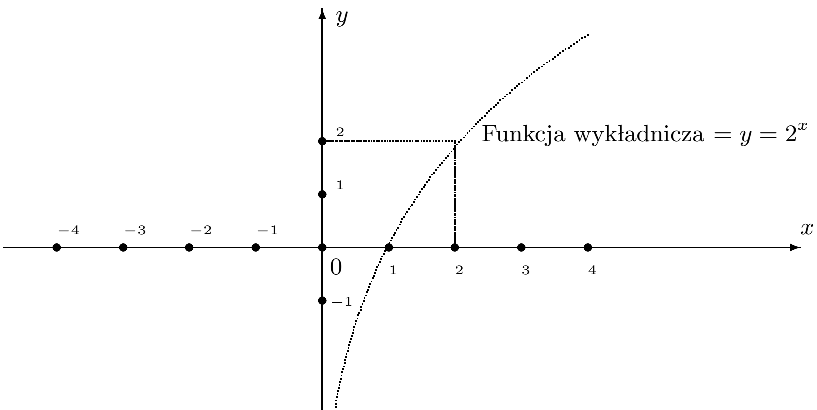
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16



Wykres funkcji wykładniczejj, gdy $a = 2 > 1$

Funkcja wykładnicza [1]

Tadeusz STYŠ

WARSZAWA 2020

[1] Rozdział 13. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.

Chapter 1

Funkcja wykładnicza

Funkcję wykładniczą określamy następującym wzorem:

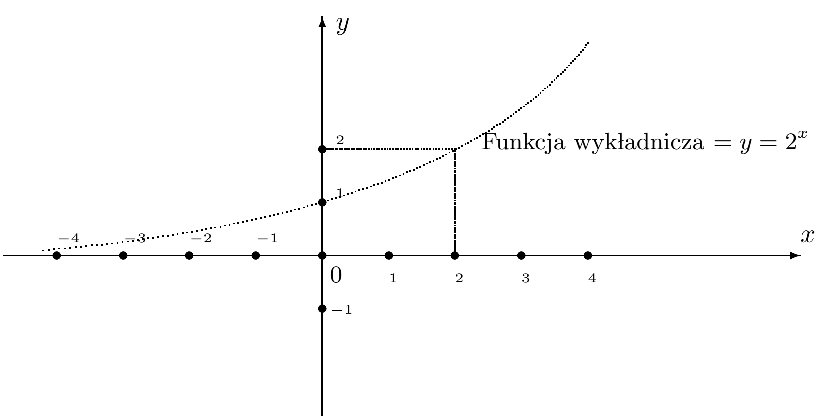
$$y = f(x) = a^x, \qquad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Liczbę rzeczywistą $a > 0$, $a \neq 1$ dodatnią i różną od jeden nazywamy podstawą funkcji wykładniczej. Dziedziną funkcji wykładniczej jest cały zbiór liczb rzczywistych

$$D = \{x \in R : \; -\infty < x < \infty\}.$$

Zbiorem wartości funkcji wykładniczej jest zbiór liczb dodatnich

$$R_+ = \{y \in R, \; 0 < y < \infty\}.$$



Wykres funkcji wykładniczejj, gdy $a = 2 > 1$

Zauważmy z wykresu, że funkcja wykładnicza ma jedną asymptotę, którą jest oś x. To są punkty $(x, 0)$ gdy współrzędna $-\infty < x < \infty$ i współrzędna $y = 0$.

Funkcja wykładnicza

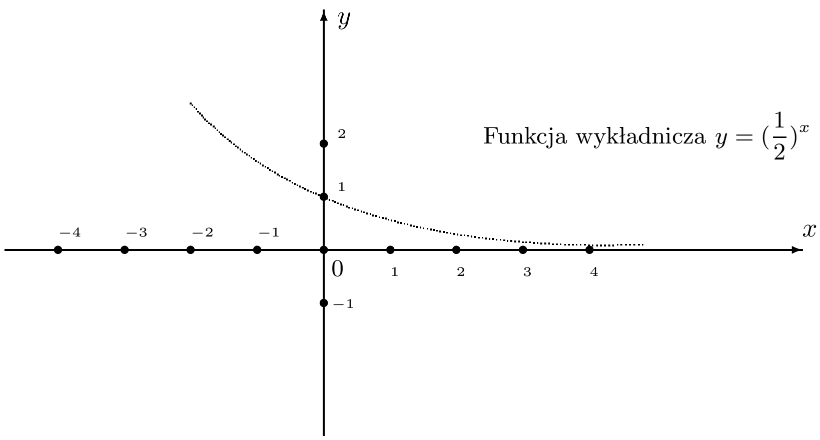
$$y = f(x) = a^x$$

jest rosnąca, jeżeli jej podstawa $a > 1$, natomiast jest malejąca, jeżeli jej podstawa $0 < a < 1$.

Na rysunku funkcja $y = f(x) = 2^x$ jest rosnąca ponieważ jej wykres wzrasta gdy argument

x też wzrasta.

Wykres funkcji wykładniczej $y = f(x) = (\frac{1}{2})^x$, gdy jej podstawa $0< a = \frac{1}{2} < 1$.



Widzimy z powyższego wykresu, że, funkcja wykładnicza

$$y = (\frac{1}{2})^x$$

jest malejąca, jej wartość $(\frac{1}{2})^x$ maleje, podczas gdy jej argument x rośnie.

1.0.1 Własności funkcji wykładniczej

1. Wartość funkcji wykładniczej w zerze, gdy $x = 0$ równa jest jeden.

   $$y = f(0) = 1, \qquad poniewaz \quad a^0 = 1,$$

   dla każdej podstawy $a > 0$.

2. Wartość funkcji wykładniczej dla $x = 1$ równa jest podstawie a.

   $$y = f(1) = a, \qquad poniewaz \quad a^1 = a,$$

3. funkcja wykładnicza $y = f(x)$ od sumy argumentów równa jest iloczynowi wartości

   $$f(x + t) = f(x) * f(t)$$

   Istotnie sprawdzamy, że

   $$f(x + t) = a^{x+t} = a^x * a^t = f(x) * f(t)$$

4. funkcja wykładnicza od różnicy argumentów równa jest ilorazowi wartości

   $$f(x - t) = \frac{f(x)}{f(t)}$$

   Rzeczywiście sprawdzamy, że

   $$f(x - t) = a^{x-t} = a^x * a^{-t} = \frac{a^x}{a^t} = \frac{f(x)}{f(t)}$$

5. funkcja wykładnicza od iloczynu argumentów równa jest potędze

$$f(x * t) = (f(x))^t$$

Sprawdzamy, że

$$f(x * t) = a^{x*t} = (a^x)^t = (f(x))^t$$

6. funkcja wykładnicza od argumentu $\frac{m}{n}$ równa jest pierwiastkowi n-tego stopnia z wartości m-tej potęgi

$$f(\frac{m}{n}) = \sqrt[n]{f(m)}$$

Mianowicie

$$f(\frac{m}{n}) = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{f(m)}$$

Przykład 1.1 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$3^8 * 3^{-5}$$

Rozwiązanie:
W tym przykładzie stosujemy własnoś˙ 2 do funkcji wykładniczej

$$f(x) = a^x$$

gdy podstawa $a = 3$ i argumenty $x = 8$ i $x = -5$. Zatem stosując własność 2, obliczamy

$$f(3) * f(-5) = 3^8 * 3^{-5} = 3^{8-5} = 3^3 = 27$$

Przykład 1.2 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$3^{\frac{5}{2}} * 12^{\frac{1}{2}}$$

Rozwiązanie:
Korzystając z własności funkcji wykładniczej, obliczamy

$$\begin{aligned} 3^{\frac{5}{2}} * 12^{\frac{1}{2}} &= 3^{\frac{5}{2}} * (3 * 4)^{\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{5}{2}} * 3^{\frac{1}{2}} * 4^{\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}} * \sqrt{4} = 3^2 * 2 = 18. \end{aligned}$$

Zadanie 1.1 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$(i) \quad (3\frac{1}{3})^{-2}, \qquad (ii) \quad 2^{\frac{8}{3}} * 2^{-\frac{5}{3}} * 16^{\frac{1}{2}}$$

Zadanie 1.2 *Rozpatrz funkcję wykładniczą*

$$f(x) = 2^x, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Naszkicuj wykres funkcji wykładniczej

$$y = f(x-1) + 1, \qquad -\infty < x < \infty.$$

w układzie współrzędnych x, y
Oblicz wartość funkcji $f(x-1)+1$ dla $x = 3$.

1.0.2 Równania wykładnicze

Równania wykładnicze i nierówności wkładnicze rozwiązujemy korzystają z następujących własności:

- funkcja wykładnicza $f(x) = a^x > 0$ jest dodatnia na całej osi liczbowej dla $-\infty < x < \infty$.
- zbiórem wartości funkcji wykładniczej są wszystkie liczby dodatnie, $R_+ = (0, \infty)$.
- funkcja wykładnicza $f(0) = 0$ dla każdej podstawy $a > 0,\ a \neq 1$
- funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca na całej osi liczbowej $-\infty < x < \infty$, jeżel podstawa $a > 1$.
- funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca na całej osi liczbowej $-\infty < x < \infty$, jeżel podstawa $0 < a < 1$.

Niżej podajemy przykłady rozwiązań równań wykładniczych

Przykład 1.3 *Rozwiąż równanie*

$$2^{2x} - 3 * 2^x + 2 = 0$$

Rozwiązanie. Dziedziną tego równania jest cały zbiór liczb rzczywistych R. Teraz, to równanie napiszemy w postaci

$$(2^x)^2 - 3 * 2^x + 2 = 0$$

Stosując podstawienie $t = 2^x$, otrzymamy równanie kwadratowe

$$t^2 - 3t + 2 = 0, \qquad \Delta = (-3)^2 - 4 * 2 = 1.$$

Oblicczamy pierwiastki tego równania

$$t_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1, \qquad \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2.$$

Wracając do zmiennej x, obliczamy rozawiązanie:
Jeżeli $2^x = 1$, to $x = 0$.
Jeżeli $2^x = 2$, to $x = 1$.

Przykład 1.4 *Rozwiąż równanie*

$$3^{\frac{2x-1}{3x-1}} = 9$$

Rozwiązanie. Dziedziną tego równania jest zbiór liczb rzczywistych różnych od $\frac{1}{3}$. to znaczy $D = r - \{\frac{1}{3}\}$.
Teraz, to równanie napiszemy w postaci

$$3^{\frac{2x-1}{3x-1}} = 3^2$$

Skąd mamy równie

$$\frac{2x-1}{3x-1} = 2,$$

Obliczamy rozwiązanie

$$2x - 1 = 2(3x - 1), \quad 2x - 1 = 6x - 2, \quad 4x = 1, \quad x = \frac{1}{4}$$

Zadanie 1.3 *Rozwiąż równanie*

$$3^x + 27 * 3^{-x} - 12 = 0.$$

Zadanie 1.4 *Rozwiąż równanie*

$$5^{\frac{3x-1}{2x-3}} = 25.$$