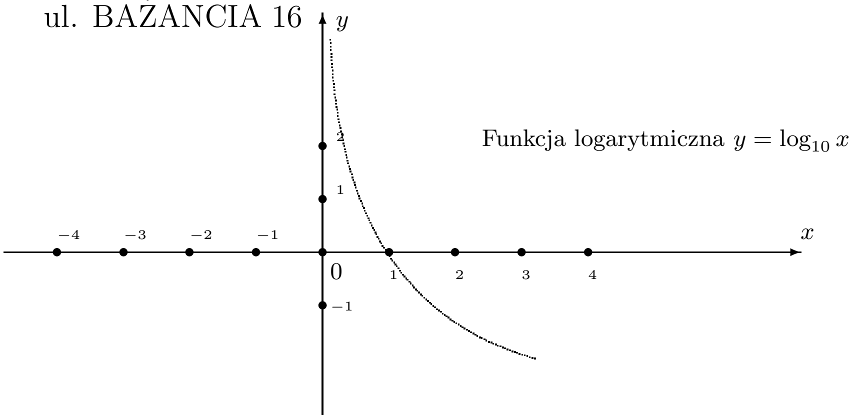
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16



Wykres funkcji logarytmicznej, gdy $a = 10 > 1$

Funkcja logarytmiczna [1]

Tadeusz STYŠ

WARSZAWA 2020

[1]Rozdział 14. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.

Contents

Chapter 1

Funkcja logarytmiczna

Funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej. To znaczy, jeżeli funkcja wykładnicza ustala zależność zmiennej y od zmiennej x wzorem

$$y = a^x, \qquad a > 0, \;\; a \neq 1$$

to funkcja odwrotna ustala zależność zmiennej x od zmiennej y wzorem

$$x = log_a\, y, \qquad y > 0.$$

Wtedy stałą $a > 0, \;\; a \neq 1$ lub $0 < a < 1$ nazywamy podstawą logarytmu.
Zatem dziedziną funkcji logarymicznej jest zbiòr wartości fynkcji wykładniczej

$$D = \{y : \; 0 < y < \infty\}$$

natomiast zbiorem wartości fnkcji logarytmicznej jest dziedzina funkcji wykładnczej

$$R = \{x : \; 0 < x < \infty\}$$

Na przykład logarytm dziesiętny, gdy $a = 10$ piszemy

$$x = log_{10}\, y, \qquad dla \;\; y > 0$$

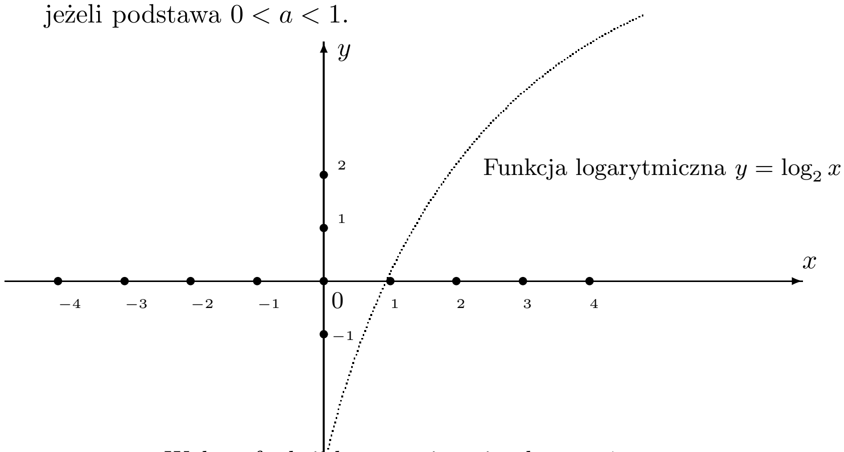
Logarytm dziesiętny jest związany z systemem liczbowym pozycyjnym dziesiętnym standardowym. Bez istotnej zmiany, możemy zamienić role zmiennych x i y. Mianowicie, zmienną niezależną oznaczamy literą x, natomiast zmienną zależną oznaczamy literą y, ktòra zależy od x.

Logarytm dziesiętny, jako standardowy, oznaczamy symbolem

$$y = log\; x, \qquad x > 0,$$

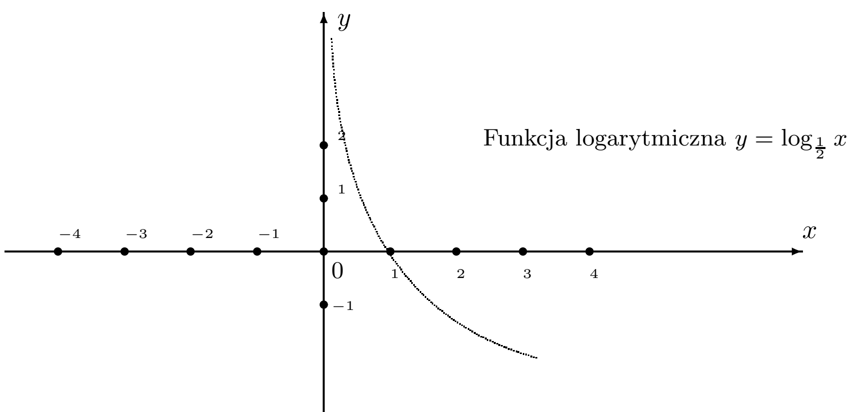
bez pisania podstawy logarytmy 10.

Funkcja logarytmiczna jest rosną dla podstawy większej od jedności $a > 1$, jest malejąca, jeżeli podstawa $0 < a < 1$.



Wykres funkcji logarytmicznej, gdy $a > 1$

Wykres funkcji logarytmicznej malejąca dla podstawy logarytmu $0 < a = \frac{1}{2}$.



Wykres funkcji logarytmicznej, gdy $0 < a = \frac{1}{2} < 1$

1.1 Logarytm naturalny

Logarytme naturalny jest odwrotą funkcją do funkcj potęgowej

$$y = e^x, \qquad lub \qquad y = Exp[x], \qquad -\infty < x < \infty.$$

Tutaj podstawa

$$e = 2,718281828459045235360287471352662497757247093699995...;$$

jest liczbą rzeczywistą o nieskończonej ilości cyfr.

1.1.1 Własności funkcji logarytmicznej

1. Wartość funkcji logarytmicznej

$$y = g(x) = \log_a x$$

dla $x = 1$ równa jest zero.

$$g(1) = log_a\ 1 = 0, \quad poniewaz\ \ a^0 = 1, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1.$$

2. Wartość funkcji logarytmicznej

$$y = g(a) = \log_a x$$

dla $x = a$ równa jest jeden.

$$g(a) = log_a = 1, \quad poniewaz\ \ a^1 = a, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1.$$

3. funkcja logarytmiczna od iloczynu argumentów równa jest sumie wartości

$$log_a\ x * t = log_a x + log_a\ t, \ \ x > 0, \ \ t > 0, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1.$$

W symbolach ogólnych tą własność piszemy

$$g(x) = \log_a\ x, \ \ g(x * t) = g(x) + g(t), \ \ x > 0, \ \ t > 0.$$

Istotnie sprawdzamy, że

$$\begin{array}{lll} y_1 = log_a\ x, & to & x = a^{y_1}, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1, \\ y_2 = log_a\ t, & to & t = a^{y_2}, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1. \end{array}$$

Skąd znajdujemy

$$\begin{array}{lll} x * t & = & a^{y_1} * a^{y_2} = a^{y_1 + y_2}, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1. \\ log_a\ x * t & = & \log_a\ a^{y_1 + y_2} = y_1 + y_2 = log_a\ x + log_a\ \ t \end{array}$$

4. funkcja logarytmiczna od ilorazu argumentów równa jest różnicy wartości

$$log_a\ \frac{x}{t} = log_a\ x - log_a\ t, \ \ x > 0, \ \ t > 0, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1.$$

W symbolach ogólnych tą własność piszemy

$$g(x) = \log_a\ x, \ \ g(\frac{x}{t}) = g(x) - g(t), \ \ x > 0, \ \ t > 0.$$

Istotnie sprawdzamy, że

$$\begin{array}{lll} y_1 = log_a\ x, & to & x = a^{y_1}, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1, \\ y_2 = log_a\ t, & to & t = a^{y_2}, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1. \end{array}$$

Skąd znajdujemy

$$\begin{array}{lll} \frac{x}{t} & = & \frac{a^{y_1}}{a^{y_2}} = a^{y_1 - y_2}, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1. \\ log_a\ \frac{x}{t} & = & \log_a\ a^{y_1 - y_2} = y_1 - y_2 = log_a\ x - log_a\ \ t \end{array}$$

5. funkcja logarytmiczna od argumentu x^k, $k = 0, 1, 2, , 3, ..., ;$ równa jest iloczynowi wykładnika potęgi k razy logarytm podstawy potęgi x

$$log_a\ x^k = k * log_a x, \quad x > 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

Własność ta bezporednio wynika z własności 2 o logarytmie z iloczynu. Mianowicie

$$log_a\ x^k = \underbrace{\log_a\ x * x * \cdots * x}_{k} = \underbrace{\log_a\ x + \log_a\ x + \cdots + log_a\ x}_{k} = k * \log_a\ x$$

6. funkcja logarytmiczna od argumentu $x^{\frac{m}{n}}$ równa jest logarytmowi

$$\log\ x^{\frac{m}{n}} = m * \log\ \sqrt[n]{x}$$

Mianowicie sprawdzamy korzystając z własności funkcji logarytmiczej i wykładniczej

$$\log_a\ x^{\frac{m}{n}} = \underbrace{\log_a\ \sqrt[n]{x} + \log_a\ \sqrt[n]{x} + \cdots + log_a\ \sqrt[n]{x}}_{m} = m * \log_a\ \sqrt[n]{x}.$$

7. Przy założeniach $a > 0,\ a \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1,\ b > 0$, możemy zmienić podastawę a logarytmu $log_a\ b$ na podstawę c według wzoru

$$log_a\ b = \frac{log\ _c\ b}{log_c\ a}$$

Dla sprawdzenia tego wzoru wprowadźmy oznaczenia

$$p = \log_a\ b, \quad q = \log_c\ b, \quad r = \log_c\ a$$

Z definicji logarytmu mamy

$$b = a^p, \quad b = c^q, \quad a = c^r$$

Skąd wynika równość

$$\begin{array}{ll} b = (c^r)^p, & b = c^{p*r}, \\ \log_c\ b = p * r \log_c c, & \log_c c = 1, \\ \log_c b = p * r, & \log_c b = \log_a b * \log_c a, \\ \log_a b = \dfrac{log_c b}{\log_c a}, & \end{array}$$

8. W przypadku $c = b$ zamiana podstawy z liczbą logarytminowaną b prowadzi do odwrotności logarytmu

$$log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Rzeczywiście z własności 7, dla $c = b$ mamy

$$log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}, \quad bo \quad \log_b b = 1$$

Przykład 1.1 *Oblicz logarytm*

$$(i) \quad \log_2 64, \qquad (ii) \quad \log_5 125$$

Prosto z definicji logarytmu obliczamy

$$(i) \qquad \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6, \quad bo \quad 2^6 = 64,$$

$$(ii) \qquad \log_5 125 = \log_5 5^5 = 5 \quad bo \quad 5^5 = 125.$$

Przykład 1.2 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i) \quad \frac{\log_3 625}{\log_3 5},$$
$$(ii) \quad \frac{\log_8 5}{\log_2 5},$$
$$(iii) \quad \log_2(\log_2 \sqrt{5}) - \log_2(\log_2 5),$$

Korzystając z własności logarytmów, obliczamy

$$(i) \qquad \frac{\log_3 625}{\log_3 5} = \frac{\log_3 5^4}{\log_3 5} = \frac{4\log_3 5}{\log_3 5} = 4$$
$$(ii) \qquad \frac{\log_8 5}{\log_2 5} = \frac{\log_2 5}{\log_2 8 \log_2 5} = \frac{1}{\log_2 2^3} = \frac{1}{3}$$
$$(iii) \quad \log_2(\log_2 \sqrt{5}) - \log_2(\log_2 5) = \log_2 \frac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 5} = \frac{1}{2} * \frac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 \sqrt{5}} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

Przykład 1.3 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i) \quad \log_2(\log_4\ 16),$$

$$(ii) \quad \log_3(\log_5 125).$$

Korzystając z własności logarytmów, obliczamy

$$(i) \quad \log_2(\log_4\ 16) = \log_2 2\log_4 4 = \log_2 2 = 1,$$

$$(ii) \quad \log_3(\log_5 125) = \log_3 \log_5 5^3 = \log_3 3\log_5 5 = \log_3 3 = 1,$$

Zadanie 1.1 *Oblicz logarytm*

$$(i) \quad \log_3 81, \qquad (ii) \quad \log_7 16807$$

Zadanie 1.2 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i) \quad \frac{\log_7 3125}{\log_7 5},$$
$$(ii) \quad \frac{\log_9 8}{\log_3 2},$$
$$(iii) \quad \log_3(\log_3 \sqrt{7}) - \log_3(\log_3 7),$$

Zadanie 1.3 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i) \quad \log_5(\log_5\ 3125),$$

$$(ii) \quad \log_4(\log_3 6561).$$

1.2 Równania logarytmiczne

Równanie w którym niewiadoma występuje pod znakiem logarytmu nazywa się równaniem logarytmicznym. Rozwiązując równanie logarytmiczne w pierwszej kolejności należy okre:slić dziedzinę równania. To jest ten zbiór argumentu x dla którego równanie logarytmiczne ma sense liczbowy. W dziedzinie równania logarytmicznego szukamy jego pierwiastaka. Określenie dziedziny równania jest istotne, ponieważ rozwiązując równianie orginalne przekształcamy to równania w równania o prosztrzej strukturze, które mogą mieć pierwiastki spoza dziedziny równania orginalnego, nazywane pierwiastkami obcymi. Metody rozwiązywania równań logarytmicznych oparte są na własnościach funkcji logarytmicznej i wykładniczej. Niżej na przykładach wyjaśniamy sposoby rozwiązywania równań logarytmicznych.

Przykład 1.4 *Rozwiąż równanie*

$$\log_2 x = 4$$

Rozwiązanie:
Najpierw określamy dziedzinę równania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu x. Zatem dziedziną tego równania jest zbiór $x > 0$. piszemy

$$0 < x < \infty \quad lub \quad x \in (0, \infty).$$

Z definicji logarytmu jako funkcji odwrotnej do funkcji wykładniczej wynika równość

$$x = 2^4 = 16.$$

Sprawdzamy, że rozwiązanie $x = 16 \in (0, \infty)$ należy do dziedziny równania oraz

$$\log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4, \qquad \log_2 2 = 1.$$

Przykład 1.5 *Rozwiąż równanie*

$$\log_3(5 - x) + \log_3(5 + x) = 2$$

Rozwiązanie:
Najpierw określamy dziedzinę równania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu

$$5 - x > 0 \quad i \quad 5 + x > 0.$$

Zatem dziedziną tego równania jest zbiór

$$x < 5 \;\; lub \;\; x > -5.$$

Wtedy piszemy dziedzię tego równania jako odcinek otwarty

$$-5 < x < 5 \;\; lub \quad x \in (-5, 5).$$

Z własności sumy logarytmów wynika równość

$$\log_3(5 - x) + \log_3(5 + x) = \log_3(5 - x)(5 + x) = 2.$$

Z definicji logarytmu mamy równość

$$(5 - x)(5 + x) = 3^2, \quad lub \;\; 25 - x^2 = 9 \;\; lub \;\; x^2 = 16.$$

Obliczamy pierwiastki kwadratowe

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad \sqrt{16} = 4.$$

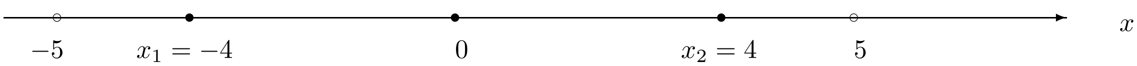
Skąd mamy dwa rozwiązania

$$gdy \quad |x| = 4 \ \ to \quad x_1 = -4 \quad lub \quad x_2 = 4.$$

Sprawdzamy, że rozwiązanie $x_1 = -4 \in (-5, 5)$ i $x_2 = 4 \in (-5, 5)$ należy do dziedziny równania

$$\begin{aligned} \log_3(5+4) + \log_3(5-4) &= \log_3 9 * 1 = \log_3 3^2 = 2 \\ oraz & \\ \log_3(5-4) + \log_3(5+4) &= \log_3 1 * 9 = \log_3 3^2 = 2. \end{aligned}$$

Zauważamy, że oba rozwiązania $x_1 = -4 \in (-5, 5)$ i $x_2 = 4 \in (-5, 5)$ należą do dziedziny tego równania. Zaznaczmy dziedzinę i rozwiązanie na osi liczbowej



Oś liczbowa. Dziedzina równania przedział otwarty $(-5, 5)$

Przykład 1.6 *Rozwiąż równanie*

$$\log_3(x - -2) + \log_3(x-4) = 1$$

Rozwiązanie:
Najpierw określamy dziedzinę równania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu

$$x - 2 > 0 \quad i \quad x - 4 > 0.$$

Zatem dziedziną tego równania jest zbiór

$$x > 2 \ \ lub \ \ x > 4.$$

Wtedy piszemy dziedzię tego równania jako odcinek nieskończony lewo stronnie otwarty

$$x > 4 \ \ lub \quad x \in (4, \infty).$$

Z własności sumy logarytmów wynika równość

$$\log_3(x-2) + \log_3(x-4) = \log_3(x-2)(x-4) = 1.$$

Z definicji logarytmu mamy równość

$$(x-2)(x-4) = 3^1, \quad lub \ \ x^2 - 6x + 8 = 3 \ \ lub \ \ x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Obliczamy pierwiastki równania:
Wyróżnik równania

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

o współczynnikach $a = 1, = -6, \ c = 5$

$$\Delta = b^2 - 4 * a * c = 6^2 - 4 * 1 * 5 = 36 - 20 = 16.$$

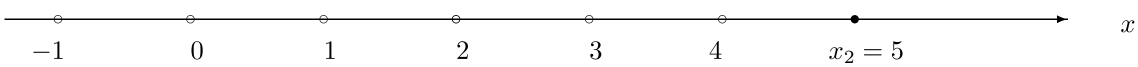
Skąd obliczamy pierwiastki równania

$$x_1 = \frac{1}{2}(6 - \sqrt{16}) = \frac{6-4}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}(6 + \sqrt{16}) = \frac{6+4}{2} = 5.$$

Sprawdzamy, że obcy pierwiastek $x_1 = 1 \notin (4, \infty)$ nie należy do dziedziny równania, natomiast pierwiastek $x_2 = 5 \in (4, \infty)$ należy do dziedziny równania. Zatem sprawdzamy, że drugi pierwiastek $x_2 = 5$ spełnia równanie

$$\log_3(5-2) + \log_3(5-4) \quad = \quad \log_3 3 * 1 = \log_3 3 = 1$$

Zauważamy, że tylko pierwiastek $x_2 = 5 \in (4, \infty)$ należy do dziedziny tego równania. Zaznaczmy dziedzinę i rozwiązanie na osi liczbowej



Oś liczbowa. Dziedzina równania przedział otwarty $(4, \infty)$

Przykład 1.7 *Rozwiąż równanie*

$$\log_2(\log_4\ x) = 1.$$

Rozwiązanie:
Dziedziną tego równania jest zbór tych x dla których

$$\log_4\ x > 1, \quad x > 4, \quad x \in (4, \infty)$$

Z definicji logarytmu wynika równość

$$\log_4\ x = 2^1, \quad x = 4^2, \quad x = 16$$

Rozwiązanie $x = 16 \in (4, \infty)$ należy do dziedziny. Sprawdzamy, że $x = 16$ spełnia równanie

$$\log_2(\log_4\ 16) = \log_2(\log_4 4^2) = \log_2(2\log_4 4) = \log_2 2 = 1$$

1.2.1 Zdania

Zadanie 1.4 *Rozwiąż równanie*

$$\log_4 x = 3$$

Zadanie 1.5 *Rozwiąż równanie*

$$\log_4(1-x) - \log_4(1+x) = 0.$$

Zadanie 1.6 *Rozwiąż równanie*

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-2) = 1$$

Zadanie 1.7 *Rozwiąż równanie*

$$\log_4(\log_8\ x) = 1.$$