $\angle ACB$  pomiędzy wektorami  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$  jest prosty wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny tych wektorów równy jest zero.

Koniec dowodu.

Zauważmy, że iloczyn skalarny wektorów jest związany z twierdzeniem Pitagorasa, Istotnie, warunek prostopadłości wektorów<sup>5 6</sup>

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

jest równoważny z tezą twierdzenia Pitagorasa o trójkącie prostokątnym.

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = |\vec{v} - \vec{w}|^2.$$

**Przykład 1.7** Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów

$$\vec{v} = [6, 8], \quad \vec{w} = [9, 12].$$

*Rozwiązanie.* Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzór (1.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [6, 8], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2] = [9, 12]$$

Zatem iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 6 * 9 + 8 * 12 = 54 + 96 = 150.$$

równy jest 100.

Wiemy, że kwadrat długości wektora  $\vec{v} = [6, 8]$  jest równy iloczynowi skalarnemu tego wektora przez siebie.

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = 6 * 6 + 8 * 8 = 36 + 64 = 100$$

Skąd długość wektora

$$|\vec{v}| = \sqrt{100} = 10.$$

Podobnie obliczamy długość wektora  $\vec{w} = [9, 12]$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(\vec{w}, \vec{w})} = \sqrt{9 * 9 + 12 * 12} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15.$$

**Przykład 1.8** Dla jakiej wartości parametru  $m$  wektory

$$\vec{v} = [m, 6], \quad \vec{w} = [3, 2].$$

są prostopadłe?

*Rozwiązanie.* Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzór (1.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [m, 6], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2] = [3, 2]$$

Wektory są prostopadłe jeżeli ich iloczyn skalarny równy jest zero. Obliczamy iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = m * 3 + 6 * 2 = 3m + 12 = 0.$$

<sup>5</sup>Wartość iloczynu skalarnego wektorów nie jest wektorem, natomiast jest liczbą.

<sup>6</sup>Zauważmy, że znikanie iloczynu skalarnego  $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$  jest warunkiem koniecznym i wystarczającym prostopadłości wektorów  $\vec{v}, \vec{w}$ , w symbolach piszemy  $\vec{v} \perp \vec{w} \iff (\vec{v}, \vec{w}) = 0$ .

Skąd iloczyn skalarny równy jest zero

$$6m + 12 = 0, \quad \text{dla} \quad m = -\frac{12}{3} = -4.$$

Istotnie sprawdzamy, że dla  $m = -4$  iloczyn skalarny wektora  $\vec{v} = [m, 6]$  przez wektor  $\vec{w} = [3, 2]$  równy jest zero

$$(\vec{v}, \vec{w}) = -4 * 3 + 6 * 2 = 0$$

*Odpowiedź:* Wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [m, 6], \quad \text{i} \quad \vec{w} = [w_1, w_2] = [3, 2]$$

są prostopadłe dla parametru  $m = -4$ .

**Zadanie 1.1** *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [12, 16], \quad \vec{w} = [15, 20].$$

**Zadanie 1.2** *Dla jakiej wartości parametru  $m$  wektory*

$$\vec{v} = [m, 15], \quad \vec{w} = [5, 3].$$

*są prostopadłe?*

## 1.4 Konstrukcje podstawowe z cyrklem i linijką

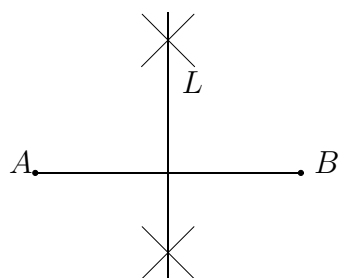
Do konstrukcji podstawowych przy pomocy cyrkla i linijki zaliczamy tutaj <sup>7</sup>

- konstrukcja symetralnej danego odcinka,
- konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej, która przechodzi przez dany punkt poza prostą,
- konstrukcja dwusiecznej danego kąta,
- konstrukcja prostych równoległych,
- konstrukcja trójką o danych bokach,
- konstrukcja czworokąta o danych bokach.

### 1.4.1 Konstrukcja symetralnej odcinka.

Niech dany będzie odcinek  $[A, B]$  o długości  $a = |AB|$ . Stawiamy cyrkiel w punkcie  $A$  i rozwartością cyrkla większą od połowy odcinka  $[A, B]$  zakreślamy dwa łuki nad odcinkiem i pod odcinkiem. Rysujemy prostą  $L$  przez punkty przecięcia łuków. Prosta  $L$  jest symetralną odcinka  $[A, B]$ .

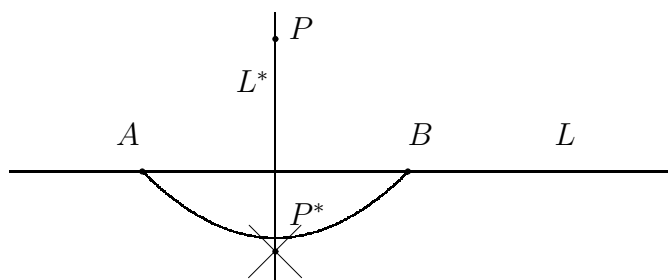
<sup>7</sup>Długość odcinka  $[A, B]$  o początku  $A$  i końcu  $B$  oznaczamy symbolem  $|AB|$



**Zadanie 1.3** *Narysuj odcinek o początku w punkcie  $A$  długości  $6\text{cm}$  i o końcu w punkcie  $B$ . poprowadź symetralną odcinka  $[A, B]$  przy pomocy cyrkla i linijki.*

#### 1.4.2 Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej

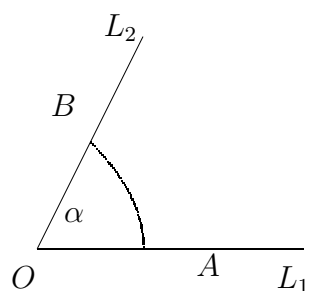
Niech dana będzie prosta  $L$  i punkt  $P$ . Stawiamy cyrkiel w danym punkcie  $P$  i zakreślamy łuk przecinający prostą  $L$  w punktach  $A$  i  $B$ . Stawiamy cyrkiel w punkcie  $A$  i zakreślamy łuk. Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie  $B$  i zakreślamy łuk. Punkt przecięcia łuków oznaczamy literą  $P^*$ . Przez punkty  $P^*$  i  $P$  rysujemy prostą  $L^*$ , jak na rysunku niżej.



**Zadanie 1.4** *Narysuj prostą  $L$ . Poprowadź prostą prostopadłą do prostej  $L$  przez dowolnie wybrany punkt  $P$  leżący poza prostą  $L$ , przy pomocy cyrkla i linijki.*

#### 1.4.3 Konstrukcja dwusiecznej danego kąta

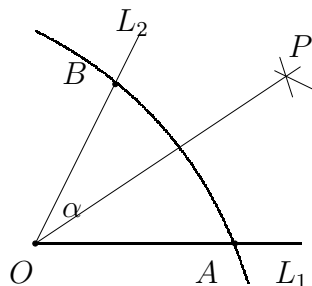
Niech będzie dany kąt  $\alpha$  o wierzchołku w punkcie  $O$  i ramionach  $L_1$  i  $L_2$ .<sup>8</sup>



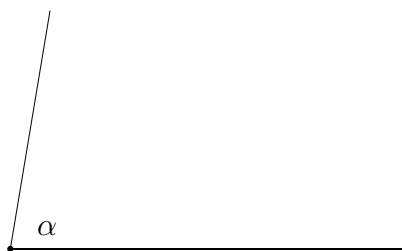
Stawiamy cyrkiel w wierzchołku  $O$  kąta  $\alpha$  i zakreślamy łuk przecinający ramiona  $L_1$  i  $L_2$  w punktach  $A$  i  $B$ . Punkty  $A$  i  $B$  są równo odległe od punktu  $O$ , piszemy  $|OA| = |OB|$ . Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie  $A$  i zakreślamy

<sup>8</sup>Kąt  $\alpha$  o wierzchołku  $O$  i ramionach  $L_1$  i  $L_2$  określonych przez punkty  $A$  i  $B$  oznaczamy symbolem  $\angle AOB$

łuk. Podobnie stawiamy cyrkiel w punkcie  $B$  i zakreślamy łuk. Punkt przecięcia łuków oznaczamy literą  $P$ . Przez punkty  $O$  i  $P$  prowadzimy dwusieczną kąta



**Zadanie 1.5** Poprowadź dwusieczną kąta  $\alpha$  danego niżej na rysunku przy pomocy cyrkla i linijki.

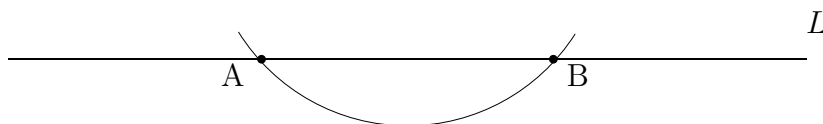


**Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej  $L$ .** Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej  $L$  i przechodzącej przez dany punkt  $P$  oparta jest na rysowaniu równoległoboku.

$P$

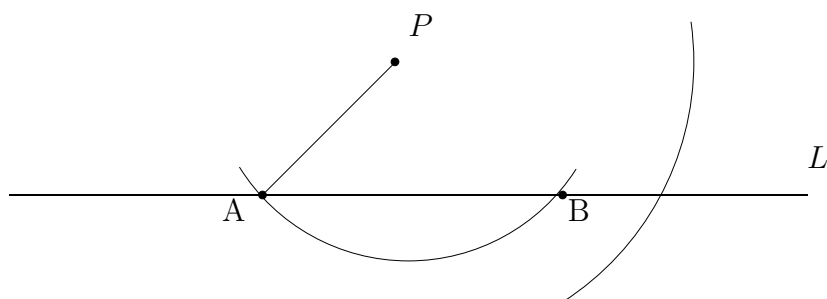
$L$

**Opis konstrukcji.** W pierwszym kroku konstrukcji stawiamy cyrkiel w danym punkcie  $P$  i zakreślamy łuk, który przecina daną prostą  $L$  w dwóch punktach  $A$  i  $B$ .

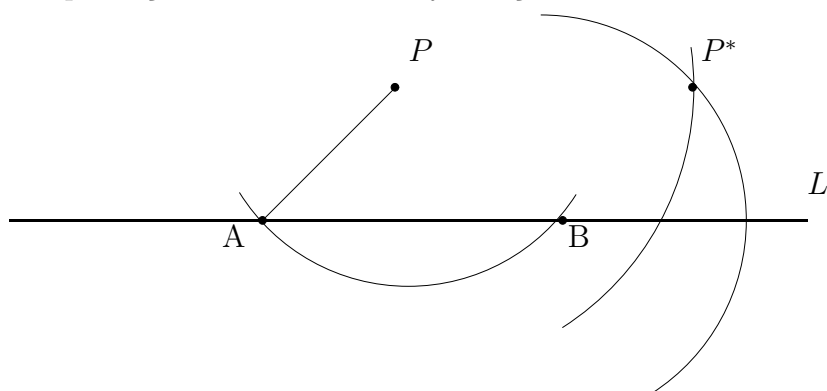


W drugim kroku konstrukcji łączymy punkt  $A$  przecięcia z danym punktem  $P$

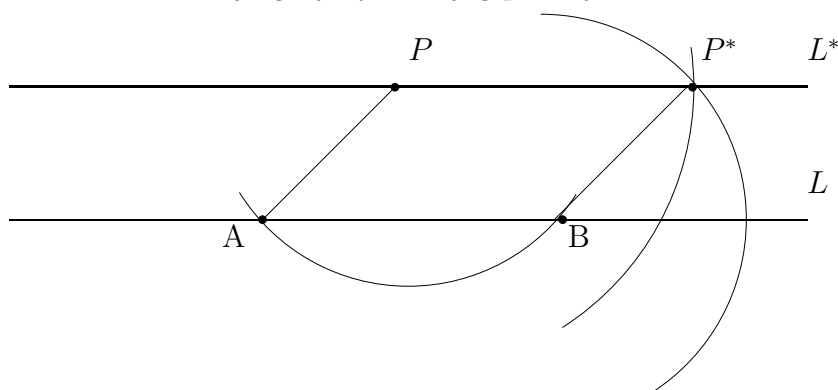
linijką. Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie  $B$  i rozwartością cyrkla równą odległości  $|AP|$  punktu  $A$  od punktu  $P$  zakreślamy łuk.



W trzecim kroku konstrukcji stawiamy cyrkiel w punkcie  $P$  i rozwartością cyrkla równą odległości  $|AB|$  punktu  $A$  od punktu  $B$  zakreślamy drugi łuk. Punkt przecięcia łuków oznaczamy literą  $P^*$ .



W czwartym kroku konstrukcji, rysujemy z linijką prostą przez punkty  $P$  i  $P^*$ . W końcu konstrukcji łączymy z linijką punkty  $B$  i  $P^*$ .



Widzimy, że w ten sposób narysowaliśmy równoległobok  $ABPP^*$ , którego bok  $[P, P^*]$  leży na prostej  $L^*$  równoległej do prostej  $L$  przechodzącej przez dany punkt  $P$ .

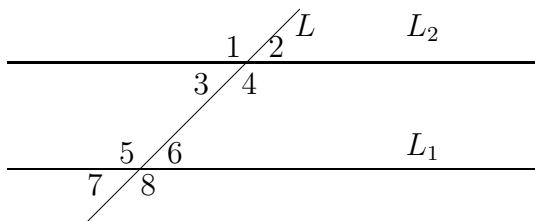
**Zadanie 1.6** *Narysuj prostą równoległą do prostej na rysunku i przechodzącą przez dany punkt*

•



#### 1.4.4 Dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą

Rozpatrzmy dwie proste równoległe  $L_1$  i  $L_2$  przecięte trzecią prostą  $L$ . Niżej na rysunku mamy zaznaczone kąty parami równe



*Dwie linie proste równoległe  $L_1$  i  $L_2$  przecięte trzecią prostą  $L$*

- kąty wierzchołkowe parami równe

$$\angle 1 = \angle 4, \quad \angle 2 = \angle 3, \quad \angle 5 = \angle 8, \quad \angle 6 = \angle 7$$

- kąty odpowiadające parami równe

$$\angle 1 = \angle 5, \quad \angle 3 = \angle 7, \quad \angle 2 = \angle 6, \quad \angle 4 = \angle 8$$

- kąty naprzemianległe wewnętrzne parami równe

$$\angle 3 = \angle 6, \quad \angle 4 = \angle 5,$$

- kąty naprzemianległe zewnętrzne parami równe

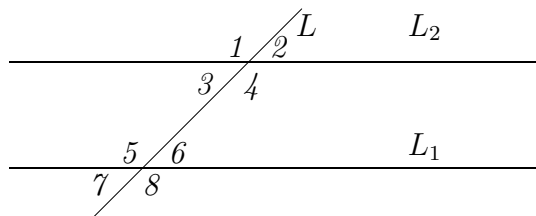
$$\angle 1 = \angle 8, \quad \angle 2 = \angle 7,$$

- kąty przyległe, których suma równa jest  $180^\circ$

$$\begin{aligned} \angle 1 \text{ przylega do } \angle 2, \quad \angle 3 \text{ przylega do } \angle 4, \quad \angle 1 \text{ przylega do } \angle 3, \\ \angle 2 \text{ przylega do } \angle 4, \quad \angle 5 \text{ przylega do } \angle 6, \quad \angle 7 \text{ przylega do } \angle 8, \\ \angle 5 \text{ przylega do } \angle 7, \quad \angle 6 \text{ przylega do } \angle 8 \end{aligned}$$



**Zadanie 1.7** Jeden z kątów wierzchołkowych równy jest  $30^\circ$ .



Dwie linie proste równoległe przecięte trzecią prostą

Oblicz wszystkie kąty

(a) wierzchołkowe

(b) naprzemian leżące

(c) odpowiadające

(d) przyległe wewnętrzne

(e) przyległe zewnętrzne

Zaznacz wartości wszystkich kątów na rysunku

## 1.5 Okrąg i koło

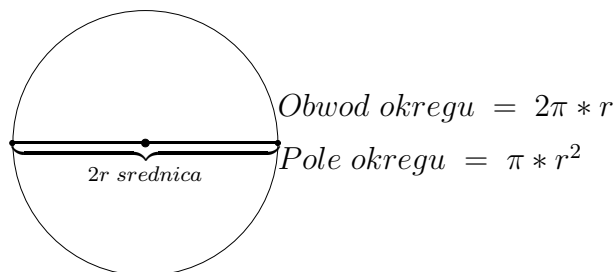
Obszar wewnątrz okręgu nazywamy kołem.

Obwód okręgu

$$O_{obwod} = 2 * \pi * r,$$

pole koła

$$P_{okregu} = \pi * r^2, \quad \pi \approx \frac{314}{100} = 3.14.$$



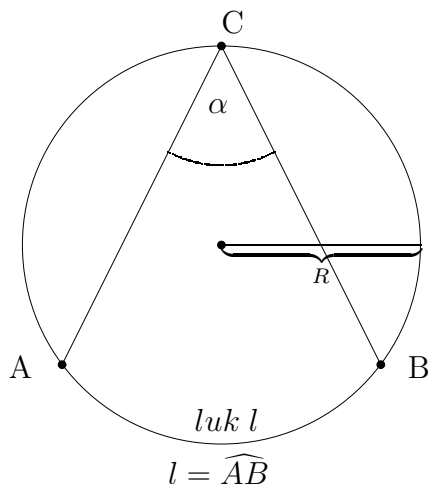
średnica okręgu równa jest 2 razy promień okręgu.

**Zadanie 1.8** Narysuj cyrklem okrąg o promieniu 3cm. Zaznacz kredką wnętrze okręgu jako koło o promieniu 3cm.

Oblicz średnicę okręgu, obwód okręgu, pole koła.

### 1.5.1 Miara łukowa kąta

Rozpatrzmy okrąg o promieniu  $R$



Miarę łukową kąta  $\alpha = \angle BCA$  opartym na łuku  $l = \widehat{AB}$  określamy jako stosunek długości łuku  $l$  do promienia  $R$

$$\alpha = \frac{l}{R}$$

Kąt pełny, który w mierze kątowej ma  $360^\circ$  oparty jest na łuku

$$l = 2\pi * R$$

równym obwodowi okręgu.

Zatem miara łukowa kąta pełnego równa jest

$$\alpha = \frac{2\pi * R}{R} = 2\pi$$

Podobnie kąt półpełny, który w mierze kątowej ma  $180^\circ$  oparty jest na łuku

$$l = \pi * R$$

równym połowie obwodu okręgu. To znaczy, że miara łukowa kąta półpełnego równa jest

$$\alpha = \frac{\pi * R}{R} = \pi$$

Również kąt prosty, który w mierze kątowej ma  $90^\circ$  oparty jest na łuku

$$l = \frac{2\pi * R}{4} = \frac{\pi * R}{2}$$

równym czwartej części obwodu okręgu. To znaczy, że miara łukowa kąta prostego równa jest

$$\alpha = \frac{\pi * R}{2R} = \frac{\pi}{2}$$

W istocie, miara łukowa kąta nie zależy od długości promienia  $R$ . Dlatego możemy przyjąć promień okręgu  $R = 1$ .

Jednostką miary łukowej kąta jest 1 radian. Kąt pełny ma  $2 * \pi$  radianów, któremu w mierze kątowej odpowiada kąt  $360^0$ . Zatem, jeden stopień

$$1^0 = \frac{2 * \pi}{360} = \frac{\pi}{180} \text{radianow}$$

natomiast

$$1 \text{ radian} = \frac{180^0}{\pi} \text{ stopni}$$

**Przykład 1.1** Oblicz miarę łukową kąta  $30^0$ .

**Rozwiązanie.** Korzystamy z proporcji, kątowi  $180^0$  odpowiada miara łukowa tego kąta  $\pi$  radianów. Zatem kątowi  $30^0$  odpowiada miara łukowa  $x$  radianów. Tę proporcję zapisujemy równaniem

$$\frac{\pi}{180} = \frac{x}{30}$$

Skąd obliczamy miarę łukową kąta  $30^0$

$$x = \frac{30 * \pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

**Zadanie 1.9** Oblicz miarę łukową kąta  $\alpha$ , jeżeli jego miara kątowa równa jest

$$(i) \quad \alpha = 30^0$$

$$(ii) \quad \alpha = 60^0$$

$$(iii) \quad \alpha = 120^0$$

**Zadanie 1.10** Ile stopni ma kąt  $\alpha$ , jeżeli jego miara łukowa równa jest

$$(i) \quad \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$(ii) \quad \alpha = \frac{5\pi}{4}$$

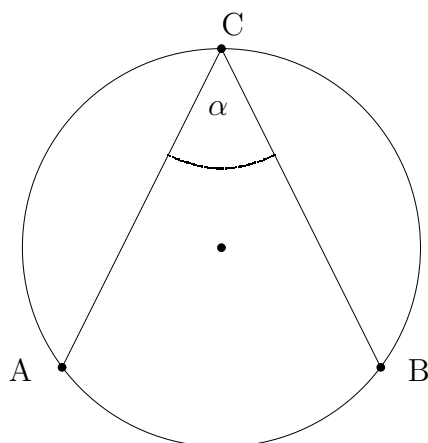
$$(iii) \quad \alpha = \frac{4\pi}{3}$$

$$(iv) \quad \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

$$(iii) \quad \alpha = \frac{7\pi}{6}$$

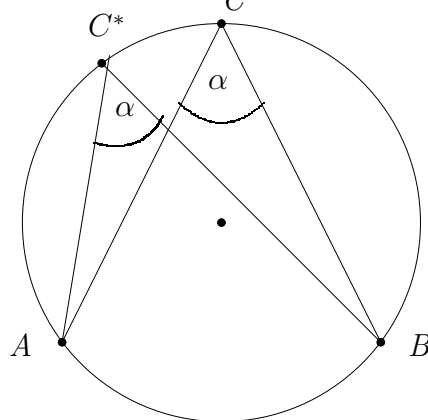
### 1.5.2 Kąt wpisany w okrąg i kąt środkowy

**Kąt wpisany.** Kątem wpisanym  $\alpha$  nazywamy kąt, którego wierzchołek  $C$  leży na okręgu a ramiona  $AC$  i  $BC$  przecinają okrąg w punktach  $A$  i  $B$



Z określenia miary łukowej i miary kątowej wiemy, że wartość kąta wpisanego  $\angle BCA = \alpha$  nie zależy od wielkości promienia  $R$ . Zatem zakładamy, że promień  $R = 1$ .

**Lemma 1.1** *Wartość kąta  $\angle BCA = \alpha$  wpisanego w okrąg jest stała niezależna od położenia wierzchołka  $C$  i promienia  $R$  okręgu o środku w punkcie  $O$ .*



Położenie kąta  $\triangle BCA = \alpha$  wpisanego w okrąg w pozycji  $C^* = \angle BC^*A = \alpha$ , nie zmienia wartości  $\alpha$  kąta wpisanego w okrąg.

Istotnie kąt wpisany  $\alpha$  o wierzchołku w punkcie  $C$  i o ramionach  $AC$  i  $BC$  przecina okrąg w punktach  $A$  i  $B$ . Kąt  $\alpha$  oparty jest na łuku  $l = \widehat{AB}$  radianów, w mierze kątowej równy jest

$$\alpha = \frac{l * \pi}{180^0}.$$

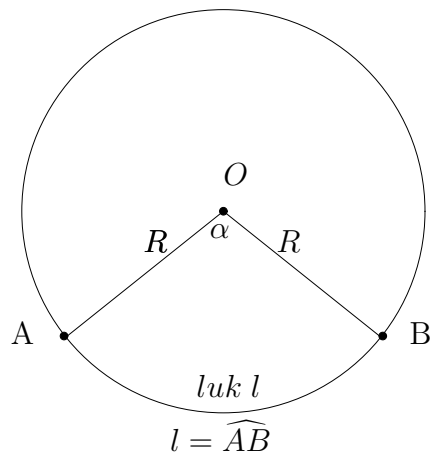
Jeżeli wierzchołek  $C$  porusza się po okręgu w kierunku punktu  $A$  to kąt wpisany

$\alpha = \frac{l * \pi}{180^0}$ , nie zmienia wartości, ponieważ długość łuku  $l = \widehat{AB}$  pozostaje ta sama.

Jednak, jeżeli wierzchołek  $C$  pokryje się z punktem  $A$  to ramie  $AC$  zredukuje się do punktu  $A$ . Wtedy kąt wierzchołkowy  $\alpha$  jest nieokreślony. Jeżeli wierzchołek  $C$  przekroczy punkt  $A$  i dalej porusza się w kierunku punktu  $B$  to wtedy kąt wpisany  $\alpha$  będzie oparty na łuku o długości  $2\pi - l$ , a jego miara kątowa

$$\alpha = \frac{(2\pi - l) * 180^0}{\pi}.$$

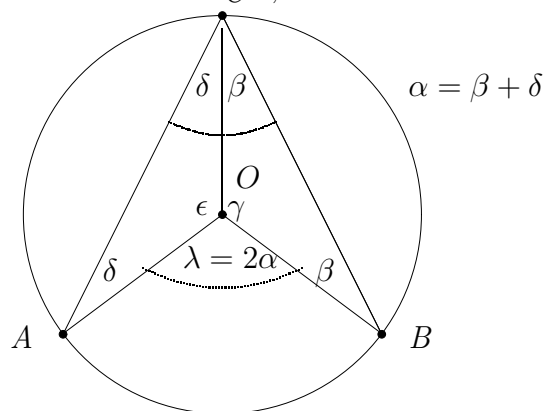
**Kąt środkowy.** Kątem środkowym nazywamy kąt pomiędzy promieniami okręgu  $R = |AO|$  i  $R = |BO|$  o wierzchołku w środku okręgu  $O$ .



### 1.5.3 Związek pomiędzy kątem środkowym i kątem wpisanym

**Twierdzenie 1.2** *Kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany w okrąg jest dwa razy większy od kąta wpisanego. Zatem mamy równość*

$$\angle BCA \in \alpha, \quad \angle BOA = 2\alpha$$



Podamy dwa dowody twierdzenia o kącie wpisanym i kącie środkowym.

**Dowód 1.** Z lematu 1 wiemy, że wartość kąta wpisanego  $\alpha$  nie zależy od

położenia jego wierzchołka  $C$  na okręgu.

Zatem możemy przyjąć położenie wierzchołka  $C$  na średnicy okręgu przechodzącej przez wierzchołek  $C$  i środek okręgu  $O$ .

Promienie okręgu  $AO$ ,  $BO$  i  $CO$  tworzą trójkąty  $\triangle AOC$  i  $\triangle BCO$  równoramienne i przystające.

Zatem ich kąty  $\beta$ ,  $\gamma$  i kąt środkowy  $\angle BOA = \lambda$  spełniają równania

$$\begin{aligned}\alpha &= 2\beta, \\ \gamma + 2\beta &= \pi \\ 2\gamma + \lambda &= 2\pi.\end{aligned}$$

Skąd obliczamy kąt środkowy

$$\lambda = 2\pi - 2\gamma = 2\pi - 2\underbrace{(\pi - 2\beta)}_{\gamma} = 4\beta = 2\alpha.$$

**Dowód 2.** Najpierw dowód podamy w przypadku, gdy środek okręgu  $O$  leży pomiędzy ramionami  $AC$  i  $BC$  kąta wpisanego  $\angle BCA = \alpha$ , następnie w przypadku, gdy środek okręgu  $O$  leży poza ramionami kąta wpisanego.

W przypadku pierwszym zauważamy, że trójkąty równoramienne  $\triangle AOC$ ,  $\triangle BCO$  o ramionach równych promieniowi okręgu  $R$  mają kąty przy podstawach kąty równe. Trójkąt  $\triangle AOC$  ma przy podstawie  $AC$  kąty równe  $\delta$  i trójkąt  $\triangle BCO$  ma przy podstawie  $BC$  kąty równe  $\beta$ . Kąt wpisany  $\angle BCA = \alpha$  oznaczamy literą grecką  $\alpha$ , a kąt środkowy  $\angle AOB$  oznaczamy literą grecką  $\lambda$ , jak na rysunku.

Następnie zauważamy, że kąty  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \lambda$  spełniają układ równań liniowych

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta + \delta, & \angle BCA \text{ wpisany } \alpha \\ 2\beta + \gamma &= \pi, & \text{suma katow w trojkacie } \triangle BCO \text{ rowna } \pi \\ 2\delta + \epsilon &= \pi, & \text{suma katow w trojkacie } \triangle AOC \text{ rowna } \pi \\ \gamma + \epsilon + \lambda &= 2\pi, & \text{kat pelny rowny } 2\pi\end{aligned}\tag{1.3}$$

Układ równań liniowych (1.3) rozwiążemy metodą podstawiania.

Mianowicie, z równania drugiego i trzeciego w układzie (1.3) obliczamy

$$\begin{aligned}\gamma &= \pi - 2\beta, \\ \epsilon &= \pi - 2\delta\end{aligned}$$

Skąd suma kątów

$$\gamma + \epsilon = 2\pi - 2(\beta + \delta)$$

Z równania czwartego w układzie równań (1.3) obliczamy kąt środkowy

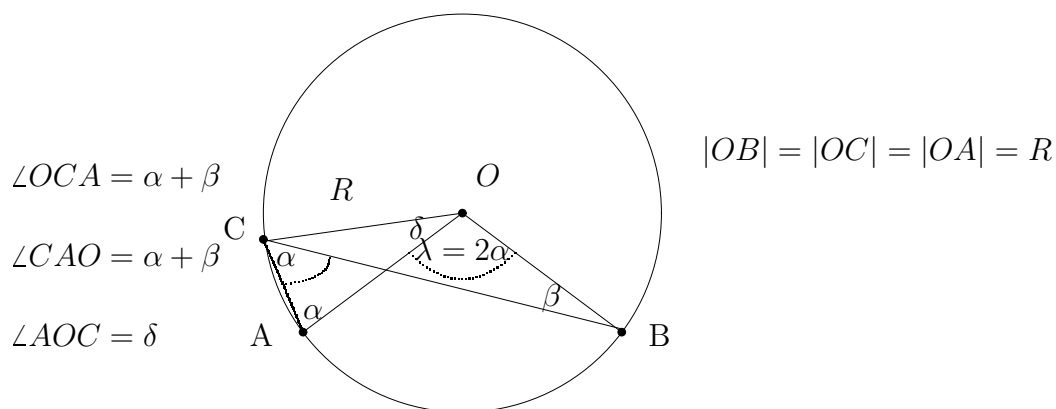
$$\lambda = 2\pi - (\gamma + \epsilon) = 2\pi - \underbrace{(2\pi - 2(\beta + \delta))}_{\gamma + \epsilon} = 2\underbrace{(\beta + \delta)}_{\alpha} = 2\alpha$$

Zatem, obliczyliśmy, że kąt środkowy  $\lambda$  jest dwa razy większy od kąta wpisanego  $\alpha$ , piszemy

$$\lambda = 2\alpha$$

Koniec dowodu przypadku pierwszego.

**Dowód.** Dowód w przypadku drugim, gdy środek okręgu  $O$  leży poza ramionami  $AC$  i  $BC$  kąta wpisanego  $\angle BCA = \alpha$ .



Zauważamy, że trójkąty równoramienne  $\triangle AOC$  i  $\triangle BOC$  o ramionach równych promieniowi okręgu  $R$  mają przy podstawach  $[AC]$  i  $[CB]$  kąty równe, odpowiednio

$$\angle OCA = \angle CAO = \alpha + \beta \quad i \quad \angle CBO = \angle OCB = \beta.$$

Suma kątów w trójkątach  $\triangle AOC$  i  $\triangle BOC$  równa jest  $180^\circ$  lub  $\pi$ , piszemy

$$\begin{aligned} \underbrace{\angle OCA + \angle CAO}_{2(\alpha + \beta)} + \underbrace{\angle AOC}_{\delta} &= \pi & 2(\alpha + \beta) + \delta &= \pi \\ \underbrace{\angle OBC + \angle OCB}_{2\beta} + \underbrace{\angle BOC}_{\delta + \lambda} &= \pi & 2\beta + \delta + \lambda &= \pi \end{aligned} \quad (1.4)$$

Układ równań liniowych (1.4) rozwiążemy metodą podstawiania. Mianowicie, z pierwszego równania obliczamy

$$\delta = \pi - 2(\alpha + \beta)$$

i podstawiamy do równania drugiego

$$2\beta + (\pi - 2(\alpha + \beta)) + \lambda = \pi, \quad \lambda - 2\alpha = 0.$$

Skąd kąt środkowy  $\angle BOA = 2\alpha$  jest dwa razy większy od kąta wpisanego  $\angle OCA = \alpha$ , piszemy

$$\lambda = 2\alpha$$

lub

$$\angle BOA = 2\angle OCA.$$

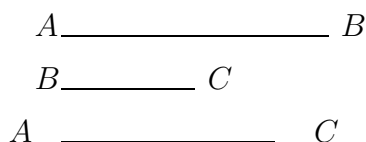
Koniec dowodu przypadku 2.

**Wniosek:** Kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest prosty, ma  $90^0$ , w mierze łukowej ma  $\frac{\pi}{2}$  radianów.

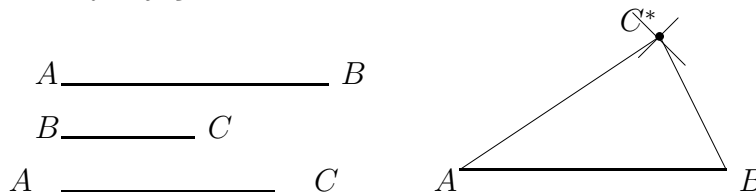
## 1.6 Trójkąty

### 1.6.1 Konstrukcja trójkąta o danych bokach

Niech będą dane trzy odcinki  $[A, B]$ ,  $[B, C]$ , i  $[A, C]$



Wyberzmy odcinek  $[AB]$  jako podstawę trójkąta  $\Delta ABC$ . Rozwartością cyrkla równą dłu gości odcinka  $[A, C]$  zakreślamy łuk stawiając cyrkiel w punkcie  $A$ . Następnie rozwartością cyrkla równą długości odcinka  $[B, C]$  zakreślamy łuk stawiając cyrkiel w punkcie  $B$ . Punkt przecięcia łuków  $C^*$  łączymy z punktami  $A$  i  $B$  podstawy trójkąta  $\Delta ABC^*$  <sup>9</sup>



Zauważmy, że trójkąt można zbudować z odcinków, które spełniają następującą nierówność trójkąta

*Suma długości dwóch boków trójkąta jest większa od długości boku trzeciego, piszemy*

$$|AB| + |BC| \geq |AC|,$$

$$|AB| + |AC| \geq |BC|,$$

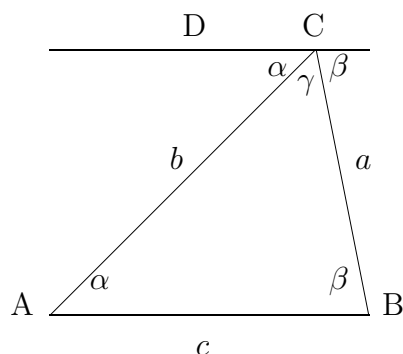
$$|AC| + |BC| \geq |AB|$$

### 1.6.2 Suma kątów trójkąta

Suma kątów każdego trójkąta równa jest  $180^0$ , w mierze łukowej  $\pi$  radianów. Niżej rozpatrzmy geometryczną interpretację sumy kątów trójkąta.

<sup>9</sup>Odcinek o początku w punkcie  $A$  i końcu w punkcie  $B$  oznaczamy symbolem  $[A, B]$





Z rysunku, zauważamy, że suma kątów każdego trójkąta równa jest  $180^0$ . Rzeczywiście, prosta  $DC$  jest równoległa do podstawy  $AB$  trójkąta  $ABC$ . Kąty naprzemianległe wewnętrzne  $\alpha$  przy podstawie i  $\alpha$  przy odcinku  $DC$  są równe, podobnie  $\beta$  przy podstawie  $AB$  i  $\beta$  przy odcinku  $DC$  są równe. Widzmy, że

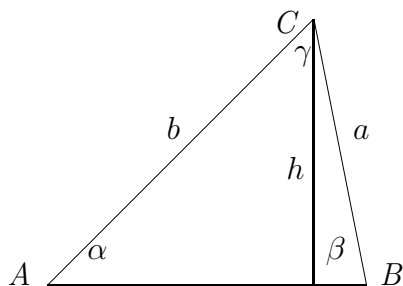
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

To znaczy, że suma kątów każdego trójkąta równa jest  $180^0$ .

### 1.6.3 Konstrukcja trójkąta o tych samych kątach i o bokach proporcjonalnych.

Na płaszczyźnie wybieram trzy różne punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$  i łączymy te punkty używając linijki. W ten sposób narysowaliśmy trójkąt. Boki  $AB$  i  $AC$  przedłużamy. Na przedłużonych bokach odkładamy odcinki równe długości boków  $AB$  i  $AC$ , odpowiednio. Łączymy zaznaczone końce odcinków. Widzimy, że w ten sposób narysowaliśmy drugi trójkąt który ma kąty te same co wcześniej narysowny trójkąt, natomiast boki ma dwa razy dłuższe. Rzeczywiście, oba trójkąty mają te same kąty, ponieważ bok  $BC$  jest równoległy odpowiedniego boku większego trójkąta, jako kąty odpowiadające.

**Przykład 1.2** *Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy dłuższych używając linijki i cyrkla. Zmierz kąty tego trójkąta. Oblicz sumę kątów tego trójkąta.*



Pole trójkąta

Trojkatu  $\Delta ABC$

$$P_{\Delta} = \frac{a * h}{2}$$

*Obwód trójkąta*

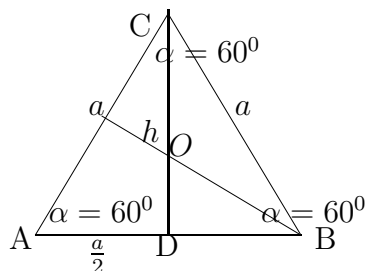
$$Ob_{\Delta} = a + b + c.$$

Rozróżniamy następujące trójkąty: trójkąty równoboczne, trójkąty równoramienne, trójkąty prostokątne i trójkąty dowolne.

#### 1.6.4 Trójkąt równoboczny.

Trójkąt równoboczny ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe  $\alpha = 60^{\circ}$ , w mierze łukowej  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  jak na rysunku

**Konstrukcja trójkąta równobocznego.** Rysujemy odcinek o ustalonej długości boków trójkąta. Stawiamy nóżkę cyrkla na początku odcinka i zakreślamy okrąg o promieniu równym długości odcinka. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla na drugim końcu odcinka i tym samym promieniem zakreślamy okrąg. Łączymy punkt przecięcia okręgów z końcami odcinka. Widzimy, że w ten sposób powstał trójkąt o równych bokach i równych kątach.



*Trójkąt równoboczny  $\Delta ABC$*

Wysokość  $h$  trójkąta  $\Delta ABC$  jest dwusieczną kąta  $\alpha$  i dzieli podstawę  $a$  na połowę w punkcie  $D$ . Podobnie wysokości trójkąta równobocznego spuszczone na pozostałe boki dzielą ich na połowy i przecinają się w jednym punkcie  $O$ . Punkt przecięcia wysokości  $O$  dzieli te wysokości w stosunku  $1 : 3$ . To znaczy zachodzi następująca proporcja

$$\frac{|DO|}{|DC|} = \frac{1}{3}, \quad |DC| = h$$

Stąd mamy

$$|DO| = \frac{1}{3}h, \quad \text{ i } \quad |OC| = \frac{2}{3}h$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość  $h$  trójkąta  $\Delta ABC$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

Wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Obliczamy pole trójkąta równobocznego

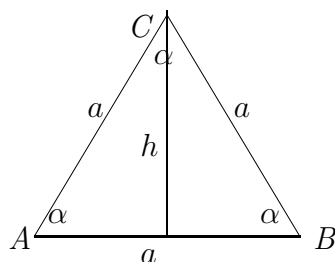
$$P = h * \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole trójkąta równobocznego o boku  $a$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

**Zadanie 1.11** Zmierz boki i kąty trójkąta  $\Delta ABC$  niżej na rysunku



- (i) Oblicz pole i obwód trójkąta równoramiennego  $\Delta ABC$ , o boku  $a = 3\text{cm}$ .
- (ii) Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy dłuższych używając linijki i cyrkla.
- (iii) Zmierz kąty i oblicz sumę kątów tego trójkąta.

### 1.6.5 Trójkąt równoramienny

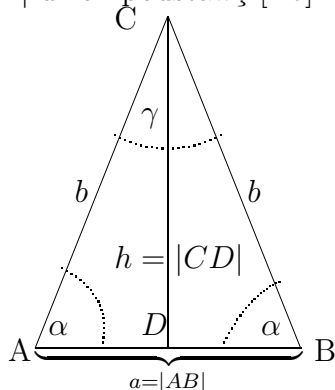
Trójkąt równoramienny o podstawie równej odcinkowi  $[A, B]$  i równych ramionach  $[A, C] = [B, C]$  ma przy podstawie  $[A, B]$  kąty równe  $\angle CAB = \angle ABC = \alpha$ . Wysokość  $h = |CD|$  dzieli podstawę  $[A, B]$  na połowę. Kąt przy wierzchołku  $C$  w mierze kątowej

$$\beta = 180^\circ - 2 * \alpha$$

lub w mierze łukowej

$$\beta = \pi - 2 * \alpha$$

Wysokość  $h = |CD|$  dzieli podstawę  $[Ab]$  na połowę



Pole trójkąta równoramiennego  $\Delta ABC$  obliczamy stosując wzór ogólny

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \underbrace{|AB| * |CD|}_{a * h} = \frac{1}{2} a * h.$$

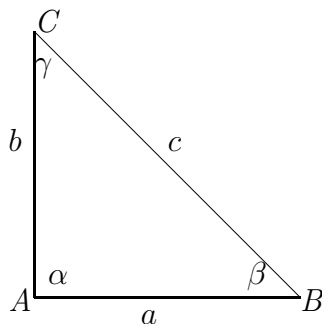
**Zadanie 1.12** Zmierz boki i kąty trójkąta równoramiennego  $\Delta ABC$ . Oblicz obwód, pole i sumę kątów trójkąta równoramiennego, jeżeli długość jego podstawy  $|AB| = 3\text{cm}$ , a równe ramiona  $|AC| = |BC| = 4\text{cm}$ .

### 1.6.6 Trójkąt prostokątny

Pole trójkąta  $= \frac{a * b}{2}$ , obwód trójkąta  $= a + b + c$

W trójkącie prostokątnym wyróżniamy przyprostokątne  $AB$  i  $AC$ , o długości  $a$  i  $b$ , przeciwprostokątną  $BC$ , o długości  $c$ , kąt prosty  $\alpha = 90^\circ$  i dwa kąty przyległe  $\beta$ ,  $\gamma$

**Zadanie 1.13** Zmierz boki i kąty tego trójkąta.



Trójkąt prostokątny  $\Delta ABC$

Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy krótszych używając linijki i cyrkla. Oblicz sumę kątów tego trójkąta

## 1.7 Cechy przystawania i podobieństwo trójkątów

### 1.7.1 Trójkąty przystające

Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe. Jasne, że na to żeby dwa trójkąty były przystające wystarczy, żeby miały równe boki, gdyż wtedy automatycznie wszystkie kąty muszą mieć równe. O tym mówi pierwsza cecha przystawania trójkątów.

**Pierwsza cecha przystawania trójkątów.** Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają wszystkie boki równe.

Narysuj trójkąt o tych samych o bokach używając linijki i cyrkla. Zmierz kąty tego trójkąta. Oblicz sumę kątów tego trójkąta

**Druga cecha przystawania trójkątów.** Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają dwa boki równe i kąty przyległe do tych boków równe. Sprawdzamy, że wtedy pozostałe boki muszą być równe i kąty też równe.

**Trzecia cecha przystawania trójkątów.** Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają dwa boki równe i kąt pomiędzy tymi bokami równy.

### 1.7.2 Trójkąty podobne

Dwa trójkąty  $\triangle ABC$  i  $A'B'C'$  są podobne, piszemy

$$\triangle ABC \simeq \triangle A'B'C'$$

jeżeli mają odpowiednie boki proporcjonalne w skali proporcji  $k$ , to znaczy

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = k,$$

$$|AB| = k * |A'B'|,$$

$$|AC| = k * |A'C'|,$$

$$|BC| = k * |B'C'|.$$

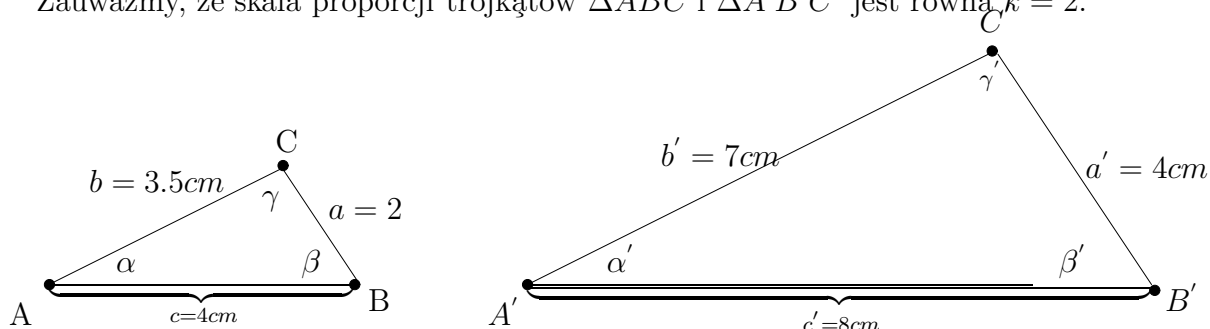
Rozpatrzmy trójkąt  $\triangle ABC$  o bokach

$$|AB| = c = 4cm, \quad |BC| = c = 2cm, \quad |AC| = b = 3.5cm$$

i trójkąt  $\triangle A'B'C'$  o bokach

$$|A'B'| = c' = 8cm, \quad |B'C'| = c' = 4cm, \quad |A'C'| = b = 7cm$$

Zauważmy, że skala proporcji trójkątów  $\Delta ABC$  i  $\Delta A'B'C'$  jest równa  $k = 2$ .



Niżej podamy trzy cechy podobieństwa trójkątów.

**Pierwsza cecha podobieństwa trójkątów.** Dwa trójkąty  $\Delta ABC$  i  $\Delta A'B'C'$  są podobne, jeżeli mają wszystkie boki proporcjonalne w skali proporcji  $k$ , to znaczy

$$|AB| = k * |A'B'|,$$

$$|AC| = k * |A'C'|,$$

$$|BC| = k * |B'C'|.$$

**Zadanie 1.14** *Narysuj trójkąt  $\Delta ABC$  o bokach*

$$|AB| = c = 5cm, \quad |AC| = b = 4cm, \quad |BC| = a = 3cm$$

*używając linijki i cyrkla.*

*Narysuj drugi trójkąt  $\Delta A'B'C'$  o bokach dwa razy większych od boków trójkąta  $\Delta ABC$ .*

**Druga cecha podobieństwa trójkątów.** Dwa trójkąty  $\Delta ABC$  i  $\Delta A'B'C'$  są podobne, jeżeli mają dwa boki proporcjonalne w skali proporcji  $k$  i kąt pomiędzy tymi bokami równy, to znaczy  $\alpha = \alpha'$

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = k,$$

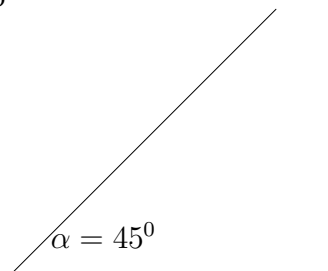
$$|AB| = k * |A'B'|,$$

$$|AC| = k * |A'C'|,$$

**Zadanie 1.15** *Narysuj trójkąt  $\Delta ABC$  o bokach*

$$|AB| = c = 3cm, \quad |AC| = b = 5cm,$$

danym kącie  $\alpha = 45^\circ$



używając linijki i cyrkla.

Narysuj drugi trójkąt  $\Delta A'B'C'$  o bokach dwa razy większych od boków trójkąta  $\Delta ABC$ .

### Trzecia cecha przystawania trójkątów.

Dwa trójkąty  $\Delta ABC$  i  $\Delta A'B'C'$  są podobne, jeżeli mają boki  $AB$  i  $A'B'$  proporcjonalne w skali  $k$  i kąty do nich przyległe równe, to znaczy  $\alpha = \alpha'$  i  $\beta = \beta'$  oraz boki  $AB$  i  $A'B'$  w skali  $k$

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = k,$$

$$|AB| = k * |A'B'|.$$

**Zadanie 1.16** Narysuj trójkąt  $\Delta ABC$  o boku

$$|AB| = c = 6cm,$$

i danych kątach przyległych  $\angle\alpha = 30^\circ$ ,  $\angle\beta = 60^\circ$  do boku  $AB$ .

Narysuj drugi trójkąt  $\Delta A'B'C'$  o bokach dwa razy większych od boków trójkąta  $\Delta ABC$ .

### 1.7.3 Twierdzenie Talesa

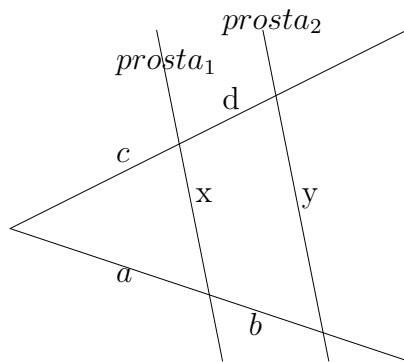
Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta

Jeżeli  $prosta_1 \parallel prosta_2$  to :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{x}{y}$$

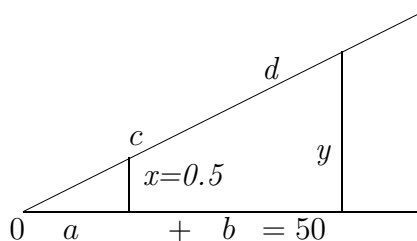
Interpretacja geometryczna powyższej proporcji podana jest niżej na rysunku



**Przykład 1.3** Oblicz wysokość drzewa z odległości 50m. Stosując twierdzenie Talesa obliczamy wysokość drzewa  $y$  z proporcji

$$\frac{a}{a+b} = \frac{x}{y}, \quad y = \frac{(a+b) * x}{a}$$

Dane:  $a + b = 50m$ , Dokonujemy pomiarów  $a = 2m$ ,  $x = 0.5m$  do proporcji, zobacz na rysunku.



$$\text{Podstawiając dane obliczamy wysokość drzewa } y = \frac{(a+b) * x}{a} = \frac{50 * 0.5}{2} = 12.5$$

Twierdzenie Talesa stosujemy w zadaniach dzielenia odcinka w danej proporcji.

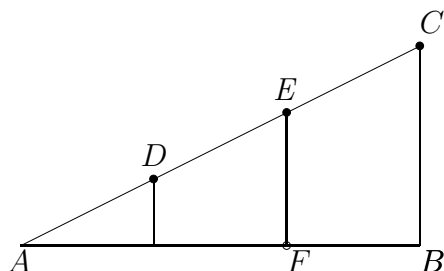
**Przykład 1.4** Podzielić odcinek  $AB$  w stosunku  $2 : 3$

**Rozwiązanie.** Na ramieniu  $AC$  zaznaczamy dowolną rozwartość cyrkla trzy punkty  $D$ ,  $E$  i punkt  $C$ . Następnie, łączymy punkt  $C$  z punktem  $B$  używając linijki. Rysujemy równoległe do odcinka  $BC$  przechodzące przez punkty  $D$  i  $E$ . W ten sposób dostajemy podział odcinka  $AB$  punktem  $F$  w stosunku  $2 : 3$ , Zatem, z twierdzenia Talesa mamy proporcje

$$\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{2}{3}$$

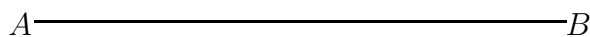


Interpretacja geometryczna tej proporcji podana jest niżej na rysunku



**Zadanie 1.17** Oblicz wysokość drzewa z odległości 150m, wiedząc, że wysokość listwy geodezyjnej równa jest 2m i jej odległość od punktu pomiaru 10m.

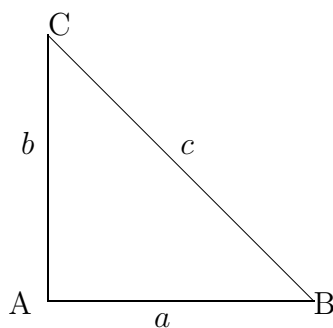
**Zadanie 1.18** Podzielić odcinek  $AB$  w stosunku  $1 : 3$



#### 1.7.4 Twierdzenie Pitagorasa

Figury płaskie, twierdzenie Pitagorasa, wielokąty foremne, okrąg: kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg, miara łukowa kątów, konstrukcje figur płaskich, figury przestrzenne granastosłupy proste, walce, stożki, ostrosłupy, sfery i kule, obliczanie objętości i pola powierzchni.

Związki miarowe w trójkącie prostokątnym wynikają z twierdzenia Pitagorasa.



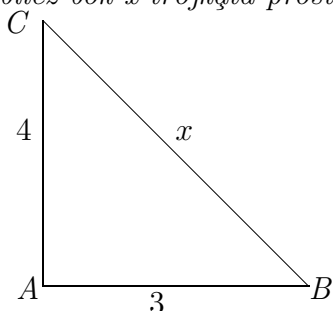
Trójkąt prostokątny  $\triangle ABC$

**Twierdzenie 1.3** W trójkącie prostokątnym suma kwadratów przyprostokątnych równa jest kwadratowi przeciwprostokątnej

$$a^2 + b^2 = c^2$$

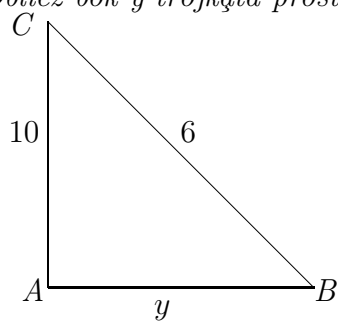
Tutaj przez  $a$  i  $b$  oznaczone są przyprostokątne, literą  $c$  oznaczona jest przeciwprostokątna

**Przykład 1.5** Oblicz bok  $x$  trójkąta prostokątnego



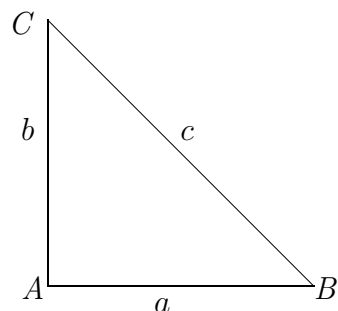
Trójkąt prostokątny  $\triangle ABC$

**Przykład 1.6** Oblicz bok  $y$  trójkąta prostokątnego



Trójkąt prostokątny  $\triangle ABC$

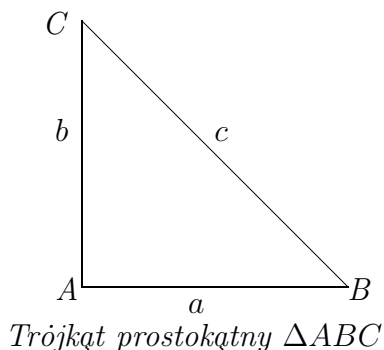
**Przykład 1.7** Oblicz przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, wiedząc, że przyprostokątne  $a = 9$ ,  $b = 12$



Trójkąt prostokątny  $\triangle ABC$

**Przykład 1.8** Oblicz wszystkie boki trójkąta prostokątnego, wiedząc, że przyprostokątna  $a = 12\text{cm}$ , przyprostokątna  $b$  jest o  $4\text{cm}$  dłuższa od przyprostokątnej

$a$ , natomiast przeciwprostokątna  $c$  jest dłuższa o 8cm od przyprostokątnej  $a$ .



### 1.7.5 Wzór Herona. Związek pomiędzy obwodem i polem trójkąta.

Obwód trójkąta  $\triangle ABC$  równy jest sumie długości jego boków

$$Ob = |AB| + |AC| + |CA| \quad \text{lub} \quad Ob = a + b + c$$

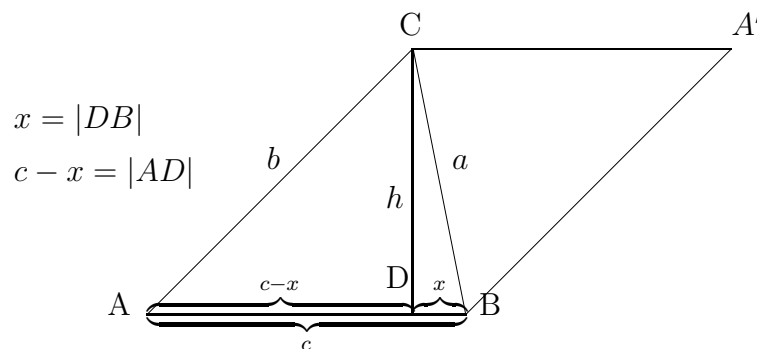
Pole trójkąta  $\triangle ABC$  obliczmy stosując wzór Herona.<sup>10</sup>

**Wzór Herona.**

$$P_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie połowa obwodu  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .

**Dowód.** Rozpatrzmy dwa trójkąty identyczne  $\triangle ABC$  i  $\triangle BA'C$ , jak na rysunku



Zauważmy, że pole równoległoboku  $ABA'C$  równe jest

$$P_{ABA'C} = c * h$$

Wysokość  $h = |DC|$  obliczamy z twierdzenia Pitagorasa. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa wynikają następujące związki  
Z trójkąta prostokątnego  $\triangle ADC$  mamy równość

$$h^2 = b^2 - (c - x)^2$$

<sup>10</sup>Wzór Herona stosujemy do trójkąta  $\triangle ABC$  o różnej długości boków

Podobnie z trójkąta prostokątnego  $\triangle DA'C$

$$h^2 = a^2 - x^2$$

Skąd obliczamy długość odcinka  $x = |AD|$

$$b^2 - (c - x)^2 = a^2 - x^2$$

$$b^2 - c^2 + 2c * x - x^2 = a^2 - x^2$$

$$2c * x = a^2 - b^2 + c^2$$

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$$

Teraz obliczamy kwadrat wysokości równoległoboku  $ABA'C$  stosując wzory uproszczonego mnożenia

$$\begin{aligned} h^2 = a^2 - x^2 &= a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right)^2 \\ &= \frac{4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4c^2} \\ &= \frac{(2ac)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4c^2} \\ &= \frac{(2ac - a^2 + b^2 - c^2)(2ac + a^2 - b^2 + c^2)}{4c^2} \\ &= \frac{(b^2 - (a - c)^2)((a + c)^2 - b^2)}{4c^2} \\ &= \frac{(b - a + c)(b + a - c)((a + c - b)(a + c + b))}{4c^2} \\ &= \frac{(a + b + c - 2a)(a + b + c - 2c)((a + b + c - 2b)(a + c + b))}{4c^2} \\ &= \frac{2(p - a)2(p - c)2(p - b)2p}{4c^2}, \quad p = \frac{a + b + c}{2} \\ &= \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{c^2}, \quad p = \frac{a + b + c}{2} \end{aligned}$$

Pole trójkąta  $\triangle ABC$  o danej długości boków równe jest połowie pola równoległoboku  $ABA'C$ . Zatem mamy wzór Herona na pole trójkąta  $\triangle ABC$

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}c * h &= \frac{c}{2} \sqrt{\frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{c^2}} \\ &= \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \end{aligned}$$

**Przykład 1.9** Oblicz obwód i pole trójkąta  $\triangle ABC$  o długości boków

$$a = |AB| = 3\text{cm}, \quad b = |CA| = 4\text{cm}, \quad c = |AB| = 5\text{cm}$$

**Rozwiązanie.** Obwód trójkąta  $\Delta ABC$  równy jest sumie długości jego boków

$$Ob = a + b + c = 3cm + 4cm + 5cm = 12cm,$$

polowa obwodu

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{3cm + 4cm + 5cm}{2} = 6cm,$$

Pole trójkąta  $\Delta ABC$  obliczamy stosując wzór Herona

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{6cm(6cm-3cm)(6cm-4cm)(6cm-5cm)} \\ &= \sqrt{6 * 3 * 2 * 1cm^4} = \sqrt{36cm^4} = 6cm^2. \end{aligned}$$

**Zadanie 1.19** Oblicz obwód i pole trójkąta  $\Delta ABC$  o długości boków

$$a = |AB| = 6cm, \quad b = |CA| = 8cm, \quad c = |AB| = 10cm$$

## 1.8 Czworokąty

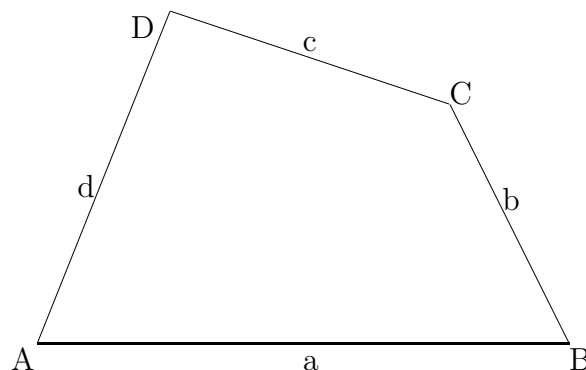
Rozpatrzmy czworokąt  $ABCD$  o wierzchołkach  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  o czterech bokach długości  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , i o kącie  $\angle ABC$  o wierzchołku  $B$ , kącie  $\angle BCD$  o wierzchołku  $C$ , kącie  $\angle CDA$  o wierzchołku  $D$ .

Suma długości dowolnie wybranych trzech boków czworokąta jest nie mniejsza od długości boku czwartego, piszemy

$$|AB| + |BC| + |CD| \geq |AD|.$$

Suma kątów czworokąta równa jest  $360^0$ , w mierze łukowej  $2\pi$ , piszemy

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 360^0$$



**Zadanie 1.20** Zmierz boki i kąty tego czworokąta. Oblicz obwód i sumę kątów czworokąta czworokąt  $ABCD$ .

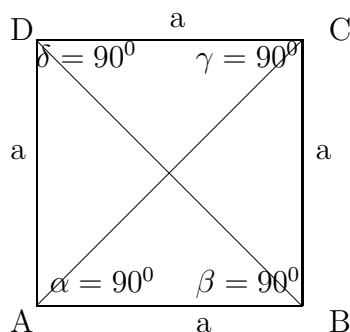
Rozpatrzmy następujące czworokąty

- kwadrat
- prostokąt
- trapez
- równoległobok
- romb
- deltoid
- czworokąt dowolny
- okrąg wpisany i okrąg opisany na czworokącie

11

### 1.8.1 Czworokąt foremny. Kwadrat.

Kwadrat  $ABCD$  jest figurą foremną o czterech bokach równych  $a$  i o czterech kątach prostych równych  $90^0$  lub w mierze łukowej  $\frac{\pi}{2}$ .



Kwadrat ma dwie przekątne  $AC$  i  $BD$ , które przecinają się pod kątem prostym równym  $90^0$  lub w mierze łukowej  $\frac{\pi}{2}$ . Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość przekątnej

$$|AC|^2 = |BC|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, \quad |AC| = |BC| = a\sqrt{2}.$$

Promień okręgu wpisanego w kwadrat równy jest połowie boku

$$r = \frac{a}{2}$$

---

<sup>11</sup>Konstrukcja kwadratu przy pomocy cyrkla i linijki opisana jest w projekcie *Figury podstawowe. Konstrukcja*.

Promień okręgu opisanego na kwadracie równy jest połowie przekątnej

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Pole kwadratu

$$P_{ABCD} = a * a^2, \quad \text{obwód kwadratu } Ob = 4 * a.$$

**Zadanie 1.21** Oblicz obwód  $Ob$  i pole  $P$  kwadratu, długość przekątnych, promień  $r$  okręgu wpisanego w kwadrat i promień  $R$  okręgu opisanego na kwadracie, jeżeli bok kwadratu ma długość  $a = 4$ .

### 1.8.2 Prostokąt.

Prostokąt  $ABCD$  ma cztery boki parami równe

$$a = c, \quad b = d,$$

i cztery kąty proste równe  $90^0$

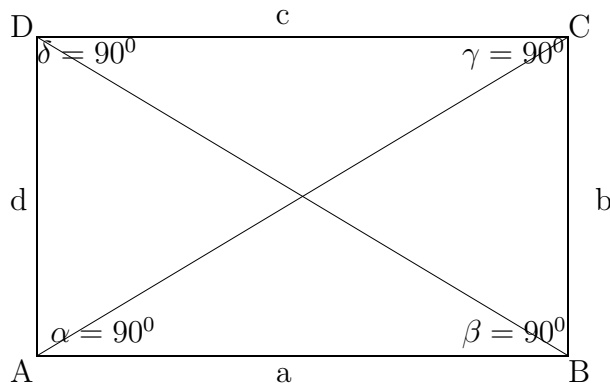
Z twierdzenia Pitagorasa obliczmy przekątne prostokąta

$$|AC| = |BD| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pole prostokąta

$$P_{ABCD} = a * b.$$

Obwód prostokąta  $Ob = 2 * a + 2 * b$



Okrąg opisany na prostokącie ma promień  $R$  równy połowie przekątnych

$$R = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Natomiast nie istnieje okrąg wpisany w prostokąt, z wyjątkiem kwadratu, który jest szczególnym prostokątem o bokach równych.

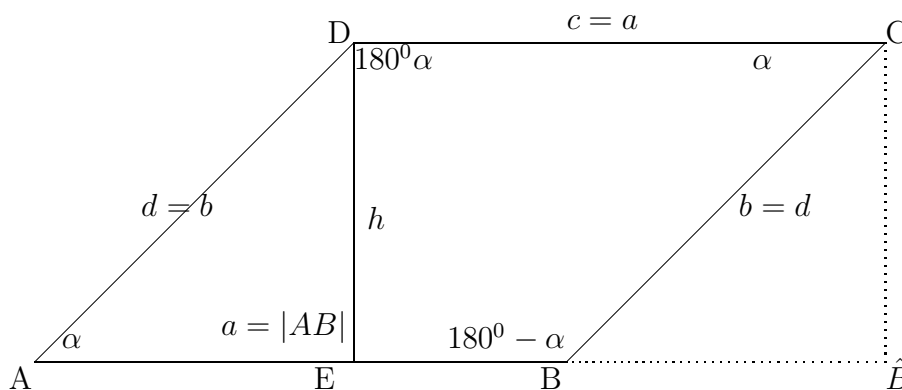
### 1.8.3 Równoległobok.

Równoległobok  $ABCD$  ma cztery boki parami równe

$$a = c, \quad b = d$$

i cztery kąty parami równe

$$\alpha = \angle DAB = \angle BCD, \quad 180^\circ - \alpha = \angle ABC = \angle CDA.$$



Wysokość równoległoboku oznaczamy literą  $h$ .

Pole równoległoboku

$$P_{ABCD} = a * h.$$

Istotnie, zauważmy, że pole równoległoboku  $ABCD$  równe jest polu prostokąta  $E\hat{B}CD$ . To znaczy, że

$$P_{A\hat{B}CD} = P_{ABCD} = a * h.$$

i obwód równoległoboku

$$Ob = 2 * a + 2 * b.$$

### 1.8.4 Romb.

Romb  $ABCD$  ma cztery boki równe

$$a = |AB| = |BC| = |CD|$$

i cztery kąty parami równe

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta.$$

Wysokość rombu oznaczamy literą  $h$ .

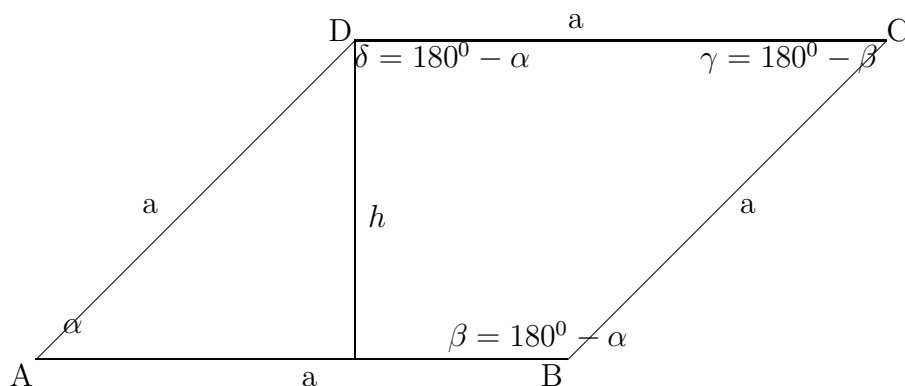
Zauważmy, że obwód rombu

$$Ob = 4 * a.$$

Pole rombu

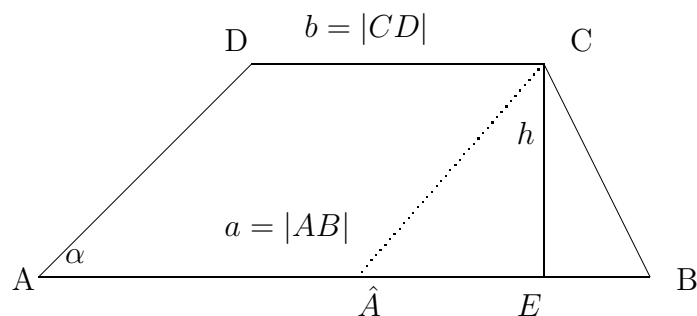
$$P = a * h.$$





### 1.8.5 Trapez

Trapez  $ABCD$



jest czworokątem o długości podstawy dolnej  $a = |AB|$  równoległym do podstawy górnej o długości  $b = |CD|$ .

Pole trapezu

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(a + b) * h.$$

Istotnie, zauważmy, że pole trapezu  $P_{ABCD}$  równe jest sumie pola równoległoboku

$$\hat{P}_{AECD} = (b * h)$$

i pola trójkąta

$$P_{\hat{A}BC} = \frac{1}{2}(a - b) * h.$$

Zatem pole trapezu

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \hat{P}_{AECD} + P_{\hat{A}BC} \\ &= b * h + \frac{1}{2}(a - b) * h \\ &= \frac{1}{2}(a + b) * h \end{aligned}$$

Obwód trapezu

$$Ob = |AB| + |BC| + |CD| + |AC|.$$

12

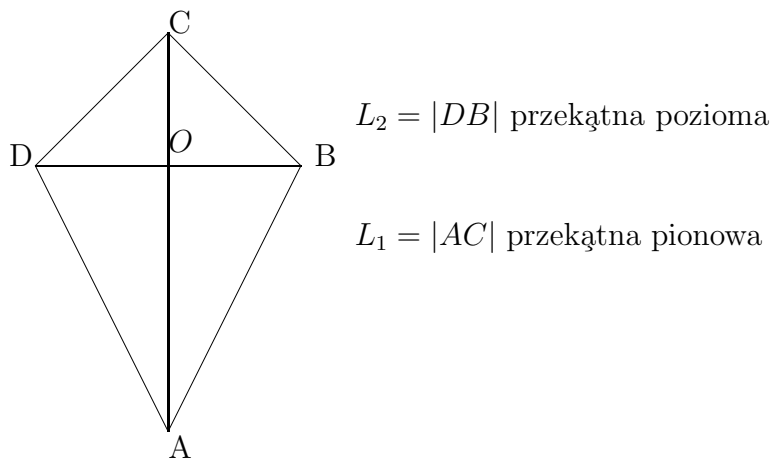
### 1.8.6 Deltoid.

Deltoid jest czworokątem o równych bokach parami

$$|AB| = |AD|, \quad |CD| = |BC|$$

i o kątach  $\angle ADC = \angle ABC$

Deltoid ma dwie prostopadłe przekątne  $L_1$  i  $L_2$ , jedna z nich jest symetralną drugiej, jak niżej na rysunku



Pole deltoidu równe jest połowie iloczynu przekątnych

$$P_{Deltoid} = \frac{1}{2} L_1 * L_2$$

Istotnie, zauważamy, że pole deltoidu  $P_{ABCD}$  równe jest sumie pól trójkątów  $\triangle ABD$  i  $\triangle BCD$

$$\begin{aligned}
 P_{Deltoid} = P_{ABD} + P_{DBC} &= \frac{1}{2} L_2 * |AO| + \frac{1}{2} L_2 * |OC| \\
 &= \frac{1}{2} (|AO| + |OC|) \\
 &= \frac{1}{2} * \underbrace{L_1}_{L_1} * L_2.
 \end{aligned}$$

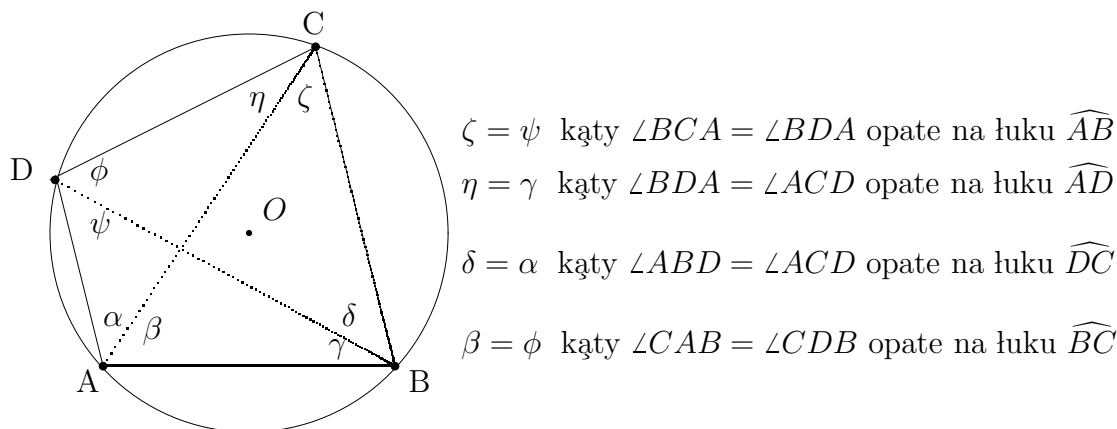
13

<sup>12</sup>Twierdzenie o okręgu opisanym na czworokącie i wpisanym w czworokąt jest opisane w paragrafie o czworokątach Twierdzenie to dotyczy wszystkich czworokątów w tym trapezów

<sup>13</sup>Twierdzenie o okręgu opisanym na czworokącie i wpisanym w czworokąt jest opisane w paragrafie o czworokątach Twierdzenie to dotyczy wszystkich czworokątów w tym deltoidu

### 1.8.7 Okrąg opisany na czworokącie.

Nie na każdym czworokącie można opisać okrąg i nie w każdy czworokąt można wpisać okrąg. Warunki istnienia okręgu opisanego na czworokącie i okręgu wpisanego w czworokąt podamy niżej. Mianowicie rozpatrzmy czworokąt  $ABCD$  wpisany okręgu o promieniu  $R$  i środku w punkcie  $O$ .



$\zeta = \psi$  kąty  $\angle BCA = \angle BDA$  oparte na łuku  $\widehat{AB}$   
 $\eta = \gamma$  kąty  $\angle BDA = \angle ACD$  oparte na łuku  $\widehat{AD}$   
 $\delta = \alpha$  kąty  $\angle ABD = \angle ACD$  oparte na łuku  $\widehat{DC}$   
 $\beta = \phi$  kąty  $\angle CAB = \angle CDB$  oparte na łuku  $\widehat{BC}$

Jak wiemy, kąty środkowe oparte na tym samym łuku są równe. Zatem zauważamy na rysunku, że

$$\begin{aligned} \zeta &= \psi \text{ oparte na łuku } \widehat{AB} \\ \eta &= \gamma \text{ oparte na łuku } \widehat{AD} \\ \delta &= \alpha \text{ oparte na łuku } \widehat{DC} \\ \beta &= \phi \text{ oparte na łuku } \widehat{BC} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Warunek konieczny i wystarczający na to, żeby można było opisać okrąg na danym czworokącie o wierzchołkach  $A, B, C, D$  podamy w formie następującego twierdzenia

**Twierdzenie 1.4** *Na czworokącie  $ABCD$  o wierzchołkach  $A, B, C, D$  można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma kątów naprzeciwległych jest równa*

$$\angle ABC + \angle CDA = \angle BCA + \angle DAB \tag{1.6}$$

<sup>14</sup> **Dowód.** Dowód twierdzenia wynika z równości (1.5) kątów  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \zeta$ , które tworzą przekątne z bokami czworokąta. Teraz sprawdzamy równość (1.6)

<sup>14</sup>Tutaj  $\angle ABC$  oznacza kąt o wierzchołku  $B$  i ramionach  $[A, B]$  i  $[A, D]$ .

$$\begin{aligned}
\angle ABC + \angle CDA &= \underbrace{(\delta + \gamma)}_{\angle ABC} + \underbrace{(\phi + \psi)}_{\angle CDA} \\
&= (\alpha + \eta) + (\beta + \zeta) \\
&= \underbrace{(\alpha + \beta)}_{\angle DAC} + \underbrace{(\eta + \zeta)}_{\angle BCD} \\
&= \angle BCA + \angle DAB
\end{aligned}$$

Wzór na pole czworokąta opisanego na okręgu

$$P_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

gdzie długości boków

$$a = |AB|, \quad b = |BC|, \quad c = |CD|, \quad d = |DA|,$$

a litera  $p$  oznacza połowę obwodu czworokąta

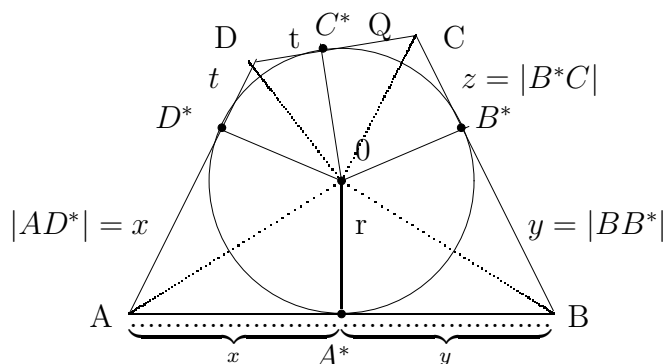
$$p = \frac{1}{2}(a + b + c + d) = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CD| + |AD|).$$

### 1.8.8 Okrąg wpisany w czworokąt

Opis okręgu wpisanego w czworokąt o wierzchołkach  $A, B, C, D$  zacznijmy od następujących obserwacji:

- (a) Boki czworokąta są styczne do okręgu wpisanego w punktach styczności  $A^*, B^*, C^*, D^*$   
(b) Styczne do okręgu poprowadzone z wierzchołków czworokąta wyznaczają odcinki parami równej długości, piszemy

$$\begin{aligned}
x = |AA^*| = |AD^*|, & \quad y = |A^*B| = |BC^*| \\
z = |B^*C| = |CC^*|, & \quad t = |C^*D| = |DD^*|
\end{aligned} \tag{1.7}$$



Warunek konieczny i wystarczający na to, żeby można było wpisać okrąg w

danym czworokąt o wierzchołkach  $A, B, C, D$  podamy w formie następującego twierdzenia

**Twierdzenie 1.5** *W czworokąt  $ABCD$  o wierzchołkach  $A, B, C, D$  można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma długości sumy boków naprzeciwległych jest równa*

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC| \quad (1.8)$$

**Dowód.** Dowód twierdzenia wynika z własności (a) i (b) stycznej do okręgu i z równości (1.7), parami równych boków naprzeciwległych. Mianowicie, sprawdzamy, że lewa strona równości (1.8)

$$\begin{aligned} |AB| + |CD| &= \underbrace{(x + y)}_{\text{bok } |AB|} + \underbrace{(z + t)}_{\text{bok } |CD|} \\ &= \underbrace{(x + t)}_{\text{bok } |AD|} + \underbrace{(y + z)}_{\text{bok } |BC|} \\ &= |AD| + |BC|, \end{aligned}$$

równa jest prawej stronie równości (1.8).<sup>15</sup>

**Pole czworokąta i promień okręgu wpisanego w czworokąt.** Zauważmy, że promień  $r$  okręgu wpisanego w czworokąt jest równy z wysokościami trójkątów

$$\triangle AOB, \quad \triangle BCO, \quad \triangle DCO, \quad \triangle DAO$$

spuszczonymi na boki

$$[A, B], \quad [B, C], \quad [C, D], \quad [D, A]$$

czworokąta  $ABCD$ .

Zatem pola tych trójkątów są równe odpowiednio

$$P_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}r * |AB|$$

$$P_{\triangle BCO} = \frac{1}{2}r * |BC|$$

$$P_{\triangle CDO} = \frac{1}{2}r * |CD|$$

$$P_{\triangle DAO} = \frac{1}{2}r * |DA|$$

Pole czworokąta  $ABCD$  równe jest sumie pól czterech trójkątów, piszemy

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{\triangle ABO} + P_{\triangle BCO} + P_{\triangle CDO} + P_{\triangle DAO} \\ &= \frac{1}{2}r * |AB| + \frac{1}{2}r * |BC| + \frac{1}{2}r * |CD| + \frac{1}{2}r * |DA| \\ &= \frac{1}{2}r(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|) \\ &= r * p \end{aligned}$$

<sup>15</sup>Tutaj korzystamy z łączności dodawania

gdzie litera  $p$  oznacza połowę obwodu czworokąta  $ABCD$ .

$$p = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|).$$

### 1.8.9 Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny oparty na średnicy  $AB$  okręgu. Z twierdzenia Pitagorasa wynika związek pomiędzy bokami trójkąta prostokątnego

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

Związek ten implikuje inne miary w trójkątach prostokątnych, równoramiennych i równobocznych.

Zauważmy, że trójkąty

$$\Delta ABC, \quad \Delta ADC, \quad \Delta DBC$$

są podobne. Zatem na przeciw równych kątów mają proporcjonalne boki. Z proporcji

$$\frac{h}{|AD|} = \frac{|DB|}{h}$$

lub

$$h^2 = |AD| * |DB|$$

wynika, że wysokość  $h$  równa jest średniej geometrycznej rzutów przyprostokątnych na przeciwprostokątną. To znaczy

$$h = \sqrt{|AD| * |DB|}$$

## 1.9 Zastosowanie iloczynu wektorowego do obliczania pola czworokąta dowolnego.

Pole dowolnego czworokąta  $ABCD$  o danych wierzchołkach  $A, B, C, D$  we współrzędnych kartezjańskich możemy obliczyć stosując iloczyn wektorowy w przestrzeni kartezjańskiej  $R^3$  cf. (1.9)

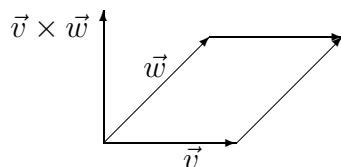
### 1.9.1 Iloczyn wektorowy w przestrzeni trójwymiarowej $R^3$

Naturalnie iloczyn wektorowy wykonalny jest w przestrzeni kartezjańskiej trójwymiarowej i opisany jest w rozdziale geometrii przestrzennej. W tym rozdziale, geometrii płaskiej, stosujemy iloczyn wektorowy do obliczania pola czworokąta dowolnego. Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad i \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

w przestrzeni trójwymiarowej

$$R^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty\}$$



Wynikiem mnożenia wektorowego wektora  $\vec{v}$  przez wektor  $\vec{w}$  jest trzeci wektor  $\vec{v} \times \vec{w}$ , którego współrzędne obliczamy z rozwinięcia Laplace'a macierzy utworzonej ze współrzędnych wektorów

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Mianowicie iloczyn

$$\vec{v} \times \vec{w} = \left[ \text{Det} \begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix}, -\text{Det} \begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix}, \text{Det} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} \right]$$

gdzie wyznaczniki -determinants

$$\begin{aligned} \text{Det} \begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix} &= v_2 * w_3 - v_3 * w_2, \\ -\text{Det} \begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix} &= -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), \\ \text{Det} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} &= v_1 * w_2 - v_2 * w_1 \end{aligned}$$

Skąd otrzymamy wzór na współrzędne iloczynu wektorowego

$$\vec{v} \times \vec{w} = [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]. \quad (1.9)$$

Wektor  $\vec{v} \times \vec{w}$  jest prostopadły do wektorów  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$ , piszemy

$$\vec{v} \times \vec{v} \perp \vec{w}, \quad \vec{w} \times \vec{v} \perp \vec{w}$$

Wiemy, że wektory są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, jeżeli ich iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

równy jest zero.

Zatem, sprawdzamy iloczyn skalarny

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}) &= ([v_1, v_2, v_3], [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]) \\ &= v_1(v_2 * w_3 - v_3 * w_2) - v_2(v_1 * w_3 - v_3 * w_1) + v_3(v_1 * w_2 - v_2 * w_1) \\ &= (v_1 v_2 w_3 + v_2 v_3 w_1 + v_3 v_1 w_2) - (v_1 v_3 w_2 + v_2 v_1 w_3 + v_3 v_2 w_1) = 0 \end{aligned}$$

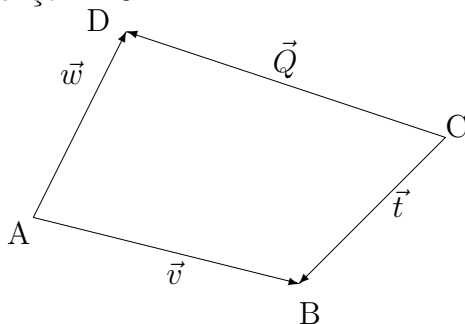
Długość wektora  $\vec{v} \times \vec{w}$  równa jest polu równoległoboku o bokach  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$ .

<sup>16</sup> Zatem długość wektora

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{|v_2 * w_3 - v_3 * w_2|^2 + |-(v_1 * w_3 - v_3 * w_1)|^2 + |v_1 * w_2 - v_2 * w_1|^2}$$

### 1.9.2 Pole czworokąta. Przykłady

Rozpatrzmy czworokąt  $ABCD$



o wierzchołkach

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3)$$

$$C = (c_1, c_2, c_3), \quad D = (d_1, d_2, d_3)$$

rozpięty na wektorach

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = \vec{AB}, \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = \vec{AD},$$

$$\vec{Q} = [z_1, z_2, z_3] = \vec{CB}, \quad \vec{t} = [t_1, t_2, t_3] = \vec{CD},$$

gdzie współrzędne wektorów  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$ ,  $\vec{Q}$ ,  $\vec{t}$  określamy przez różnice współrzędnych wierzchołków  $A, B, C, D$  czworokąta  $ABCD$

$$v_1 = b_1 - a_1, \quad v_2 = b_2 - a_2, \quad v_3 = b_3 - a_3,$$

$$w_1 = d_1 - a_1, \quad w_2 = d_2 - a_2, \quad w_3 = d_3 - a_3,$$

$$z_1 = b_1 - c_1, \quad z_2 = b_2 - c_2, \quad z_3 = b_3 - c_3,$$

$$t_1 = d_1 - c_1, \quad t_2 = d_2 - c_2, \quad t_3 = d_3 - c_3.$$

Stosując iloczyn wektorowy (cf. (1.9)) możemy obliczyć pole dowolnego czworokąta o danych współrzędnych jego wierzchołków. Mianowicie, pole czworokąta wypukłego  $ABCD$  równe jest połowie sumy iloczynu wektorowego wektorów <sup>17</sup>

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \vec{v} \times \vec{w} + \frac{1}{2} \vec{Q} \times \vec{t} \quad (1.10)$$

<sup>16</sup>Długość iloczynu wektorowego  $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| * |\vec{w}| * \cos \alpha$ , gdzie  $\alpha$  oznacza kąt pomiędzy wektorami  $\vec{v}, \vec{w}$ . Pole czworokąta  $P_{ABCD} = |\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| * |\vec{w}| * \cos \alpha$  równe jest długości iloczynu wektorowego.

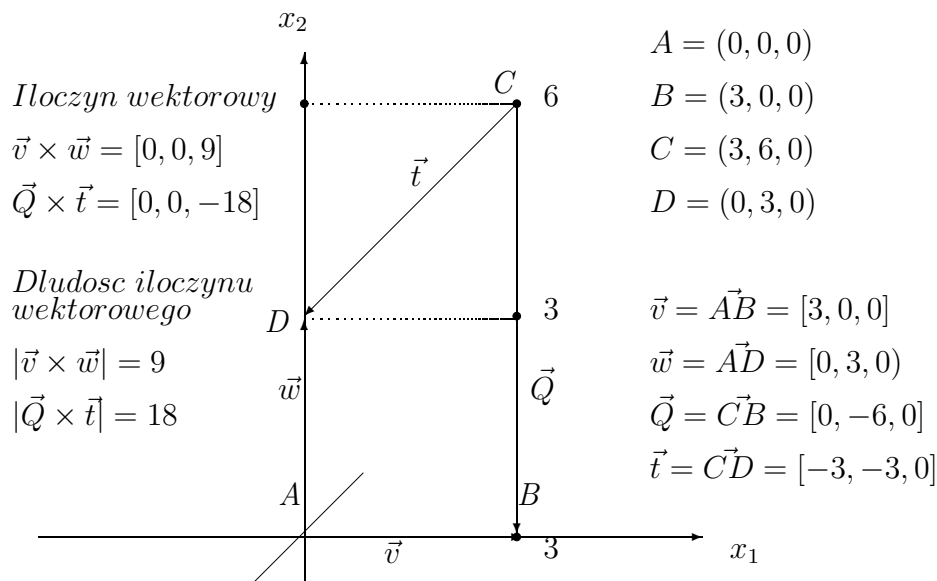
<sup>17</sup>Pole czworokąta wklęsłego równe jest różnicy iloczynów wektorowych  $P_{ABCD} = \frac{1}{2} \vec{v} \times \vec{w} - \frac{1}{2} \vec{Q} \times \vec{t}$



**Przykład 1.10** Oblicz pole czworokąta  $ABCD$  rozpiętego na wektorach

$$\vec{v} = [3, 0, 0] = \vec{AB}, \quad \vec{w} = [0, 3, 0] = \vec{AD},$$

$$\vec{Q} = [0, -6, 0] = \vec{CB}, \quad \vec{t} = [-3, -3, 0] = \vec{CD}$$



Obliczamy iloczyny wektorowe  $\vec{v} \times \vec{w}$  i  $\vec{Q} \times \vec{t}$  stosując wzory (cf. (1.9))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 3 * 0, -(3 * 0 - 0 * 0), 3 * 3 - 0 * 0] \\ &= [0, 0, 9] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{Q} \times \vec{t} &= [-6 * 0 - 3 * 0, -(0 * 0 - 3 * 0), 0 * 3 - 6 * 3] \\ &= [0, 0, -18] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta  $ABCD$  jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  i  $\vec{Q}$ ,  $\vec{t}$ .

Mianowicie

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2} |\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2} |\vec{Q} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 9^2} + \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 0^2 + (-18)^2} \\ &= \frac{1}{2} * 9 + \frac{1}{2} * 18 \\ &= 4.5 + 9 = 13.5 \end{aligned}$$

Rozpatrzmy inny przykład obliczania pola czworokąta stosując iloczyn wektorowy.

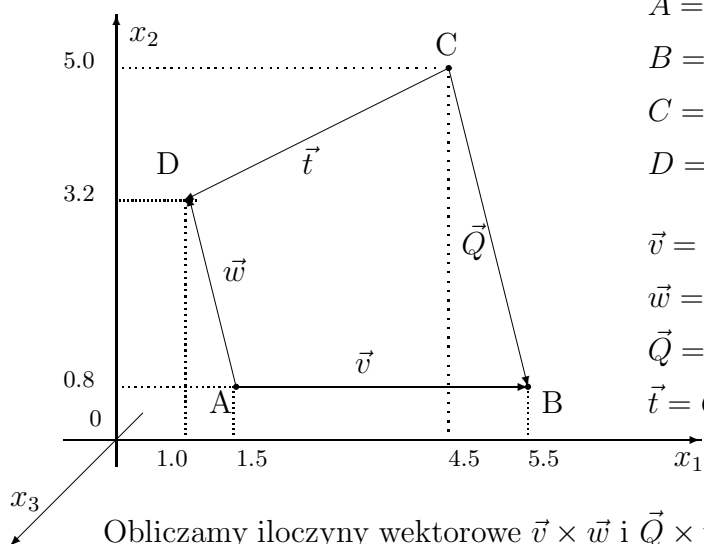
**Przykład 1.11** Oblicz pole czworokąta  $ABCD$  rozpiętego na wektorach

$$\vec{v} = [4.0, 0, 0] = \vec{AB},$$

$$\vec{w} = [-0.5, 2.4, 0] = \vec{AD},$$

$$\vec{Q} = [-1.0, 4.2, 0] = \vec{CB},$$

$$\vec{t} = [-3.5, -1.8, 0] = \vec{CD}$$



$$A = (1.5, 0.8, 0)$$

$$B = (5.5, 0.8, 0)$$

$$C = (4.5, 5.0, 0)$$

$$D = (1.0, 3.1, 0)$$

$$\vec{v} = \vec{AB} = [4.0, 0, 0]$$

$$\vec{w} = \vec{AD} = [-0.5, 2.4, 0]$$

$$\vec{Q} = \vec{CB} = [-1.0, 4.2, 0]$$

$$\vec{t} = \vec{CD} = [-3.5, -1.8, 0]$$

Obliczamy iloczyny wektorowe  $\vec{v} \times \vec{w}$  i  $\vec{Q} \times \vec{t}$  stosując wzory (cf. (1.9))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 0 * 2.4, -(4 * 0 + 0.5 * 0), 4 * 2.4 + 0.5 * 0] \\ &= [0, 0, 9.6] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{Q} \times \vec{t} &= [4.2 * 0 + 1.8 * 0, -((-1) * 0 - (-3.5) * 0), 1 * 1.8 + 4.2 * 3.5] \\ &= [0, 0, 16.5] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta  $ABCD$  jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  i  $\vec{Q}$ ,  $\vec{t}$ .

<sup>18</sup>Długość wektora  $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$  o współrzędnych  $v_1, v_2, v_3$  w przestrzeni kartezjańskiej  $R^3$  obliczymy ze wzoru  $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Mianowicie

$$\begin{aligned}
 P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{Q} \times \vec{t}| \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 9.6^2} + \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 16.5^2} \\
 &= \frac{1}{2} * 9.6 + \frac{1}{2} * 16.5 \\
 &= 4.8 + 8.25 = 13.05
 \end{aligned}$$

19

**Zadanie 1.22** Oblicz długości wektorów

$$(i) \quad \vec{v} = [3, 0, 4], \quad \vec{w} = [8, -6, 0]$$

(ii) Oblicz iloczyn wektorowy  $\vec{v} \times \vec{w}$  wektorów

$$\vec{v} = [3, 0, 4], \quad \vec{w} = [8, -6, 0]$$

(iii) Sprawdź, że wektory

$$\vec{v} \perp \vec{w} \times \vec{w}$$

są prostopadłe.

**Zadanie 1.23** Sprawdź, że wektor

$$\vec{w} = [w_1, w_2, 0]$$

jest prostopadły do wektora

$$\vec{v} \times \vec{w},$$

gdzie wektor

$$\vec{v} = [v_1, v_2, 0]$$

## 1.10 Figury płaskie foremne

Figurami foremnymi na płaszczyźnie nazywamy figury płaskie, które mają wszystkie boki i wszystkie kąty równe.

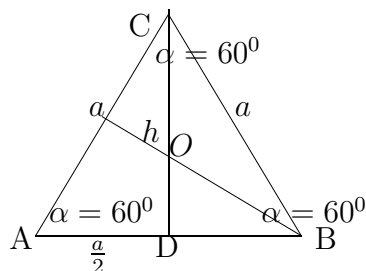
### 1.10.1 Trójkąt foremny

Trójkąt równoboczny jest trójkątem foremnym

Trójkąt równoboczny ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe  $\alpha = 60^\circ$ , w mierze łukowej  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  jak na rysunku

---

<sup>19</sup>Długość wektora  $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$  o współrzędnych  $v_1, v_2, v_3$  w przestrzeni kartezjuskiej  $R^3$  obliczmy ze wzoru  $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Trójkąt równoboczny  $\Delta ABC$ 

Wysokość  $h$  trójkąta  $\Delta ABC$  jest dwusieczną kąta  $\alpha$  i dzieli podstawę  $a$  na połowę w punkcie  $D$ . Podobnie wysokości trójkąta równobocznego spuszczone na pozostałe boki dzielą podstawę na połowy i przecinają się w punkcie  $O$ , to jest w środku okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny. Punkt przecięcia wysokości  $O$  dzieli te wysokości w stosunku  $1 : 3$ . To znaczy zachodzi następująca proporcja

$$\frac{|DO|}{|DC|} = \frac{1}{3}, \quad |DC| = h$$

Stąd mamy

$$|DO| = \frac{1}{3}h, \quad \text{ i } \quad |OC| = \frac{2}{3}h$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość  $h$  trójkąta  $\Delta ABC$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

Wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Obliczamy pole trójkąta równobocznego

$$P = h * \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

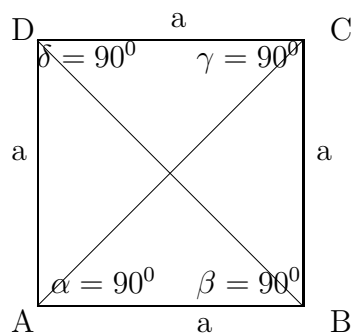
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole trójkąta równobocznego o boku  $a$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

### 1.10.2 Czworokąt foremny

Kwadrat  $ABCD$  jest figurą foremną o czterech bokach równych  $a$  i o czterech kątach prostych równych  $90^\circ$  lub w mierze łukowej  $\frac{\pi}{2}$ .



Kwadrat ma dwie przekątne  $AC$  i  $BD$ , które przecinają się pod kątem prostym równym  $90^\circ$  lub w mierze łukowej  $\frac{\pi}{2}$ . Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość przekątnej

$$|AC|^2 = |BD|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, \quad |AC| = |BD| = a\sqrt{2}.$$

Promień okręgu wpisanego w kwadrat równy jest połowie boku

$$r = \frac{a}{2}$$

Promień okręgu opisanego na kwadracie równy jest połowie przekątnej

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Pole kwadratu

$$S = a * a^2, \quad \text{obwód kwadratu } Ob = 4 * a.$$

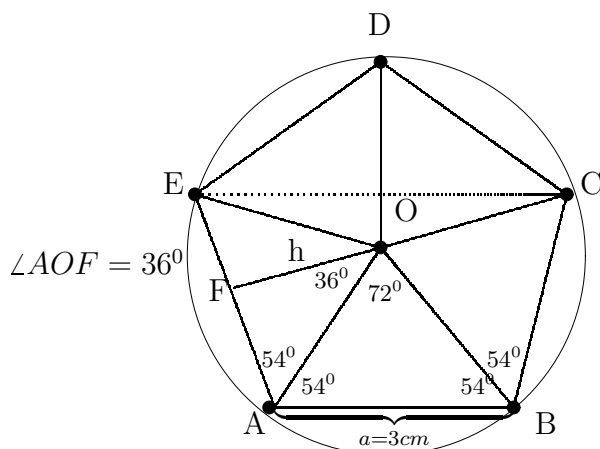
**Zadanie 1.24** Oblicz obwód, długość przekątnych i pole kwadratu o boku  $a = 4$

### 1.10.3 Pięciokąt foremny

Pięciokąt foremny o bokach równych  $a$  i kątach równych

$$\angle EAB = \alpha = 108^\circ$$

lub w mierze łukowej  $\alpha = \frac{3\pi}{5}$  ma 5 równych przekątnych.



$$\angle EAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = \alpha = 108^\circ$$

**Pole pięciokąta foremnego.** Pole pięciokąta foremnego składa się z 5 – ciu pól trójkątów równoramiennych i przystających o wysokości  $h$  i podstawie  $a$ . Pola jednego z pięciu trójkątów  $\triangle AOE$

$$P_{\triangle AOE} = \frac{1}{2} a * h$$

gdzie wysokość

$$\begin{aligned} h = \frac{1}{2} a * \operatorname{ctg} 36^\circ &= \frac{a}{2} * \frac{1}{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} \\ &= \frac{a}{2} * \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{25 - 20}} \\ &= \frac{a}{2} * \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{a}{2} * \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{5} \end{aligned}$$

Zatem pole pięciokąta foremnego o boku  $a$  obliczamy ze wzoru

$$P = 5 * P_{\triangle AOE} = 5 * \frac{1}{2} * a * h = \frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10 * \sqrt{5}}$$

*Pole pięciokąta foremnego*

**Promień okręgu opisanego na pięciokącie foremnym.** Promień  $R = |AO|$  okręgu opisanego na pięciokącie foremnym, obliczymy z trójkąta prostokątnego  $\triangle AOF$  stosując twierdzenie Pitagorasa.

Mianowicie, kwadrat promienie  $R^2$  równy jest sumie kwadratów przyprostokątnych  $|FO|^2 + |FA|^2$ , pisamy

$$\begin{aligned}
 R^2 &= \underbrace{|FO|^2}_{h^2} + |FA|^2 \\
 &= h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
 &= \underbrace{\left(\frac{a}{10} * \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\right)^2}_{h^2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{a^2}{100}(25 + 10\sqrt{5}) + \frac{25a^2}{100} \\
 &= \frac{a^2}{100}(50 + 10\sqrt{5})
 \end{aligned}$$

Skąd obliczmy promień okręgu opisanego na pięciokącie foremnym

$$\begin{aligned}
 R &= \sqrt{\frac{a^2}{100}(50 + 10\sqrt{5})} \\
 &= \frac{a}{10} \underbrace{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}_R
 \end{aligned}$$

**Promień okręgu wpisanego w pięciokąt foremny.** Promień  $r = |FO|$  okręgu wpisanego w pięciokąt foremny, obliczymy z trójkąta prostokątnego  $\triangle AOF$  stosując twierdzenie Pitagorasa.

Mianowicie, kwadrat promienie  $R^2$  równy jest sumie kwadratów przyprostokątnych  $|FO|^2 + |FA|^2$ , pisamy Zauważmy, że promień  $r = |FO| = h$  okręgu wpisanego w pięciokąt foremny równy jest

$$r = \frac{a}{10} * \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

**Przekątne pięciokąta foremnego.** Pięciokąt foremny ma 5 przekątnych równych o długości

$$\begin{aligned}
 d = |EC| &= 2a * \cos\frac{\pi}{5} \\
 &= 2a * \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \\
 &= \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})
 \end{aligned}$$

#### 1.10.4 Sześciokąt foremny

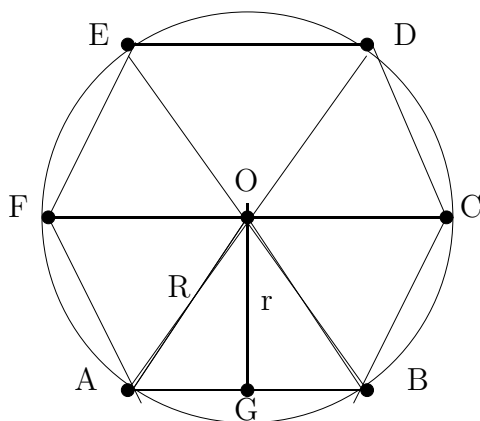
Sześciokąt foremny o sześciu bokach  $a$  równych

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FE| = a = R$$

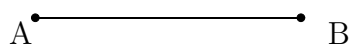
promieniowi  $R$  okręgu opisanego na sześciokącie i sześciu równych kątach

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEF = \angle EFC = \angle FAB = \alpha = 120^\circ.$$

w mierze łukowej  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ .



**Konstrukcja sześciokąta foremnego przy pomocy cyrkla i linijki.** Konstrukcja sześciokąta foremnego przy pomocy cyrkla i linijki jest bardzo prosta, najbardziej prosta ze wszystkich konstrukcji figur foremnych. Mianowicie, niech będzie dany bok sześciokąta jako odcinek  $[A, B]$



Stawiamy cyrkiel w dowolnie wybranym punkcie  $O$ , środku okręgu i rozwartością cyrkla równą odcinkowi  $[A, B]$  zakreślamy okrąg o promieniu  $R = |AB| = a$  równym bokowi sześciokąta  $ABCDEF$ .

Następnie, stawiamy cyrkiel w dowolnym punkcie okręgu  $A$  i rozwartością cyrkla  $R = a$  zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie  $B$ , dalej stawiamy cyrkiel w punkcie  $B$  i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie  $C$ , dalej stawiamy cyrkiel w punkcie  $C$  i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie  $D$ , dalej stawiamy cyrkiel w punkcie  $D$  i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie  $E$ , dalej stawiamy cyrkiel w punkcie  $E$  i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie  $F$ .

Łączymy punkty  $A, B, C, D, E, F$  na okręgu przy pomocy linijki. W ten sposób narysowaliśmy sześciokąt foremny  $ABCDEF$ .

Zauważmy, że sześciokąt foremny składa się z 6 – ciu trójkątów przystających i równobocznych obok równych  $R$  i o wszystkich kątach równych  $60^\circ \sim \frac{\pi}{3}$ .



Wszystkie z 6 – *ciu* trójkątów

$$\Delta ABO, \Delta BCO, \Delta CDO, \Delta DEO, \Delta EFO,$$

mają wysokości równe  $h = r = |OG|$  promieniowi okręgu wpisanego w sześciokąt. Wysokość  $h$  obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego  $\Delta AGO$ . Mianowicie

$$h^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4}, \quad h = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Pole sześciokąta foremnego składa się z 6-ciu pól trójkątów równobocznych o bokach równych  $a = R = |AO|$ .

Pole jednego trójkąta równobocznego równe jest

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2}a * h = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Zatem, pole sześciokąta równe jest

$$P = 6 * P_{\Delta} = 6 * \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \underbrace{\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}}_{\text{pole } P \text{ sześciokąta}}.$$

Obwód sześciokąta foremnego równy jest

$$Ob = 6 * a \quad \text{lub} \quad Ob = 6 * R, \quad \text{bo} \quad a = R.$$

### 1.10.5 Ośmiokąt foremny

Ośmiokąt foremny o ośmiu bokach równych

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FE| = |FG| = a$$

i o ośmiu równych kątach równych

$$\begin{aligned} \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE &= \angle DEF = \angle EFG = \angle FGH \\ &= \angle GHA = \angle HAB = \alpha = 135^{\circ} \end{aligned}$$

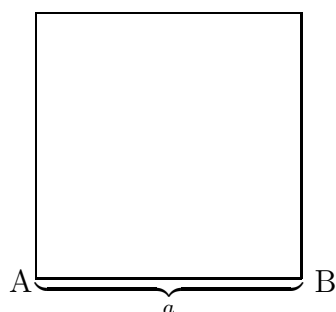
w mierze łukowej  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ .

### 1.10.6 Konstrukcja ośmiokąta foremnego.

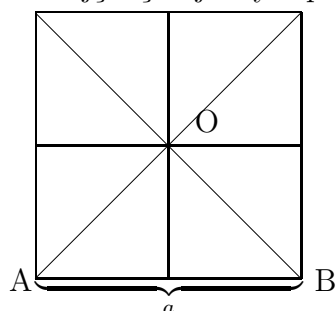
Konstrukcja ośmiokąta foremnego o danym boku wykonamy przy pomocy cyrkla i linijki.

1. Konstruujemy kwadrat o danym boku  $a = |AB|$  przy pomocy cyrkla i linijki.<sup>20</sup>

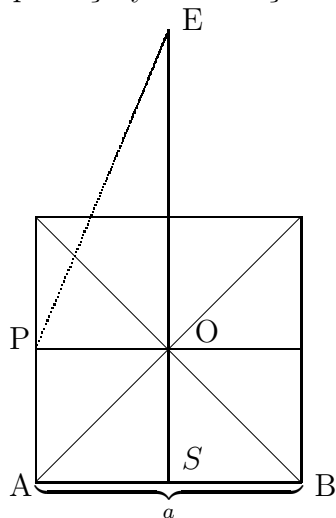
<sup>20</sup>Konstrukcje elementarne opisane w poprzednich paragrafach



2. Rysujemy przekątne i symetralne boków kwadratu. Przekątne i symetralne boków kwadratu przecinają się w jednym punkcie  $O$ .



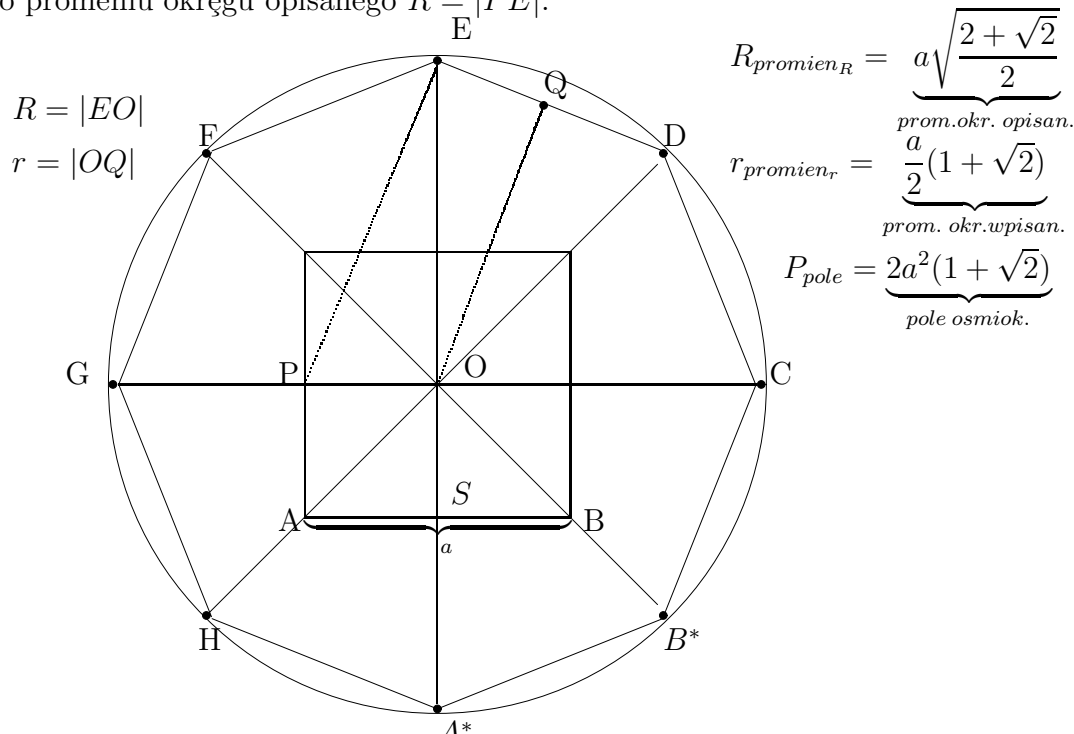
3. Na przedłużeniu symetralnej podstawy kwadratu odkładamy rozwartością cyrkla równą połowie przekątnej, to jest odcinek  $|AO|$ , stawiając cyrkiel w punkcie  $O$  przecięcia przekątnych. Literą  $E$  oznaczamy wierzchołek ośmiokąta.



4. Rozwartością cyrkla równą promieniowi  $R = |PE|$  rysujemy okrąg stawiając cyrkiel w punkcie  $O$ . Następnie przedłużamy przekątne kwadratu i środkowe boków do punktów przecięcia  $A^*, B^*, C, D, E, F, G, H$  z okręgiem, to jest do wierzchołków ośmiokąta foremnego  $A^*B^*CDEFHG$  o danym boku  $a = |AB|$ . Łączymy wierzchołki  $A^*, B^*, C, D, E, F, G, H$  ośmiokąta przy pomocy linijki. W ten sposób skonstruowaliśmy ośmiokąt foremny

$$A^*B^*CDEFHG$$

o promieniu okręgu opisanego  $R = |PE|$ .



$$R_{\text{promien}_R} = a \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}$$

prom. okr. opisan.

$$r_{\text{promien}_r} = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{2})$$

prom. okr. wpisan.

$$P_{\text{pole}} = 2a^2(1 + \sqrt{2})$$

pole osmiok.

Z konstrukcji ośmiokąta foremnego wynika, że promień  $R = |EO|$  okręgu opisanego na ośmiokącie równy jest przeciwprostokątnej  $R = |EO|$  trójkąta prostokątnego  $\triangle QEO$ .

$$\angle OEP = 22.5^\circ \sim \frac{\pi}{8}, \quad \angle EPO = 67.5^\circ \sim \frac{3\pi}{8}.$$

**Pole ośmiokąta foremnego.** Zauważmy, że ośmiokąt foremny składa się z 8 – *miu* trójkątów przystających i równoramiennych o równych ramiennych promieniowi  $R$  okręgu opisanego na ośmiokącie i o wszystkich kątach równych  $135^\circ \sim \frac{3\pi}{4}$ .

Wszystkie z 8 – *miu* trójkątów

$$\triangle A^*B^*O, \triangle B^*CO, \triangle CDO, \triangle DEO,$$

$$\triangle EFO, \triangle FGO, \triangle GHO, \triangle HA^*O$$

mają wysokości równe  $h = r = |OQ|$  promieniowi  $r = h$  okręgu wpisanego w ośmiokąt.

Stosując twierdzenia Pitagorasa do trójkąta prostokątnego  $\triangle OQE$  obliczamy kwadrat wysokości

$$\begin{aligned} h^2 = |OE|^2 - |QE|^2 &= \underbrace{\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}_{R^2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{4}(1 + \sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

Skąd obliczamy wysokości i promień okręgu wpisanego w ośmiokąt

$$h = r = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{2})$$

**Promień  $R$  okręgu opisanego na ośmiokącie.** Promień okręgu opisanego na ośmiokącie wynika z konstrukcji ośmiokąta foremnego. Jego wartość obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąt prostokątny  $\triangle OQE$ . Mianowicie kwadrat przeciwprostokątnej  $R = |EO|$  równy jest

$$\begin{aligned} R^2 = |EO|^2 &= |QO|^2 + |ES|^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a}{2}(1 + \sqrt{2})\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{4}(3 + 2\sqrt{2}) + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{2}\sqrt{2} \\ &= a^2\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

Skąd obliczamy promień okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym

$$R = a\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}$$

**Pole ośmiokąta foremnego.** Pole ośmiokąta foremnego składa się z 8 – miu pól trójkątów równoramiennych o podstawie długości  $a$  i bokach długości  $R$ . Pole jednego trójkąta równoramiennego równe jest

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2}a * h = \frac{a^2}{4}(1 + \sqrt{2})$$

Zatem, pole ośmiokąta równe jest

$$P = 8 * P_{\Delta} = 8 * \frac{a^2}{4}(1 + \sqrt{2}) = \underbrace{2a^2(1 + \sqrt{2})}_{\text{pole } P \text{ ośmiokąta}}$$

Obwód ośmiokąta foremnego równy jest  $Ob = 8 * a$ .

Promień  $r$  okręgu wpisanego w ośmiokąt i promień  $R$  okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym o danym boku, obliczymy również stosując związki trygonometryczne w trójkącie prostokątnym  $\triangle OQE$ . Mianowicie, promień okręgu wpisanego w ośmiokąt

$$r = \frac{1}{2}a * ctg \frac{\pi}{8}$$

Wartość funkcji  $ctg \frac{\pi}{8}$  obliczamy stosując tożsamość trygonometryczną

$$ctg \alpha - \frac{1}{ctg \alpha} = ctg 2\alpha$$

dla  $\alpha = \frac{\pi}{8}$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} &= \frac{\cos \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8}} - \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8} * \cos \frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{2 * \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Skąd mamy równość

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} \quad \text{lub} \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{8} - 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - 1 = 0$$

Dla  $z = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}$  znajdujemy wartość  $z$  rozwiązując równanie kwadratowe

$$z^2 - 2z - 1 = 0, \quad \text{wyznisk} \quad \Delta = 8, \quad \text{wartosc} \quad z = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Zatem  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$  i promień okręgu wpisanego w ośmiokąt foremny

$$r = \frac{1}{2} a * \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = \frac{a}{2} \underbrace{(1 + \sqrt{2})}_r$$

**Zadanie 1.25** Oblicz obwód i pole ośmiokąta foremnego  $ABCDCEFG$  o długości boku  $|AB| = 2$

**Zadanie 1.26** Mając promień  $r = 8$  ośmiokąta foremnego, oblicz promień  $R$  okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym.

**Zadanie 1.27** Mając dany bok  $a = 3\text{cm}$  oblicz promień  $r$  okręgu wpisanego i promień  $R$  okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym.

**Zadanie 1.28** Skonstruuj ośmiokąt foremnym o boku  $a = 3\text{cm}$  przy pomocy cyrkla i linijki. Zmierz promień  $r$  okręgu wpisanego w ośmiokąt i promień  $R$  okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym.

**Zadanie 1.29** (i) Oblicz obwód i pole trójkąta  $\Delta ABC$  o długości boków

$$|AB| = 10, \quad |BC| = 8, \quad |AC| = 6$$

(ii) Sprawdź czy trójkąt  $\Delta ABC$  jest prostokątny.

**Zadanie 1.30** Oblicz obwód i pole trójkąta  $\Delta ABC$  o długości boków

$$|AB| = 3, \quad |BC| = 5, \quad |AC| = 7$$

stosując wzór Herona

**Zadanie 1.31** *Oblicz obwód i pole równoległoboku  $ABCD$  o długości boków*

$$|AB| = |CD| = 4, \quad |BC| = |AD| = 5,$$

*stosując wzór Herona*

**Zadanie 1.32** *Oblicz obwód i pole sześciokąta foremnego  $ABCDEF$  o długości boku  $|AB| = 5$*