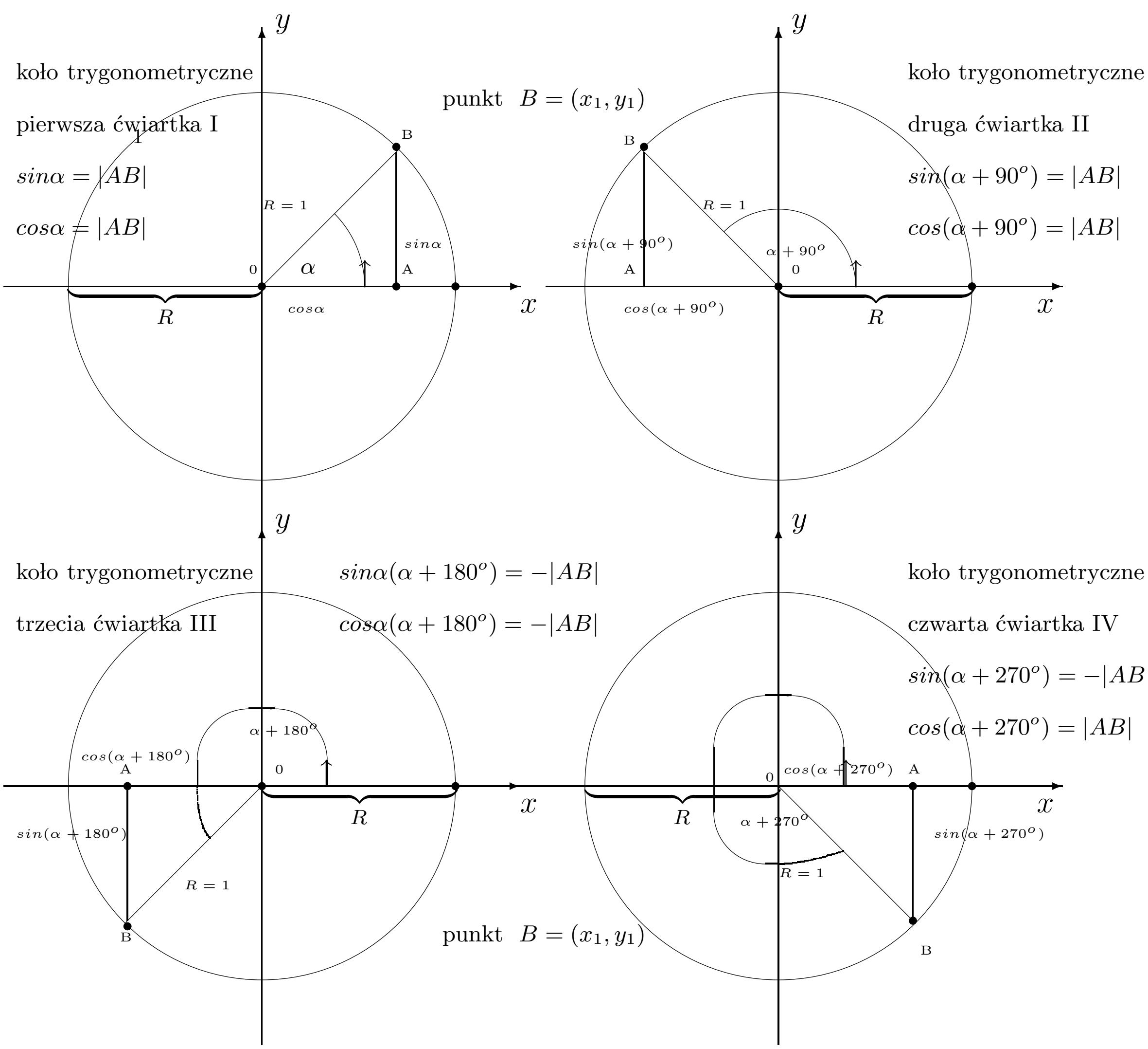
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

TRYGONOMETRIA

Tadeusz STYŠ



Warszawa luty 2020

[1]Rozdział 20. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.

Contents

Chapter 1

Trigonometria

Trigonometria to wiedza o związkach miarowych pomiedzy bokami i kątami trójkątów. Takie znaczenie słowa *Trigonometria* było używane w czasach starożytnych w Babilonie, Egipcie i Grecji.

1.1 Funkcje trygonometryczne

- sin α, czytamy sinus α, cos α, czytamy cosinus α,

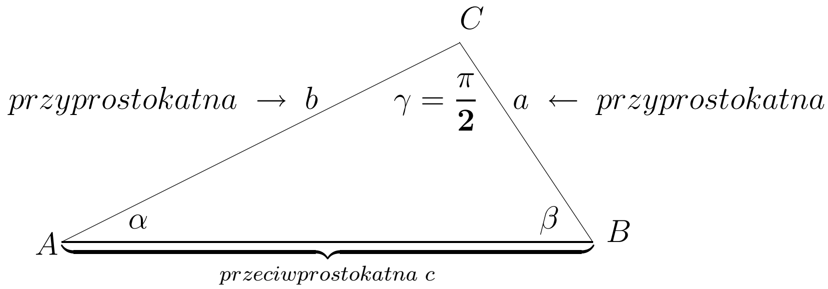
- tg α lub tan α, czytamy tangens α,

- ctg α lub cot α, czytamy cotangence α,

- sec α, czytamy secant α, csc α, czytamy cosecant α.

Funkcje trygonometryczne określamy w trójkącie prostokątnym lub na kole trygonometrycznym.
Rozpatrzmy tròjkąt prostokątny $\triangle ABC$ o wierzchołkach A, B, C przyprostpkątnych

AC i BC oraz przeciwprostokątnej AB [1]



Długości przyprostokątnych i przeciwprostokątnej oznaczamy małymi literami, piszemy

$$a = |BC|, \qquad b = |AC|, \qquad c = |AB|.$$

Definition 1.1 *Sinus kąta α to stosunek przyprostokątnej a leżącej naprzeciw kąta α do przeciwprostokątnej c*

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Definition 1.2 *Cosinus kąta α to stosunek przyprostokątnej b przyległej do kąta α do przeciwprostokątnej c*

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Definition 1.3 *Tangens kąta α to stosunek przyprostokątnej a leżącej naprzeciw kąta α do przyprostokątnej b przyległej do kąta α*

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b} \quad \text{lub} \quad \mathrm{tan}\alpha = \frac{a}{b}$$

Definition 1.4 *Cotangens kąta α to stosunek przyprostokątnej b leżącej przyległej do kąta α do przyprostokątnej a leżącej na przeciw kąta α*

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{lub} \quad \mathrm{cot}\alpha = \frac{a}{b}$$

Definition 1.5 *Secant kąta α to odwrotność sinusa kąta α. Zatem*

$$\mathrm{sec}\alpha = \frac{c}{a}$$

Definition 1.6 *Cosecant kąta α to odwrotność cosinusa kąta α. Zatem*

$$\mathrm{sec}\alpha = \frac{c}{b}$$

[1] W matematyce wyższej funkcje trygonometrytczne okeślane są przez szeregi potęgowe

Zauważmy, że odwrotność tangensa kąta α równa jest cotangensowi kąta α i odwrotność cotangensa kąta α równa jest tangensowi kąta α

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \mathrm{ctg}\alpha, \quad \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$$

Przykład 1.1 *Podaj wartości funkcji trygonometrycznych określonych w trójkącie prostokątnym o bokach $a = 3,\ b = 4,\ c = 5$*

Rozwiązanie. Kąty tego trójkąta prostokątnego $\alpha = 30^o, \beta = 60^o,\ \gamma = 90^o$

$$\begin{array}{lll} sin\alpha = \frac{3}{5}, & cos\alpha = \frac{4}{5}, & tg\alpha = \frac{3}{4}, \\ ctg\alpha = \frac{4}{3}, & sec\alpha = \frac{5}{3}, & csc\alpha = \frac{5}{4}. \end{array}$$

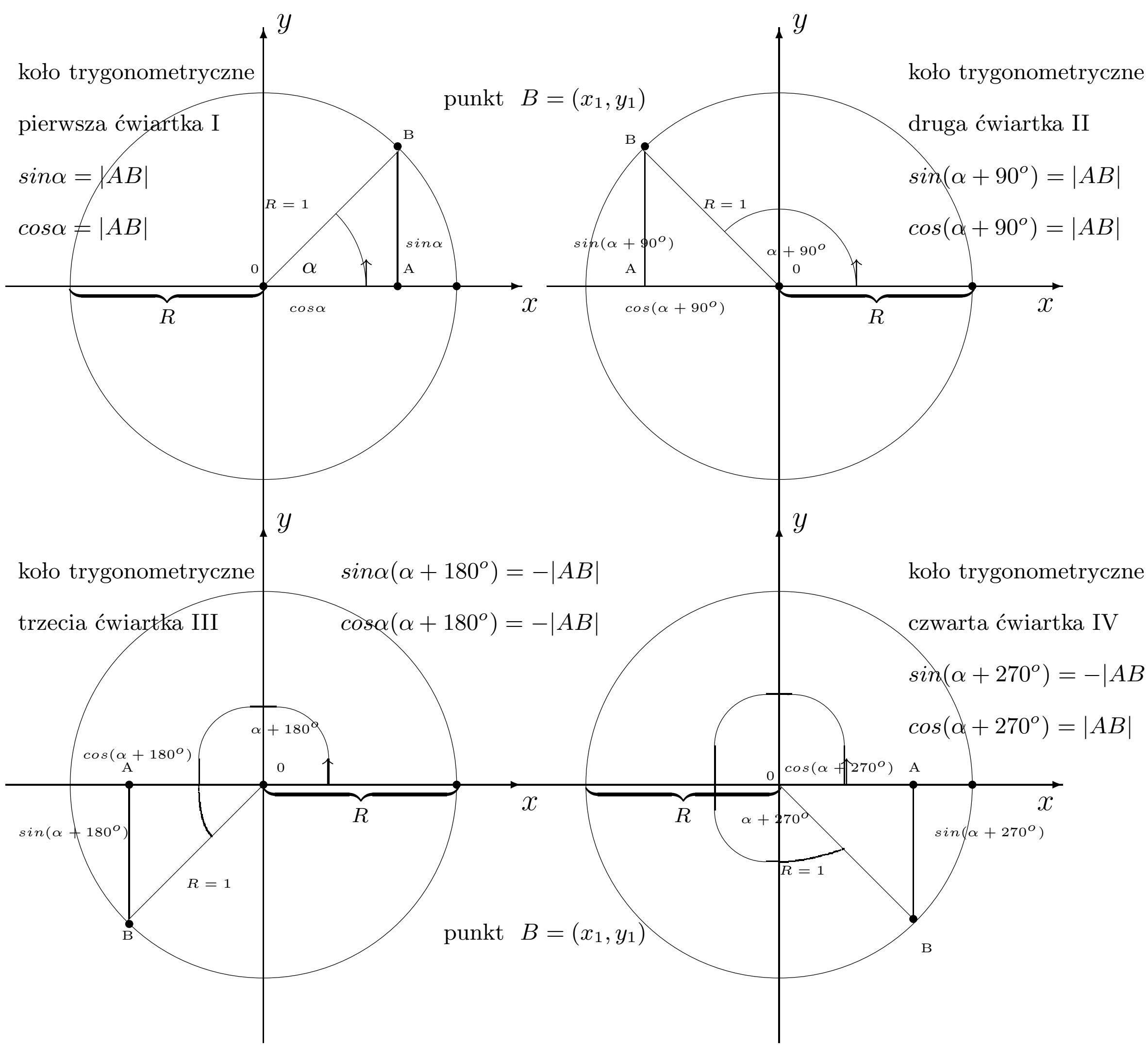
Zauważmy, że określenie funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym dotyczy tylko kątów

$$0 \leq \alpha \leq 90^o \quad lub\ w\ mierze\ lukowej\ \ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ponieważ kąty α i β w trójkącie prostokątnym zmieniają się od zera do kąta prostego. W tym dla $\alpha = 0$ cotangens i secant są nieokreślone. Również dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$ tangens i cosecant nie są określone.
Niżej podamy deficje funkcji trygonometrycznych na kole trygonometrycznym. Funkcje sinus i cosinus określone są dla wszystkich wartości rzeczywistych argumentu $\alpha \in \{-\infty, \infty\}$. Natomiast funkcje tangens określona jest dla rzeczwistych wartości argumentu $\alpha \neq \frac{k\pi}{2},\ k = 0, 1, 2, ...;$ a funkcja cotangens określna jest dla wszystkich rzeczywistych warto.sci agumentu $\alpha \neq k\pi,\ k = 0, 1, 2, 3, ...;$
Wartości funkcji sinus i cosinus leżą w przedziel domkinętym $[-1, 1]$. wartości funkcji tangens i cotanges przebiegają cały zbiò liczb rzeczywistych od minus nieskończoności $-\infty$ do plus nieskończoności ∞.
Znak wartości fukcji trugonometrycznych zależy od ćwiartki pierwszej I, drugiej II, trzeciej lub czwartej IV do kțórej należy argument α.
Dla okeślenia znaku wartości funkcji trygonometrycznych stosujemy heurystyczną zasadę:
W pierwszej ćwiarte wszystkie są dodatnie sinus, cosinus, tangens i kotangens, w drugie tylko sinus jest dodatni, w trzecj tangens i cotangens są dodatnie , a w czwartej tylko cosinus jest dodatni.

1.2 Koło trygonometryczne.

Dla wszystkich kątów o wartościach rzeczywistych, ujemnych lub dodatnich, funkcje trygonometryczne definiujemy w kole trygonometrycznym.



Definition 1.7 *Sinus kąta* α *to stosunek współrzędnej* $\mathbf{y_1}$ *do promienia* $\mathbf{R}$

$$\sin\alpha = \frac{y_1}{R}$$

Definition 1.8 *Cosinus kąta* α *to stosunek współrzędnej* $\mathbf{x_1}$ *do promienia* $\mathbf{R}$

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{R}$$

Definition 1.9 *Tangens kąta* α *to stosunek współrzędnej* $\mathbf{y_1}$ *do wpsółrzędnej* $\mathbf{x_1}$

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{y_1}{x_1}, \quad x_1 \neq 0,$$

Definition 1.10 *Cotangens kąta α to stosunek współrzędnej $\mathbf{x_1}$ do wpsółrzędnej $\mathbf{y_1}$*

$$\text{ctg}\ \alpha = \frac{x_1}{y_1}, \quad y_1 \neq 0,$$

Definition 1.11 *Secant kąta α to odwrotność sinusa kąta α. Zatem*

$$\sec \alpha = \frac{R}{y_1}, \quad y_1 \neq 0,$$

Definition 1.12 *Cosecant kąta α to odwrotność cosinusa kąta α. Zatem*

$$\csc \alpha = \frac{R}{x_1}, \quad x_1 \neq 0.$$

Ponieważ secant i cosecant określone są przez sinus i cosinus, dlatego dalej wystarczy rozpatrywać cztery funkcje trygonometryczne sinus, cosinus, tangens i cotangens.

1.2.1 Wzory redykcyjne

Wprost z definicji funkcji trygonometrycznych zauważamy, że wszystkie funkcje są nieujemne w pierwszej ćwiartce koła trygonometrycznego, gdyż dla kąta

$$0 \leq \alpha \leq 90^o,$$

współrzędne punktu $p = (x_1, y_1)$ są nieujemne, to jest $x_1 \geq 0,\ y_1 \geq 0$ i promień $R > 0$.
W drugiej ćwiartce tylko sinus ($\sin \alpha \geq 0$), jest nieujemny, gdyż współrzędna $y_1 \geq 0$.
W trzeciej ćwiartce tangens i cotanges ($\text{tg}\alpha \geq 0,\ \text{ctg}\alpha \geq 0$), są nieujemne, gdyż obie współrzędne $x_1 \leq 0, , y_1 \leq 0$ są ujemne i wtedy iloraz $(\frac{y_1}{x_1} \geq 0)$ lub $(\frac{x_1}{y_1} \geq 0)$.
W czwartej ćwiartce tylko cosinus ($\cos \alpha \geq 0$) jest nieujemny, gdyż współrzędna $x_1 \geq 0$. W tej pozycji kąta α, z wykresu koła trygonometrycznego odczytujemy wartości funkcji trygonometrycznych zapisane w niżej podanej tabeli

$0 \leq \alpha \leq 90^o$	$\sin \alpha \geq 0$	$\cos \alpha \geq 0$	$\text{tg}\alpha \geq 0$	$\text{ctg}\alpha \geq 0$
$90^o \leq \alpha \leq 180^o$	$\sin \alpha \geq 0$	$\cos \alpha \leq 0$	$\text{tg}\alpha \leq 0$	$\text{ctg}\alpha \leq 0$
$180^o \leq \alpha \leq 270^o$	$\sin \alpha \leq 0$	$\cos \alpha \leq 0$	$\text{tg}\alpha \geq 0$	$\text{ctg}\alpha \geq 0$
$270 \leq \alpha \leq 360^o$	$\sin \alpha \leq 0$	$\cos \alpha \geq 0$	$\text{tg}\alpha \leq 0$	$\text{ctg}\alpha \leq 0$

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta α osiągają już w pierwszej ćwiartce koła trygonometrycznego wszystkie możliwe wartości bezwzględne (z dokładnością do znaku). Zatem, inne wartości różnią się od nich jedynie znakiem. Te różnice ustalają wzory redukcyjne, które podajemy niżej.

Najpierw, zauważmy, że jeżeli kąt $0 \leq \alpha \leq 90^o$ leży w pierwszej ćwiartce to kąt $90^o - \alpha$ też leży w pierwszej ćwiartce oraz kąt $90^o + \alpha$ leży w drugiej ćwiartce. Natomiast, kąt $-\alpha$ leży w czwartej ćwiartce. W tej pozycji kąta α, z wykresu koła trygonometrycznego odczytujemy wartości funkcji trygonometrycznych zapisane w niżej podanej tabeli

$\sin(90^o - \alpha) = \cos\alpha$	$\sin(90^o + \alpha) = \cos\alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(90^o - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(90^o + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\mathrm{tg}(90^o - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}(90^O + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}(90^O - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(90^O + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$

Teraz, zauważmy, że jeżeli kąt $0 \leq \alpha \leq 90^o$ leży w pierwszej ćwiartce to kąt $180^o - \alpha$ leży w drugiej ćwiartce oraz kąt $180^o + \alpha$ leży w trzeciej ćwiartce.

$\sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin(180^o + \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(180^o + \alpha) = -\cos\alpha$
$\mathrm{tg}(180^o - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}(180^O + \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}(180^O - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(180^O + \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$

Zauważmy podobnie, że jeżeli kąt $0 \leq \alpha \leq 90^o$ leży w pierwszej ćwiartce to kąt $270^o - \alpha$ leży w trzeciej ćwiartce oraz kąt $180^o + \alpha$ leży w czwartej ćwiartce. Zatem, mamy następujące wzory redukcyjne:

$\sin(270^o - \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(270^o + \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(270^o - \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(270^o + \alpha) = \sin\alpha$
$\mathrm{tg}(270^o - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}(270^O + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$
$\mathrm{ctg}(270^O - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(270^O + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$

Niżej w tablicy podajemy zebrane wzory redukcyjne w mierze łukowej kątów.

Kąt	sinus	cosinus	tangens	cotangens
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$(\cos\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$
$\pi + \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$
$2\pi - \alpha$	$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$	$\mathrm{tg}(2\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(2\pi - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$

1.3 Zadania

Zadanie 1.1 *Długości boków trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$ są równe*

$$a = |BC| = 6, \quad b = |AC| = 8, \quad c = |AB| = 10$$

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych

$$sin\ \alpha,\quad sin\ \beta,\quad cos\ \alpha,\quad cos\ \beta,$$

$$tg\ \alpha,\quad tg\ \beta,\quad cotg\ \alpha,\quad cotg\ \beta$$

kątów α, β *leżących naprzeciw odpowiednich boków* BC, AC.

Zadanie 1.2 (i) *Narysuj położenie punktów*

$$p = (p_1, p_2) = (\sqrt{3}, 1), \quad q = (q_1, q_2) = (-\sqrt{3}, -1).$$

na kole trygonometrycznych o promieniu $R = 2$.
(ii) *Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$\begin{array}{llllll}
(a) & sin\ 30^0 = \frac{p_2}{R} = & & , sin\ 60^0 = \frac{p_1}{R} = \\
(b) & cos\ 30^0 = \frac{p_1}{R} = & & , cos\ 60^0 = \frac{p_2}{R} = \\
(c) & tg\ 30^0 = \frac{p_2}{p_1} = & & , tg\ 60^0 = \frac{p_1}{p_2} = \\
(d) & cotg\ 30^0 = \frac{p_1}{p_2} = & & , cotg\ 60^0 = \frac{p_2}{p_1} =
\end{array}$$

(iii) *Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$\begin{array}{llllll}
(a) & sin\ 210^0 = \frac{q_2}{R} = & & , sin\ 240^0 = \frac{q_1}{R} = \\
(b) & cos\ 210^0 = \frac{q_1}{R} = & & , cos\ 240^0 = \frac{q_2}{R} = \\
(c) & tg\ 210^0 = \frac{q_2}{q_1} = & & , tg\ 240^0 = \frac{q_1}{q_2} = \\
(d) & cotg\ 210^0 = \frac{q_1}{q_2} = & & , cotg\ 240^0 = \frac{q_2}{q_1} =
\end{array}$$

Zadanie 1.3 *Korzystając ze wzorów redukcyjnych oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$\begin{array}{llll}
(a) & sin\ 120^0 = & & sin\ 150^0 = \\
(b) & cos\ 120^0 = & & cos\ 150^0 = \\
(c) & tg\ 120^0 = & & tg\ 150^0 = \\
(d) & cotg\ 120^0 = & & cotg\ 150^0 =
\end{array}$$

Zadanie 1.4 *Korzystając ze wzorów redukcyjnych oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$\begin{array}{llll}
(a) & sin\ 210^0 = & & sin\ 240^0 = \\
(b) & cos\ 210^0 = & & cos\ 240^0 = \\
(c) & tg\ 210^0 = & & tg\ 240^0 = \\
(d) & cotg\ 210^0 = & & cotg\ 240^0 =
\end{array}$$

Zadanie 1.5 *Korzystając ze wzorów redukcyjnych oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$\begin{array}{llll}
(a) & sin\ 300^0 = & & sin\ 330^0 = \\
(b) & cos\ 300^0 = & & cos\ 330^0 = \\
(c) & tg\ 300^0 = & & tg\ 330^0 = \\
(d) & cotg\ 300^0 = & & cotg\ 330^0 =
\end{array}$$

Zadanie 1.6 (i) *Oblicz okres następującej funkcji:*

$$(a) \quad f(x) = sin\frac{1}{3}x, \qquad (b) \quad f(x) = cos\frac{1}{3}x.$$
$$(c) \quad f(x) = tg\frac{1}{3}x, \qquad (d) \quad f(x) = cotg\frac{1}{3}x.$$

Zadanie 1.7 *Narysuj wykres funkcji*

$$(i) \quad f(x) = sin\frac{1}{3}x, \qquad dla \quad 0 \leq x \leq 6\pi$$
$$(ii) \quad f(x) = tg\frac{1}{3}x \qquad dla \quad -3\pi \leq x \leq 3\pi.$$

1.3.1 Funkcje periodyczne

Funkcja $f(x)$ jest periodyczna, jeżeli istnieje liczba dodatnia $\omega > 0$ taka, że

$$f(x+\omega) = f(x), \tag{1.1}$$

dla każdej rzeczywistej wartości argumentu należącego do dziedziny $x \in D$. [2]
Jasne, że jeżeli funkcja $f(x)$ jest periodyczna o okresie $\omega > 0$, to zachodzi następująca tożsamość:

$$f(x + k\,\omega) = f(x), \qquad x \in D,$$

dla każdego całkowitego $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
Okresem funkcji $f(x)$ nazywamy najmiejszą z liczb $\omega > 0$, która spełnia tożsamość (2.1). [3]

Niżej sprawdzimy, że *funkcje trygonometryczne są periodyczne.*
Mianowicie, zauważamy, że jeżeli promień R obróci się o 360^o lub w mierze łukowej o 2π, to punkt $p = (x_1, y_1)$ wróci do pozycji wyjściowej. Co wiecej, jeżeli promień R obróci się w kierunku dodatnim lub ujemnym o wielokrotność okresu $\omega = 360^o$ lub w mierze łukowej o wielokrotność $\omega = 2\pi$, to punkt $p = (x_1, y_1)$ też wróci do pozycji wyjściowej.
Okresem funkcji sinus i cosinus jest liczba $\omega = 360^o$ lub w mierze łukowej liczba $\omega = 2\pi$. Natomiast, dla funkcji tanges i cotangens okresem jest liczba miejsza $\omega = 180^o$ lub w mierze łukowej $\omega = \pi$. Istotnie, funkcje tangens i cotangens osiągają te same wartości w pierwszej i w trzeciej ćwiartce koła trygonometrycznego, gdyż

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y_1}{-x_1}, \qquad \text{oraz} \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{x_1}{y_1} = \frac{-x_1}{-y_1}, \qquad x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 0.$$

[2] Dziedziną funakcji $f(x)$ nazywamy zbiór argumentów x dla ktòch $f(x)$ jest okkre].slna
[3] Tożsamość znaczy, że równość zachodzi dla wszystkich wartości x w dziedzinie tożsamości $x \in D$.

Przykład 1.2 *Oblicz okres następującej funkcji:*

$$f(x) = \sin\frac{3}{2}x$$

Rozawiązanie. Wiemy, że funkcja sinus ma okres 2π. Zatem okresem funkcji $f(x)$ jest liczba ω taka, że

$$f(x+\omega) = \sin\frac{3}{2}(x+\omega) = \sin(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\omega) = \sin\frac{3}{2}x = f(x)$$

dla każdego rzeczywistego x.
Skąd obliczamy okres

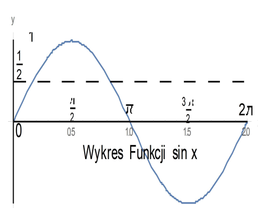
$$\frac{3}{2}\omega = 2\pi, \quad \omega = \frac{4}{3}\pi$$

Sprawdzamy, że okresem funkcji $f(x)$ jest liczba $\omega = \frac{4}{3}\pi$. Istotnie, mamy równość

$$\begin{aligned} f(x+\omega) = f(x+\frac{4}{3}\pi) &= \sin\frac{3}{2}(x+\frac{4}{3}\pi) \\ &= \sin(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\frac{4}{3}\pi). \\ &= \sin(x+2\pi) = \sin x = f(x). \end{aligned}$$

1.3.2 Wykresy funkcji trygonometrycznych

Funkcje trygonometryczne sinus i cosinus są periodyczne o okresie $\omega = 2\pi$ i określone na całej osi liczbowej. Wykreślając funkcje trygonometryczne agrument odkładamy na osi x, jak na rysunku.



Z określenia funkcji sinus

$$|\sin x| = |\frac{y_1}{R}| \leq 1, \quad \text{gdyz} \quad R \geq |y_1|, \quad \text{dla} \quad -\infty < x < \infty.$$

Wartości funkcji sinus nie przekraczają przedziału $[-1, 1]$. To znaczy, że dla wszystkich wartości argumentu $-\infty < x < \infty$ spełniona jest nierówność

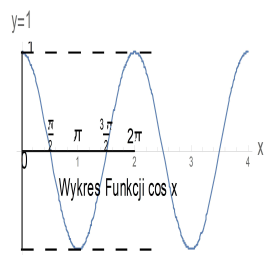
$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

Istotnie, z określenia funkcji sinus

$$|\sin x| = |\frac{y_1}{R}| \leq 1, \quad \text{gdyz} \quad R \geq |y_1|, \quad \text{dla} \quad -\infty < x < \infty.$$

Podobnie, funkcja cosinus jest periodyczna o okresie 2π i określona dla wszystkich rzeczywistych wartości kąta $-\infty < x < \infty$. Jej warotości nie przekraczają przedziału $[-1.1]$, gdyż z okresślenia funkcji cosinusa

$$|\cos x| = |\frac{x_1}{R}| \leq 1, \quad \text{gdyz} \quad R \geq |x_1|, \quad \text{dla} \quad -\infty < x < \infty.$$



Funkcje trygonometryczne tangens i cotangens są periodyczne o okresie $\omega = \pi$. Istotnie, kąt $x + \pi$ leży w trzeciej ćwiartce koła trygonometrycznego. Z tabeli odczytujeme wartość $\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}x$. Zatem, prawdziwa jest następująca tożsamość:

$$f(x + \pi) = \mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}x = f(x),$$

dla każdego argumentu w dziedzinie funkcji tangens

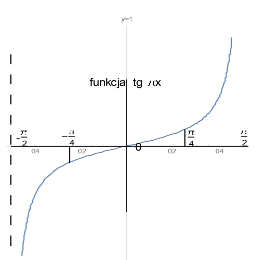
$$x \in D = \{x \ : x \neq \frac{k\pi}{2}, \ k = 0, \pm 1 \pm 2, ...; \}.$$

i tożsamość

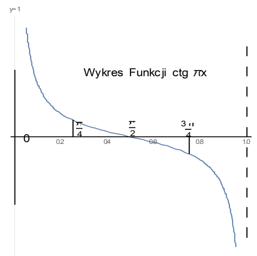
$$f(x + \pi) = \mathrm{ctg}(x + \pi) = \mathrm{ctg}x = f(x),$$

dla każdego argumentu w dziedzinie funkcji cotangens

$$x \in D = \{x \ : x \neq k\pi, \ k = 0, \pm 1 \pm 2, ...; \}.$$



Wykres funkcji cotangens



1.4 Tożsamości trygonometryczne

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość, która jest prawdziwa dla wszystkich wartości kątów w dziedzinie tożsamości. W odróżnieniu od tożsamości, równanie trygonometryczne jest spełnione tylko dla niektórych wartości kątów z dziedziny równania.
Podobnie, wzory trygonometryczne są tożsamościami dla wszystkich wartości kątów z dziedziny ich określenia.

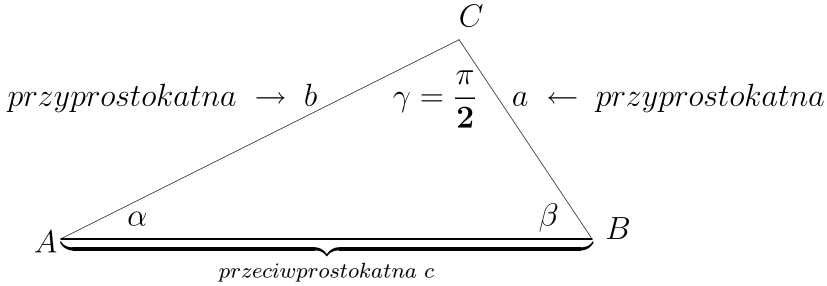
1.4.1 Jedynka trygonometryczna

Jedynka trygonometryczna to jest tożsamość

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

dla wszystkich wartości rzeczywistych kąta $\alpha \in (-\infty, \infty)$.
Wprost z definicji funkcji sinus i cosinus obliczamy przyprostokątne a i b trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$

$$a = c \sin \alpha, \quad b = c \cos \alpha.$$



Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że suma kwadratów przyprostokątnych równa jest kwadratowi przeciwprostokątnej

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

$$Po\,podstawieniu\ \ a = c * sin\ \alpha, \quad b = c * cos\ \alpha\ \ otrzymamy$$

$$(c \sin \alpha)^2 + (c \cos \alpha)^2 = c^2,$$

$$c^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = c^2 \ \ | : c^2,$$

Skąd wynika tozsamość

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

dla każdej wartości $\alpha \in (-\infty, \infty)$. To jest jedynka trygonometryczna.

Z jedynki trygonometrycznej wynikają następujące tożsamości:

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = csc^2\alpha, \qquad \alpha \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \pm 3, ...;$$

Istotnie, z definicji funkcji tangens wynika równość

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{cos^2\ \alpha + sin^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \csc^2\alpha.$$

dla każdego kąta $\alpha \neq (2\pi + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \pm 3, ...;$ dla którego

$$cos\ \alpha \neq 0.$$

To znaczy dla kąta α ze zbioru określoności funkcji tangens.[4]
Podobbnie z defincji funkcji cotangens wynika równość

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \sec^2\alpha.$$

dla każdego kąta $\alpha \neq k * \pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \pm 3, ...;$ dla którego

$$sin\ \alpha \neq 0.$$

To znaczy dla kąta α ze zbioru określoności funkcji cotangens. [5]

---

[4] Nieparzystą wielokrotność kąta prostego piszemy $(2\pi + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k =, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$

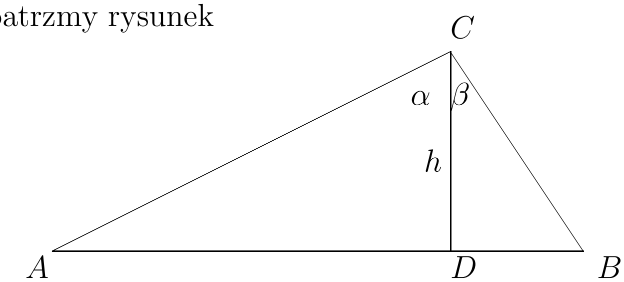
[5] Parzystą wielokrotność kąta półpełnego piszemy $k\ \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$

1.4.2 Funkcje sinus i cosinus sumy i różnicy kątów α, β

Niżej wyprowadzimy wzory na sumę i różnię dwóch kątów

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\alpha,\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \cos\alpha,\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \sin\alpha,\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \sin\alpha,
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Rozpatrzmy rysunek



Wysokość h trójkąta $\triangle ABC$

Zauważamy, że

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{|AD|}{|AC|}, & \sin\beta &= \frac{|DB|}{|BC|},\\
\cos\alpha &= \frac{h}{|AC|}, & \cos\beta &= \frac{h}{|BC|},\\
h &= |AC|\cos\alpha, & h &= |BC|\cos\beta
\end{aligned}
$$

Pole P trójkąta $\triangle ABC$ jest sumą pola P_1 trójkąta $\triangle ADC$ i pola P_2 trójkąta $\triangle DBC$

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2}|AC|\ |BC|\sin((\alpha+\beta) \tag{1.3}$$

Z drugiej strony, wiemy, że

$$P_1 = \frac{1}{2}|AC|\ h\ \sin\alpha, \qquad P_2 = \frac{1}{2}|BC|\ h\ \sin\beta, \tag{1.4}$$

Porównując pola określone przez równości (2.3) i (2.4), przez proste przekształcenia, otrzymamy wzór na sinus sumy dwóch kątów α i β

$$\frac{1}{2}|AC|\,|BC|\sin((\alpha+\beta) = \frac{1}{2}|AC|\ h\ \sin\alpha + \frac{1}{2}|BC|\ h\ \sin\beta,$$

$$|AC|\,|BC|\sin(\alpha+\beta) = |AC|\,|BC|\ \cos\beta\ \sin\alpha + |AC|\,|BC|\ \cos\alpha,$$

Skad sinus sumy

$$\sin(\alpha+\beta) = \underbrace{\sin\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\alpha}_{sin\ (\alpha+\beta)},$$

Pozostałe wzory wyprowadzamy korzystając ze wzorów redukcyjnych.

$$\begin{aligned}
\sin((\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) &= \sin\alpha\ \cos(-\beta) + \sin(-\beta)\ \cos\alpha \\
&= \underbrace{\sin\alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \cos\alpha}_{sin\ (\alpha-\beta)}, \\
\cos(\alpha+\beta) = \sin(90^o - (\alpha+\beta)) &= \sin((90^o-\alpha)-\beta) \\
&= \sin(90^o-\alpha)\cos\beta - \sin\beta\cos(90^o-\alpha), \\
&= \underbrace{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}_{cos\ (\alpha+\beta)}, \\
\cos(\alpha-\beta) = \sin(90^o - (\alpha-\beta)) &= \sin((90^o-\alpha)+\beta) \\
&= \sin(90^o-\alpha)\cos\beta + \sin\beta\cos(90^o-\alpha), \\
&= \underbrace{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}_{cos\ (\alpha-\beta)},
\end{aligned}$$

Wzory na tangens i cotangens sumy i różnicy dwóch kątów wynikają bezpośrednio z powyższych wzorów

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\alpha}{\cos\alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \sin\alpha} = \underbrace{\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}}_{tg\ (\alpha+\beta)}$$

$$dla\quad \alpha+\beta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \sin\alpha}{\sin\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\alpha} = \underbrace{\frac{\mathrm{ctg}\alpha\ \mathrm{ctg}\beta - 1}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}}_{ctg\ (\alpha+\beta)}$$

$$dla\quad \alpha+\beta \neq k\ \pi,\quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;$$

Podobnie wyprowadzamy wzory na tangens i cotangens różnicy dwóch kątów.

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\ \cos\beta-\sin\beta\ \cos\alpha}{\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\beta\ \sin\alpha}=\underbrace{\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}}_{tg\ (\alpha-\beta)}$$

$$dla\quad \alpha-\beta\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,....;$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\beta\ \sin\alpha}{\sin\alpha\ \cos\beta-\sin\beta\ \cos\alpha}=\underbrace{\frac{\mathrm{ctg}\alpha\ \mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha}}_{ctg\ (\alpha-\beta)}$$

$$dla\quad \alpha-\beta\neq k\,\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,....;$$

1.4.3 Wzory kąta podwȯjonego

Wzory kąta podwójnego wynikają bezpośrednio z powyższych wzorów na sumę. Mianowicie, dla $\alpha=\beta$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\ \cos\alpha,\quad dla\quad \alpha\in(-\infty,\infty)$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\quad dla\quad \alpha\in(-\infty,\infty)$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha},\quad dla\quad \alpha\neq(2k+1)\ \frac{\pi}{4},\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...;$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}^2\alpha},\quad dla\quad \alpha\neq k\,\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...;$$

1.4.4 Wzory kąta połówkowego

Wzory kąta połówkowego otrzymujemy przez podstawienie do powyższych wzorów kąta podwójnego zamiast α połowę kąta $\frac{1}{2}\alpha$, wtedy otrzymamy

$$\sin\alpha=2\sin\frac{1}{2}\alpha\ \cos\frac{1}{2}\alpha,\qquad \alpha\in(-\infty,\infty),$$

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{1}{2}\alpha-\sin^2\frac{1}{2}\alpha,\quad \cos\alpha=1-2\sin^2\frac{1}{2}\alpha,\quad \cos\alpha=2\cos^2\frac{1}{2}\alpha-1$$

$$\alpha\in(-\infty,\infty),$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}\quad dla\quad \alpha\neq(2k+1)\ \frac{\pi}{2},\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...;$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\frac{1}{2}\alpha-1}{2\mathrm{ctg}^2\frac{1}{2}\alpha},\quad dla\quad \alpha\neq k\,\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...;$$

1.4.5 funkcje trygonometryczne połowy kąta

Z powyższych wzorów kąta połówkowego bezpośrednio wynikają wzory połowy kąta. Mianowicie, obliczając cosinus i sinus ze wzorów

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 1, \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$$

otrzymamy wzóry cosinusa i sinusa na połowę kąta α

$$|\cos\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad |\sin\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

dla $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

Wzory połowy kąta dla tangensa i cotangensa wynikają bezpośrednio z defincji tych funkcji i wzorów dla sinusa i cosinusa

$$|\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha| = |\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}| = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

dla $\alpha \neq (2k+1)\,\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;$

Cotangens jest odwrotnością tangensa, zatem

$$\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

dla $\alpha \neq 2k\,\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;$

1.4.6 Wyrażenie funkcji trygonometrycznych przez $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha$

Oznaczmy przez

$$t = \mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha \quad \textit{dla} \quad \alpha \neq (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;.$$

Wtedy funkcje trygonometryczne kąta α można zapisać w postaci następujących wymierażeń wymiernych zmiennej t.

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty,$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \quad t \neq -1, 1, \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1-t^2}{2t} \quad t \neq 0.$$

Istotnie, wiemy, że

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\ \cos\tfrac{1}{2}\alpha \\
&= \frac{2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\ \cos\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha+\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha} \\
&= \frac{\dfrac{2\sin\dfrac{1}{2}\alpha\ \cos\dfrac{1}{2}\alpha}{\cos^2\dfrac{1}{2}\alpha}}{\dfrac{\sin^2\dfrac{1}{2}\alpha+\cos^2\dfrac{1}{2}\alpha}{\cos^2\dfrac{1}{2}\alpha}} = \frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned}
$$

Podobnie funkcja cosinus

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha-\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha \\
&= \frac{\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha-\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}{\cos^2\tfrac{1}{2}+\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha} \\
&= \frac{\dfrac{\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha-\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}{\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha}}{\dfrac{\cos^2\tfrac{1}{2}+\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}{\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.
\end{aligned}
$$

Dla funkcji tangens i cotangens wzory płowy kąta wynikają wprost z ich definicji i wyżej podanych wzorów dla funkcji sinus i cosinus

$$
\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}, \quad t\neq -1, 1
$$

Cotanges jest odwrotnością tangnsa. Zatem wzór dla cotangensa

$$
\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1-t^2}{2t}, \quad t\neq 0.
$$

1.4.7 Suma i różnica funkcji trygonometrycznych

Niżej podajemy następujące wzory na sumę i ró znicę funkcji trygonometrycznych

$$
\begin{aligned}
&\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2},\\
&\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2},\\
&\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2},\\
&\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2},\\
&\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\\
&\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\\
&\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\\
&\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Powyższe wzory wynikają ze wzorów (2.4) sinusa i cosinusa sumy i różnicy kątów. Mianowicie, wprowadzamy nowe zmienne

$$\alpha = x + y, \quad \beta = x - y, \quad x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2},$$

Korzystając ze wzorów (2.4) na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów zauważamy, że

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= \sin(x+y) + \sin(x-y)\\
&= (\sin x\cos y + \sin y\cos x) + (\sin x\cos y - \sin y\cos x)\\
&= 2\sin x\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.\\
\sin\alpha - \sin\beta &= \sin(x+y) - \sin(x-y)\\
&= (\sin x\cos y + \sin y\cos x) - (\sin x\cos y - \sin y\cos x)\\
&= 2\sin y\cos x = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta &= \cos(x+y) + \cos(x-y) \\
&= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + (\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\
&= 2\cos x \cos y = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}. \\
\cos\alpha - \cos\beta &= \cos(x+y) - \cos(x-y) \\
&= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) - (\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\
&= -2\sin x \sin y = -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}$$

Wzory sumy i różnicy tangensa i cotangensa wynikają wprost z definicji powyższych wzorów dla sinusa cosinusa.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}, \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \\
\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}, \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Ponieważ cotangens jest odwrotnością tangensa, zatem wzór dla sumy cotangensa

$$\mathrm{ctc}\alpha + \mathrm{ctg}\beta = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$
$$\mathrm{ctc}\alpha - \mathrm{ctg}\beta = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

1.5 Równania trygonometryczne

Zacznijmy od najprostrzych równań trygonometrycznych, rozwiązania których są częścią rozwiązań bardziej złożonych równań.

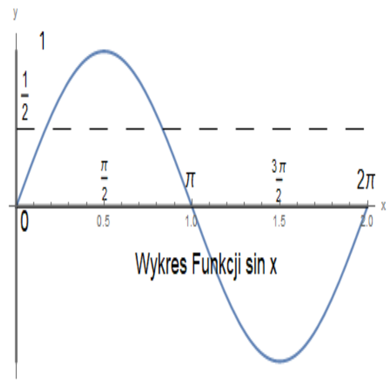
Przykład 1.3 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$(i) \quad \sin x = 0, \qquad (ii) \quad |\sin x| = 1.$$

Rozwiązanie (i). Głównymi pierwiastami tego równania, to znaczy zerami funkcji sinus w jej okresie od 0 do 360^o lub w mierze łukowej w zakresie od $0 \le \alpha \le 2\pi$ są rozwiązania

$$x = 0, \qquad \text{lub} \quad x = \pi.$$

Zobaczmy to również na wykresie funkcji $y = \sin x$.



Wszystkie rozwiązanie dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji sinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi,$$

dla parzystych i dla nieparzystych k. To znaczy, że wszystkie rozwiązania są wielokrotnością liczby π,

$$x_k = k\ \pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

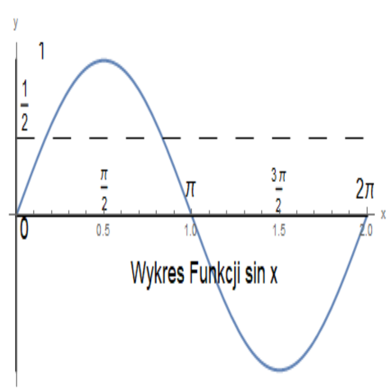
Rozwiązanie (ii). Głównymi pierwiastkami równania

$$|\sin x| = 1, \quad \text{lub} \quad \sin x = 1 \quad \text{lub} \quad \sin x = -1.$$

są liczby

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{lub} \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

Zobaczmy to również na wykresie funkcji $y = \sin x$.



Wszystkie rozwiązanie dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji sinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{3\pi}{2} + \pi + 2k\pi =$$

dla parzystych i dla nieparzystych k. To znaczy, że wszystkie rozwiązania są następującej postaci:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

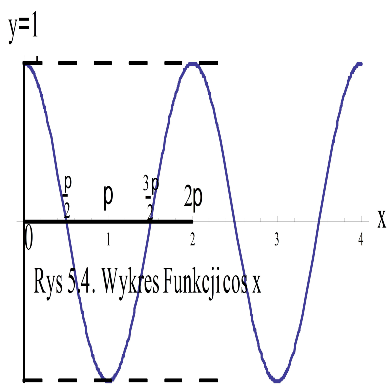
Przykład 1.4 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$(i) \quad \cos x = 0, \qquad (ii) \quad |\cos x| = 1.$$

Rozwiązanie (i). Głównymi pierwiastami tego równania, to znaczy zerami funkcji cosinus w jej okresie od 0 do 360^o lub w mierze łukowej w zakresie od $0 \le \alpha \le 2\pi$ są rozwiązania

$$x = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{lub} \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

Zobaczmy to również na wykresie funkcji $y = \cos x$.



Rys 5.4. Wykres Funkcji cos x

Wszystkie rozwiązanie dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji cosinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad \text{lub} \quad x_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

To znaczy, że wszystkie rozwiązania są następującej postaci:

$$x_k = (2k+1)\,\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

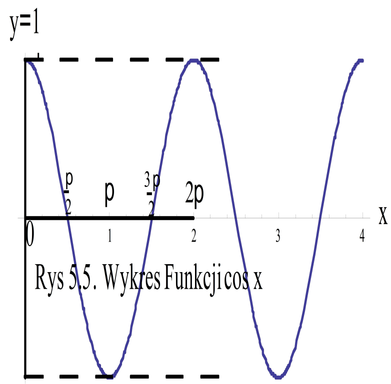
Rozwiązanie (ii). Głównymi pierwiastkami równania

$$|\cos x| = 1, \quad \text{lub} \quad \cos x = 1 \quad \text{lub} \quad \cos x = -1.$$

są liczby

$$x = 0, \qquad \text{lub} \quad x = \pi.$$

Zobaczmy to również na wykresie funkcji $y = \cos x$.



Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielikrotność okresu funkcji cosinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi,$$

To znaczy, że wszystkie rozwiązania dla parzystych i nieparzystych k, są następującej postaci:

$$x_k = k\,\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Zauważmy, że sinus i cosinus kątów $\alpha_k = k\pi$ lub $\alpha_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ możemy napisać w następujęj postaci potęgi minus jedynki:

$$\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k, \qquad \cos k\pi = (-1)^k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... :$$

Przykład 1.5 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$(i) \quad \mathrm{tg}x = 0, \qquad (ii) \quad |\mathrm{tg}x| = 1.$$

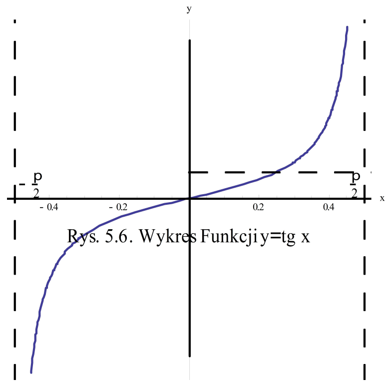
$$(iii) \quad \mathrm{ctg}x = 0, \qquad (iv) \quad \mathrm{ctg}x| = 1.$$

Rozwiązanie (i). Ponieważ okresem funkcji tangens jest liczab π, to głównym pierwiastkiem równania

$$\mathrm{tg}\ x = 0,$$

jest $x = 0$. Wtedy również sin $x = 0$.

Zobaczmy to również na wykresie funkcji $y = \operatorname{tg} x$.



Rys. 5.6. Wykres Funkcji y=tg x

Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastka głównego wielokrotność okresu funkcji tangens. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

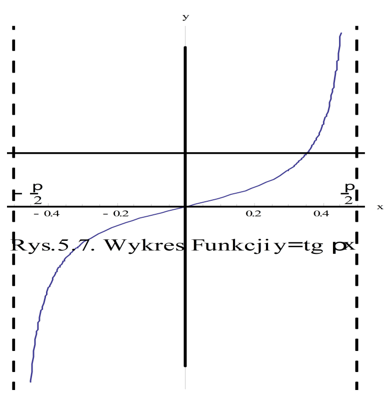
$$x_k = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Rozwiązanie (ii). W zakresie okresu funkcji tangens od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$ są dwa pierwiastki główne równania

$$|\operatorname{tg}|\, x = 1, \quad \text{lub} \quad \operatorname{tg} x = 1, \quad \operatorname{tg} x = -1.$$

$x_1 = -\frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$.

Zobaczmy to również na wykresie funkcji $y = \operatorname{tg} x$.



Rys.5.7. Wykres Funkcji y=tg px

Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastka głównego wielokrotność okresu funkcji tangens. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = -\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

lub zapisane w postaci jednego wzoru

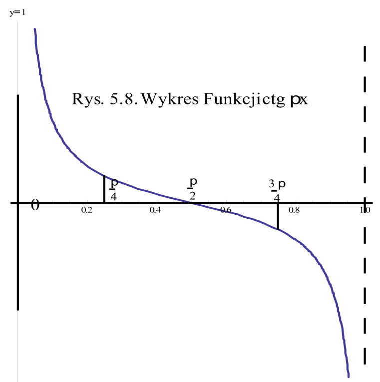
$$x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Rozwiązanie (iii). W zakresie okresu funkcji cotangens od 0 do $,\pi$ pierwiastkiem głównym równania

$$\operatorname{ctg} x = 0,$$

jest liczba $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Zobaczmy to również na wykresie funkcji $y = \operatorname{ctg} x$.



Rys. 5.8. Wykres Funkcjictg px

Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastka głównego wielokrotność okresu funkcji cotangens. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

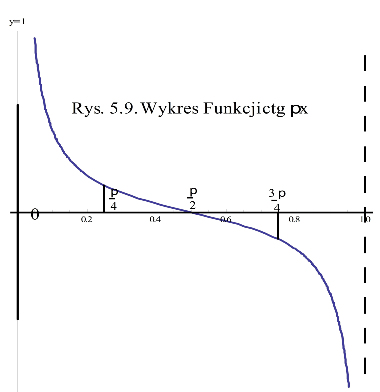
Rozwiązanie (iv). Głównymi pierwiastkami równania

$$|\mathrm{ctg} x| = 1, \quad \text{lub} \quad \mathrm{ctg} x = 1 \quad \text{lub} \quad \mathrm{ctg} x = -1.$$

są liczby

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad \text{lub} \quad x = \frac{3\pi}{4}.$$

Zobaczmy to również na wykresie funkcji $y = \mathrm{ctg} x$.



Rys. 5.9. Wykres Funkcjictg px

Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielikrotność okresu funkcji cosinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi = (4k+1)\frac{\pi}{4}, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{3\pi}{4} + k\pi = (4k+3)\frac{\pi}{4}.$$

dla $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$
Niżej w tablicy podane są wartości funkcji trygonometrycznych kątów wybranych.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
$\alpha = 0$	0	1	0	∞
$\alpha = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\alpha = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\alpha = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\alpha = \frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
$\alpha = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\alpha = \pi$	0	-1	0	$-\infty$
$\alpha = \frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\alpha = \frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0
$\alpha = \frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\alpha = 2\pi$	0	1	0	∞

Przykład 1.6 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$\sin x - \cos x = 0.$$

Rozwiązanie. W pierszej kolejności zauważmy, że dziedziną $D = R$ wyrażenia trygonometrycznego w równaniu jest ziór R wszystkich liczb rzeczywisych.
Z tablicy odczytujemy pierwiastki równania w przedziale $0 \leq x \leq 2\pi$ okresu $\omega = 2\pi$ funkcji sinus i cosinus

$$\sin x = \cos x.$$

Zatem widzimy, że sinus równy jest cosinus dla kątów $x = \frac{\pi}{4}$ oraz $x = \frac{5\pi}{4}$, które leżą w pierwszej lub trzeciej ćwiartce koła trygonometrycznego.
Wszystkie rozwiązania dostajemy dodając okres $\omega = 2\pi$ do tych rozwiązanń

$$x_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Rozwiązanie tego równania znajdziemy innym sposobem rozakładając wyrażenie trygonometryczne na czynniki. Mianowicie, lewą stronę równiania zapiszmy w postaci

$$\sin x - \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 0.$$

Stosując wzór na różnicę sinusów, otrzymamy iloczn

$$\begin{aligned}\sin x - \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) &= 2\sin\frac{(\frac{\pi}{2} - x) - x}{2}\cos(\frac{\frac{\pi}{2} - x) + x}{2} \\ &= 2\cos\frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{4} - x) \\ &= \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x) = 0.\end{aligned}$$

Skąd pierwiastki główne w przedziale $[0, 2\pi]$ okresu funkcji sinus

$$\frac{\pi}{4} - x = 0, \quad \text{lub} \quad \frac{\pi}{4} - x = \pi$$

Dodają okres $\omega = 2\pi$ funkcji sinus, otrzymamy wszystkie rozwiązania

$$x_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{\pi}{4} + (2k-1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Przykład 1.7 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x = 2.$$

Rozwiązanie. Z tablicy wartości funkcji tangens i cotangens, widzimy, że suma tangensa i cotangensa kąta x jest równa 2, jeżli $\mathrm{tg}x = 1$ i $\mathrm{ctg}x = 1$ dla $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{5\pi}{4}$. Wszystkie rozwiązania otrzymamy dodając do głównych pierwiastków wielokrotność ich okresu.
To znaczy

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{5\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1 \pm 2, ...;$$

Te same rozwiązania otrzymamy innym sposobem. Mianowicie, napiszmy to równanie w postaci ekwiwalętnej

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2.$$

Zauważmy, że dziedziną wyrażenia trygonometrycznego w tym równaniu jest zbiór

$$D = \{x \in R: \ \sin x \neq 0, \ \ i \ \ \cos x \neq 0\} = \{x \in R: \ x \neq k\frac{\pi}{2}, \ \text{i} \ \ x \neq k\pi, \}$$

dla całkowitych liczb $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$
Przekształcamy to równanie korzystając z jedynki trygonometrycznej i z sinusa podwojonego kąta

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \ \cos x} = \frac{1}{\sin x \ \cos x} = 2$$

Skąd wynika równanie

$$2\sin x \ \cos x = 1, \quad \text{lub} \quad \sin 2x = 1.$$

Z tablicy wartości funkcji trygonometrycznych pamiętamy, że $\sin 2x = 1$ dla pierwiastka $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{5\pi}{4}$ w kole trygonometrycznym. Dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu $\omega = \pi$ funkcji $\sin 2x$ otrzymamy wszystkie rozwiązania tego równania.

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{5\pi}{4} + k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Zauważmy, że powyżesze pierwiastki równania są takie same jak w pierszym sposobie rozwiązania i należą do dziedziny równania.

Przykład 1.8 *Rozwiąż równanie*

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$$

Rozwiązanie. Tej postaci równia rozwiązujemy przez podstawienie nowej niewiadomej $t = \sin x$, żeby otrzymać równanie kwadratowe

$$2t^2 - 3t + 1 = 0.$$

Wyóżnik tego r'ownania $\Delta = (-3)^2 - 4 * 2 * 1 = 1$. Zatem rozwiązania

$$t_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{3+1}{4} = 1.$$

Wracając do niewiadomej x, znajdujemy wszystkie rozwiązania

$$\sin x = \tfrac{1}{2}, \quad x_k = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

lub

$$\sin x = 1, \quad x_k = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

dla całkowitych $k = 0, \pm 1, \pm 2...;$

Zadanie 1.8 *Rozwiąż równanie*

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Jednym ze skutecznych sposobów rozwiązywania równań trygonometrycznych jest rozkład na czynniki wyrażenia trygonometrycznego. Niżej podajemy przykład takiego sposobu.

Przykład 1.9 *Rozwiąż równanie*

$$\cos x + 3\cos 3x + \cos 5x = 0.$$

Rozwiązanie. Zastosujmy wzór do nawiasu na suma cosinusów

$$\begin{aligned}
(\cos x + \cos 5x) + \cos 3x &= 2\cos\frac{x+5x}{2}\cos\frac{x-2x}{2} + \cos 3x \\
&= 2\cos 3x \ \cos(-2x) + \cos 3x \\
&= \cos 3x(2\cos 2x + 1) = 0.
\end{aligned}$$

Zatem, wyrażenie trygonometryczne rozłożyliśmy na dwa czynniki, które przyrównujemy do zera

$$\cos 3x = 0, \quad \text{i} \quad 2\cos 2x + 1 = 0, \quad \cos x - \frac{1}{2}.$$

Rozwiązując powyżesze proste równania, otrzymamy następujące serie rozwiązań:
Gdy

$$\cos 3x = 0,$$

to rozwiązanie

$$3x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x_k = \tfrac{1}{6}\pi + +\tfrac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

$$3x = \tfrac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad x_k = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

oraz gdy $\cos 3x = -\dfrac{1}{2}$, to rozwiązanie

$$3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x_k = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

$$3x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, \quad x_k = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Przykład 1.10 *Rozwiąż równanie*

$$\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0.$$

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $t = \sin x$. Wtedy dostajemy równanie kwadratowe dla niewiadomej t

$$t^2 + 2t - 3 = 0,$$

którego rozwiązanie jest $t_1 = -3$ i $t_2 = 1$. Ponieważ $-1 \leq \sin x \leq 1$, dlatego $t = -3$ należy udrzucić. Pozostaje wartość $t = 1$. Dla tej wartości

$$\sin x = 1, \quad \text{gdy} \quad x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Zadanie 1.9 *Rozwiąż równanie*

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - (1 - \sqrt{3})\mathrm{tg} x - \sqrt{3} = 0.$$

Zadanie 1.10 *Rozwiąż równanie*

$$\sin x - \sin 4x + \sin 7x = 0.$$

Zadanie 1.11 *Rozwiąż równanie*

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0.$$

1.6 Nierówności trygonometryczne

Podobnie jak równania trygonometryczne, rozwiązujemy nierówności trygonometrtczne korzystając z wzorów redukcyjnych, wzorów sumy i różnicy funkcji trygonometrycznych.

Przykład 1.11 *Rozwiąż nierównówność w przedziala* $[0, 2\pi]$.

$$(i) \quad \sin x \leq \frac{1}{2}, \qquad (ii) \quad \cos x \geq \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie (i). Funkcja sinus osiąga wartość $\sin x = \frac{1}{2}$ dla kąta $x = \frac{\pi}{6}$ w pierwszej ćwiartce, lub dla kąta $x = \frac{5\pi}{6}$ w drugiej ćwiartce. Zatem nierówność jest prawdziwa przedziale $[0, 2\pi]$ dla

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \quad \text{lub} \quad \frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2\pi.$$

Zobaczmy to rozwiązanie na wykresie funkcji sinus.

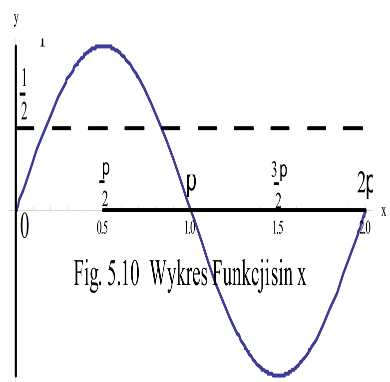
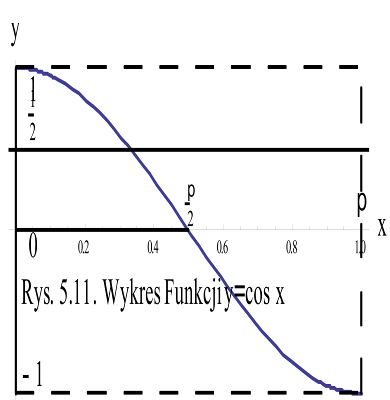


Fig. 5.10 Wykres Funkcjisin x

Rozwiązanie (ii). Funkcja cosinus osiąga wartość $\cos x = \frac{1}{2}$ dla kąta $x = \frac{\pi}{3}$ w pierwszej ćwiartce, lub dla kąta $x = \frac{5\pi}{3}$ w czwartej ćwiartce. Zatem nierówność jest prawdziwa przedziale $[0, 2\pi]$ dla

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \quad \text{lub} \quad \frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi.$$

Zobaczmy to rozwiązanie na wykresie funkcji sinus.

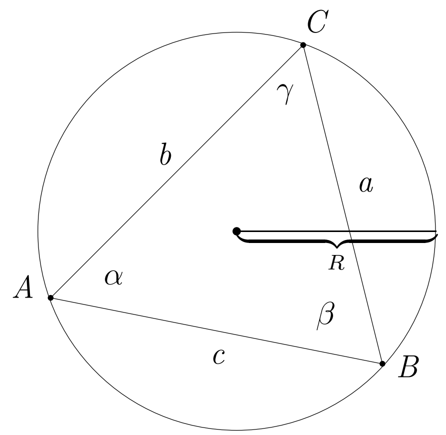


Rys. 5.11. Wykres Funkcji y=cos x

1.7 Twierdzenie sinusów

Twierdzenie 1.1 *W dowolnym trójkącie stosunek długości boków do sinusów kątów leżących na przeciw boków jest stały i równy średnicy okręgu opisanego na tym trójącie. To znaczy*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



Okrąg opisany na trójkącie

Dowód. Rozpatrujemy okrąg opisany na trójkącie ΔABC o promieniu R. Z wierzchołka A prowadzimy średnicę okrcęgu do przecięcia z okręgiem w punkcie D. Zauważmy, że krąty wpisane $\angle ABC = \beta$ i $\angle ADC = \delta$ w okrąg są oparte na tym samym łuku AC. Zatem są równe $\beta = \delta$. Trójkąt ΔADC jest prosty, gdyż kąt $\angle BCA$ opraty na średnicy jest prosty. Z tego prostokątnego trójkąta ΔADC, znajdujemy sinus kąta δ. Mianowicie, dla $0 \leq \delta < \frac{\pi}{2}$

$$\sin\delta = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{c}{2R}, \quad \text{lub} \quad \frac{c}{\sin\delta} = 2R, \quad \frac{c}{\sin\gamma} = 2R, \quad \gamma = \delta$$

Dla $\delta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ twierdzenie jest również prawdziwe, gdż $\sin\gamma = 1$, i $c = 2R$. Natomiast, dla $\gamma > \frac{\pi}{2}$ kąt $\delta = \pi - \gamma$ i wtedy $\sin\delta = \sin\gamma$ W tym przypadku twierdzenie jest również prawdziwe. Pozostałe wzory

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = 2R,$$

dowodzimy podobnie.
Twierdzenia sinusów w połączeniu z twierdzeniem cosinusów stosujemy w prost do wyznaczania boków i kątów trójkąta, na podstawie następujących dawanych

1. dwóch boków i kąta naprzeci w jednego z nich,
2. boku i dwóch kątów przyległych do tego boku,

Przykład 1.12 *Oblicz boki i kąty trójkąta ΔABC, mając długości dwóch boków $|AB| = c = 4$ i $|BC| = a = 2$ kąt $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ leżący na przeciw boku $[BC]$.*

Rozwiązanie. Zaznaczamy dane i niewiadome boki i kąty na rysunku

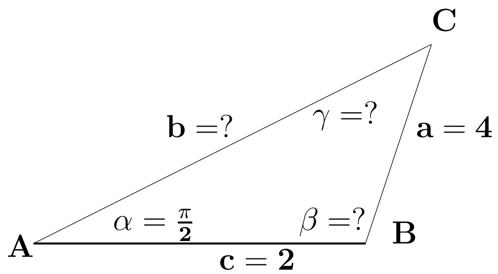


Fig. 5.14.Trójkąt $\triangle ABC$

Z twierdzenia sinusów obliczamy promień R okręgu opisanego na trójkącie

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R, \quad \frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2R, \quad \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2R, \quad R = 2.$$

Następnie też twierdzenia sinusów obliczamy sinus kąta γ leżącego naprzeciw boku $|AB| = c = 2$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R, \quad \sin\gamma = \frac{c}{2R} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Skąd znajdujemy kąt $\gamma = \frac{\pi}{6}$ i kąt β z sumy kątów w trójkącie

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad \beta = \pi - \alpha - \gamma = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

Pozostały bok $|AC| = b$ obliczamy z twierdzenia sinusów

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R, \quad b = 2R\sin\beta = 2 * 2 * \sin\frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3}.$$

1.8 Twierdzenie cosinusów

Podobnie jak twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów stosujemy do obliczanie boków i kątów dowolnych trójkątów. W dowolnym trójkącie ΔABC

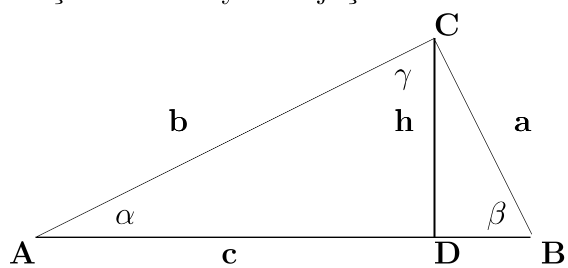


Fig. 5.15. Trójkąt $\triangle ABC$

o bokach i kątach zaznaczonych na rysunku zachodzą następujące związki pomiędzy bokami i kątami

$$(i)\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,c\cos\alpha$$

$$(ii)\ \ b^2 = a^2 + c^2 - 2a\,c\cos\beta$$

$$(iii)\ c^2 = a^2 + b^2 - 2a\,b\cos\gamma$$

Dowód. Udowodnimy pierwszą z wymienionych wyżej równości. Zauważmy, że w przypadku trójkąta prostokątnego, gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wzór (i) jest prawdziwy, gdyż wtedy stosuje się twierdzenie Pitagorasa. Dla $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Punkt **D**, spodek wysokśći **h** dzieli bok $[AB]$ na dwie części

$$|AD| = b\cos\alpha, \qquad |DB| = c - b\cos\alpha.$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów ΔADC i ΔDBC, otrzymamy

$$h^2 = b^2 - (b\cos\alpha)^2 = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2$$

Skąd dostajemy wzór (i), to jest

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,c\cos\alpha.$$

Pozostałe wzory (ii) oraz (iii) dowodziemy podobnie.
Twierdzenie cosinusów stosujemy najczęściej, żeby obliczyć trzeci bok gdy dane są dwa boki i kąt pomędzy nimi oraz do obliczenia wszystkich kątów gdy znane są wszystkie boki.

Przykład 1.13 *W trójkąta ΔABC, dane są długości dwóch boków $|AB| =$*

$c = 3$, $|AC| = b = 8$ *i kąt między nimi* $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, *jak na rysunku, oblicz bok* **a**.

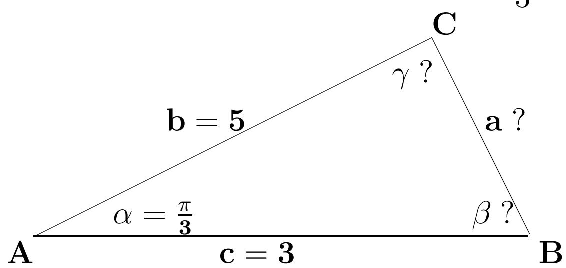


Fig. 5.16. Trójkąt $\triangle ABC$

Rozwiązanie. Z twierdzenia cosinusów obliczamy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,c\cos\alpha = 8^2 + 3^2 - 2*8*3*\frac{1}{2} = 49, \quad a = \sqrt{49} = 7.$$

Mając boki trójkąta, a, b, c obliczamy cosinus kątów β i γ.

$$\cos\beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2a\ c} = \frac{8^2 - 7^2 - 3^2}{2*7*3} = \frac{1}{7},$$
$$\cos\gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2a\ b} = \frac{3^2 - 7^2 - 8^2}{2*7*8} = -\frac{13}{14}$$

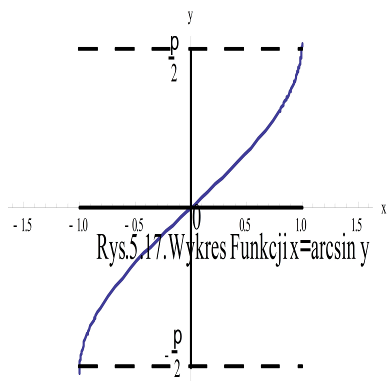
Wartośćci kątów odczytujemy z tablic lub jako argumenty funkcji cyklicznych.

1.9 Funkcje cykliczne

Funkcje cykliczne Arcsin α, Arccos α, Arctan α i Arccot α to są funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych w przedziałach w których funkcje trygonometryczne są rosnące lub malejące. Przejdźmy do opisu poszczególnych funkcji cyklicznych.]index$arcsin\ x, arccos\ x, arctg\ x, arcctg\ x$

1.9.1 Arcus sinus

Funkcja $y = \sin x$ jest rosnąca w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Zbiorem wartości funkcji sinus jest przedział$-1, 1]$. Zatem funkcja odwrotna $\arcsin y$ do funkcji $y = \sin x$ istnieje i jest określona w przedziale $[-1, 1]$. To znaczy dziedziną funkcji odwrotnej $\arcsin y$ do funkcji $y = \sin x$ jest zbiór wartości funkcji $\sin x$. Natomiast zbiorem wartości funkcji $\arcsin y$ jest przedział$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Zatem, mamy



Rys.5.17.Wykres Funkcji x=arcsin y

$$x = \arcsin y, \qquad -1 \leq y \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}$$

Niżej podajemy wykresy tych funkcji z zaznaczeniem ich zbiorów określoności i wartości.

x^o	$x - radian$	$y = \sin x$	$x = \arcsin y$
-90^o	$-\frac{\pi}{2}$	-1	$-\frac{\pi}{2}$
-60^o	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$
-45^o	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
-30^o	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$
0^o	0	0	0
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{\pi}{4}$
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	1	$-\frac{\pi}{2}$

Zauważmy, że zachodzą następujące tożsamości

$$(i) \quad \arcsin(\sin x) \equiv x, \quad \text{dla} \quad -\tfrac{\pi}{2} \leq x \leq \tfrac{\pi}{2}$$

$$(ii) \quad \sin(\arcsin x) \equiv x \quad \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1$$

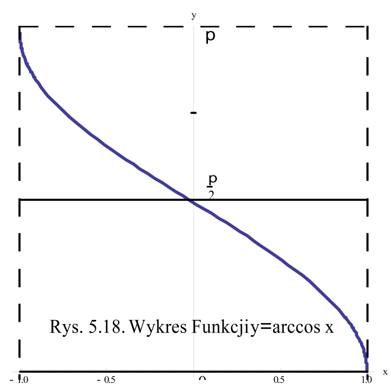
Rzeczywiście, niech $y = \sin x$, dla $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Wtedy funkcja $\sin x$ jest rosnąca i funkcja do niej odwrotna $x = \arcsin y$ istnieje i jest określona dla $y \in [-1, 1]$. Podstawiając za $y = \sin x$, otrzymujemy tożsamość (i).
Podobnie, niech $y = \arcsin x$ dla $x \in [-1, 1]$. Wtedy funkcja $\arcsin x$, jest rosnące i funkcja do niej odwrotna $x = \sin y$ istnieje i jest określona dla $y \in [-1, 1]$. Podstawiając $y = \arcsin x$ do równości $x = \sin y$, otrzymujemy tożsamość (ii).

1.9.2 Arcus cosinus

Funkcja $y = \cos x$ jest malejąca w przedziale $[0, \pi]$. Zbiorem wartości funkcji cosinus jest przedział$-1, 1]$. Zatem funkcja odwrotna $\arccos y$ do funkcji $y = \cos x$ istnieje i jest określona w przedziale $[-1, 1]$. To znaczy dziedziną funkcji odwrotnej $\arccos y$ do funkcji $y = \cos x$ jest zbiór wartości funkcji $\cos x$. Natomiast zbiorem wartości funkcji $\arccos y$ jest przedział $[0, \pi]$. Zatem, mamy

$$x = \arccos y, \qquad -1 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq \arccos y \leq \pi$$

Niżej podajemy wykresy tych funkcji z zaznaczeniem ich zbiorów określoności i wartości.



Rys. 5.18. Wykres Funkcjiy=arccos x

x^o	$x - radian$	$y = \cos x$	$x = \arccos y$
0	0	1	0
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
135^o	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
150^o	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
180^o	π	-1	π

Zachodzi prosty zawiązek pomiędzy arcus sinus i arcus cosinus

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{lub} \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x. \tag{1.7}$$

Rzeczywiście, zauważamy, że kąt

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin x \leq \pi,$$

gdyż kąt $-\dfrac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \dfrac{\pi}{2}$. Zatem mamy tożsamość

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \arccos x) = \sin(\arcsin x)$$

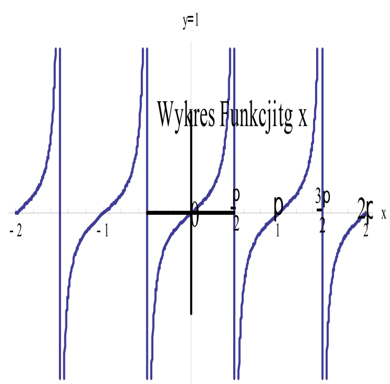
Skąd wynika tożsamość (2.7).

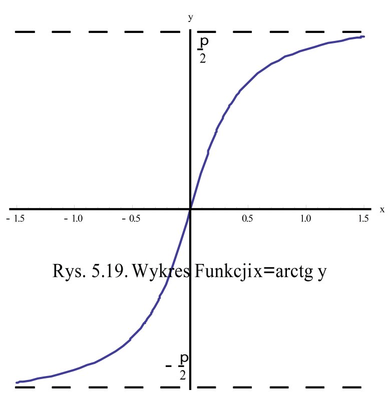
1.9.3 Arcus tangens

Funkcja tangens tg x jest okresowa o okresie $\omega = \pi$ i określona dla argumentu $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$. Zbiorem warości funkcji tangens jest zbiór liczb rzeczywistych $R = (-\infty, \infty)$. Funkcja tangens tg x jest rosnąca od $-\infty$ do ∞ w przedziale otwartym $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$. Zatem, funkcja odwrotna x = arctg y do funkcji $y = \text{tg}\, x$ w przedziale $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ istnieje.
Zbiorem wartości funkcji x = arctg y jest przedział otwarty $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$.

$$-\frac{\pi}{2} < \text{arctg}\, y < \frac{\pi}{2}, \qquad -\infty < y < \infty.$$

Niżej podajemy wykresy funkcji tangens i arcus tangens.





Rys. 5.19. Wykres Funkcjix=arctg y

1.9.4 Arcus cotangens

Funkcja $y = cotx$ jest malejąca w przedziale otwartym $(0, \pi)$ i jej zbiorem wartości są wszystkie liczby rzeczywiste $-\infty < y < \infty$. Zatem funkcja odwrotna $x = \text{arccot } y$ istnieje i jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych $-\infty < y < \infty$. Natomiast jej zbior wartości zmienia się w zakresie od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$, to znaczy

$$0 < \text{arccot } y < \frac{\pi}{2}, \qquad -\infty < y < \infty.$$

Zachodzi następujący zawiązek pomiędzy arcus tangens i arcus cotangens

$$\text{arctg } x + \text{arccot } x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{lub} \quad \text{arcot } x = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } x. \tag{1.8}$$

Rzeczywiście, zauważamy, że kąt

$$0 \le \frac{\pi}{2} - \text{arctg} x \le \pi,$$

gdyż kąt $-\frac{\pi}{2} \le \text{arctg} x \le \frac{\pi}{2}$. Zatem mamy tożsamość

$$\cot(\frac{\pi}{2} - \text{arctg} x) = \text{arctg} x$$

Skąd wynika tożsamość (2.8).

1.10 Zadania

1.10.1 Funkcje periodyczne

Zadanie 1.12 *Oblicz okres funkcji*

$$(i) \quad sin\frac{\pi x}{2}$$
$$(ii) \quad cos\frac{\pi x}{2}$$

Zadanie 1.13 *Podaj wykres funkcji*

$$(i) \quad sin\frac{\pi x}{4}, \quad -4\pi \le x \le 4\pi$$
$$(ii) \quad cos\frac{\pi x}{4}, \quad 0 \le x \le 8\pi.$$

Zadanie 1.14 *Oblicz okres funkcji*

$$(i) \quad sin\frac{2\pi x}{3}$$
$$(ii) \quad cos\frac{2\pi x}{3}$$

Zadanie 1.15 *Podaj wykres funkcji*

$$(i) \quad sin\frac{2\pi x}{3}, \quad -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$
$$(ii) \quad cos\frac{2\pi x}{3}, \quad 0 \leq x \leq 3\pi.$$

Zadanie 1.16 *Oblicz okres funkcji*

$$(i) \quad tg\frac{\pi x}{4}$$
$$(ii) \quad ctg\frac{\pi x}{4}$$

Zadanie 1.17 *Podaj wykres funkcji*

$$(i) \quad tg\frac{\pi x}{4}, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$$
$$(ii) \quad ctg\frac{\pi x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 4\pi.$$

Zadanie 1.18 *Funkcja $E[x]$ całość z x ma największą wartość*

$$E[x] \leq x$$

nie większą od x [6]
Sprawdź, że okres funkcji okresowej część ułamkowa z liczby x,

$$f(x) = x - E[x].$$

jest ròwny $\omega = 1$.
Oblicz okres i podaj wykresy funkcji

$$(i) \quad f(x) = E[3x], \quad (ii) \quad g(x) = E[\frac{4x}{3}]$$

1.10.2 Tożsamość trygonometryczna

Zadanie 1.19 *Sprawdź tożsamowść*

$$sin^4x - cos^4x = 1 - 2cos^2x \qquad \infty < x < \infty.$$

Zadanie 1.20 *Sprawdź tożsamowść*

$$(1 + tg^2x)cos^2x = 1 \qquad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, ...;$$

Zadanie 1.21 *Sprawdź tożsamowść*

$$\frac{1 + tg^2x}{1 + ctg^2x} = tg^2x \qquad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, ...;$$

[6] $E[x]$ Entier of x

Zadanie 1.22 *Wykaż, ze*

$$sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha+\beta)=2sin\alpha\ cos\beta$$

dla każdej rzeczyczywistej wrtości kątów α *i* β.

1.10.3 Rȯwnania trygonometryczne

Zadanie 1.23 *Rozwiąż rȯwnanie*

$$(i)\quad sin\frac{\pi x}{3}=0,\quad (ii)\quad cos\frac{\pi x}{3}=0.$$

Zadanie 1.24 *Rozwiąż rȯwnanie*

$$(i)\quad tg\frac{\pi x}{3}=0,\quad (ii)\quad ctg\frac{\pi x}{3}=0.$$

Zadanie 1.25 *Rozwiąż rȯwnanie*

$$(i)\quad sin\ x+cos\ x=0,\quad (ii)\quad sinx=cos\ x.$$

Zadanie 1.26 *Rozwiąż rȯwnanie*

$$(i)\quad tg\ x-ctg\ x=0\quad (ii)\quad tg\ x=sin\ x.$$

1.10.4 Nierȯwności trygonometryczne

Zadanie 1.27 *Rozwiąż nierȯwność*

$$(i)\quad sin\frac{\pi x}{6}<\frac{1}{2}\quad (ii)\quad cos\frac{\pi x}{3}>\frac{1}{2}$$

Zadanie 1.28 *Rozwiąż nierȯwność*

$$(i)\quad tg\frac{\pi x}{4}\leq 1\quad (ii)\quad ctg\frac{\pi x}{4}\geq 1$$

Zadanie 1.29 *Rozwiąż nierȯwność*

$$(i)\quad sin\pi x-cos\pi x\leq 0\quad (ii)\quad sin\ \pi x+cos\ \pi x\geq\frac{1}{2}$$

Zadanie 1.30 *Rozwiąż nierȯwność*

$$tg\pi x-ctc\pi x>0$$

1.10.5 Twierdzenie sinusȯw

Zadanie 1.31 *Oblicz boki i kąty trȯjkąta* ΔABC *mając długość dwȯch bokȯw*

$$|AB|=6,\quad |AC|=8\quad i\quad kat\ \angle\ ABC=60^o$$

Zadanie 1.32 *Oblicz boki trȯjkąta* ΔABC *mając długość boku* $|BC|=25$ *i kąty*

$$\angle CAB=30^o,\quad \angle\ ABC=60^o$$

1.10.6 Twierdzenie cosinusów

Zadanie 1.33 *Oblicz boki i kąty trójkąta ΔABC mając długość dwóch boków*

$$|AB| = 6, \quad |AC| = 8 \quad i \quad kat \angle\, CAB = 60^o$$

Zadanie 1.34 *Oblicz boki trójkąta ΔABC mając długość boków*

$$|AB| = 9, \qquad |BC| = 12$$

i kąt $\angle ABC = 30^o$.

1.10.7 Funkcje cykliczne

Zadanie 1.35 *Oblicza wartość wyrażenia*

$$arcsin\frac{1}{2} + arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zadanie 1.36 *Oblicza wartość wyrażenia*

$$arccos\frac{1}{2} + arcscos\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zadanie 1.37 *Oblicza wartość wyrażenia*

$$arctg\frac{1}{\sqrt{3}} + arctg\sqrt{3}$$

Zadanie 1.38 *Podaj wykres funkcji*

$$f(x) = sin(arcsin\ x)$$

dla argumentu $x \in [-1, 1]$.

Zadanie 1.39 *Podaj wykres funkcji*

$$f(x) = cos(arcsin\ x)$$

dla argumentu $x \in [-1, 1]$.

Zadanie 1.40 *Rozwiąż równanie*

$$arcsin\ x - arccos\ x = 0$$

Zadanie 1.41 *Rozwiąż równanie*

$$2arcsin\ x - arccos\ x = \pi$$

Zadanie 1.42 *Rozwiąż równanie*

$$arctg\ x - arcctg\ x = 0$$

Zadanie 1.43 *Rozwiąż równanie*

$$3arctg\ x - 2arcctg\ x = \pi$$

Chapter 2

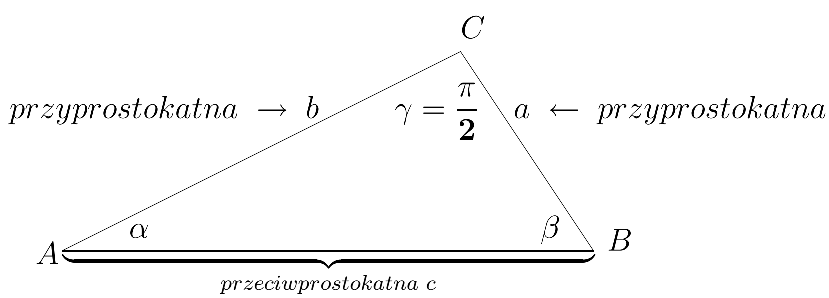
Trigonometria

Trigonometria to wiedza o związkach miarowych pomiedzy bokami i kątami trójkątów. Takie znaczenie słowa *Trigonometria* było używane w czasach starożytnych w Babilonie, Egipcie i Grecji.

2.1 Funkcje trygonometryczne

- $\sin\ \alpha$, czytamy sinus α, $\cos\ \alpha$, czytamy cosinus α,
- $\mathrm{tg}\ \alpha$ lub $\tan\ \alpha$, czytamy tangens α,
- $\mathrm{ctg}\ \alpha$ lub $\cot\ \alpha$, czytamy cotangence α,
- $\sec\ \alpha$, czytamy secant α, $\csc\ \alpha$, czytamy cosecant α.

Funkcje trygonometryczne określamy w trójkącie prostokątnym lub na kole trygonometrycznym.
Rozpatrzmy trójkąt prostokątny $\triangle ABC$ o wierzchołkach A, B, C przyprostpkątnych AC i BC oraz przeciwprostokątnej AB [1]



[1] W matematyce wyższej funkcje trygonometrytczne okeślane są przez szeregi potęgowe

Długości przyprostokątnych i przeciwprostokątnej oznaczamy małymi literami, piszemy

$$a = |BC|, \quad b = |AC|, \quad c = |AB|.$$

Definition 2.1 *Sinus kąta α to stosunek przyprostokątnej a leżącej naprzeciw kąta α do przeciwprostokątnej c*

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Definition 2.2 *Cosinus kąta α to stosunek przyprostokątnej b przyległej do kąta α do przeciwprostokątnej c*

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Definition 2.3 *Tangens kąta α to stosunek przyprostokątnej a leżącej naprzeciw kąta α do przyprostokątnej b przyległej do kąta α*

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b} \quad \text{lub} \quad \mathrm{tan}\alpha = \frac{a}{b}$$

Definition 2.4 *Cotangens kąta α to stosunek przyprostokątnej b leżącej przyległej do kąta α do przyprostokątnej a leżącej na przeciw kąta α*

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{lub} \quad \mathrm{cot}\alpha = \frac{a}{b}$$

Definition 2.5 *Secant kąta α to odwrotność sinusa kąta α. Zatem*

$$\mathrm{sec}\alpha = \frac{c}{a}$$

Definition 2.6 *Cosecant kąta α to odwrotność cosinusa kąta α. Zatem*

$$\mathrm{sec}\alpha = \frac{c}{b}$$

Zauważmy, że odwrotność tangensa kąta α równa jest cotangensowi kąta α i odwrotność cotangensa kąta α równa jest tangensowi kąta α

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \mathrm{ctg}\alpha, \qquad \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$$

Przykład 2.1 *Podaj wartości funkcji trygonometrycznych określonych w trójkącie prostokątnym o bokach $a = 3,\ b = 4,\ c = 5$*

Rozwiązanie. Kąty tego trójkąta prostokątnego $\alpha = 30^o, \beta = 60^o,\ \gamma = 90^o$

$$sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad tg\alpha = \frac{3}{4},$$
$$ctg\alpha = \frac{4}{3}, \quad sec\alpha = \frac{5}{3}, \quad csc\alpha = \frac{5}{4}.$$

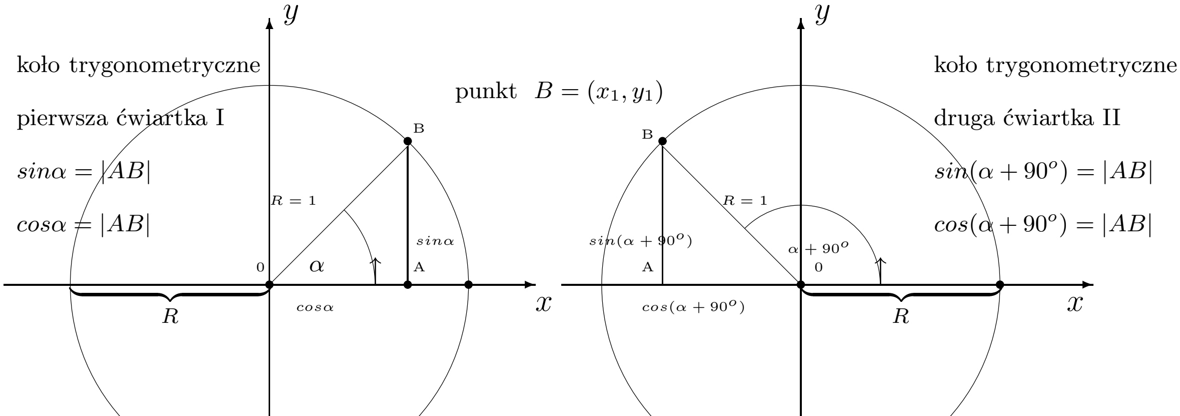
Zauważmy, że określenie funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym dotyczy tylko kątów

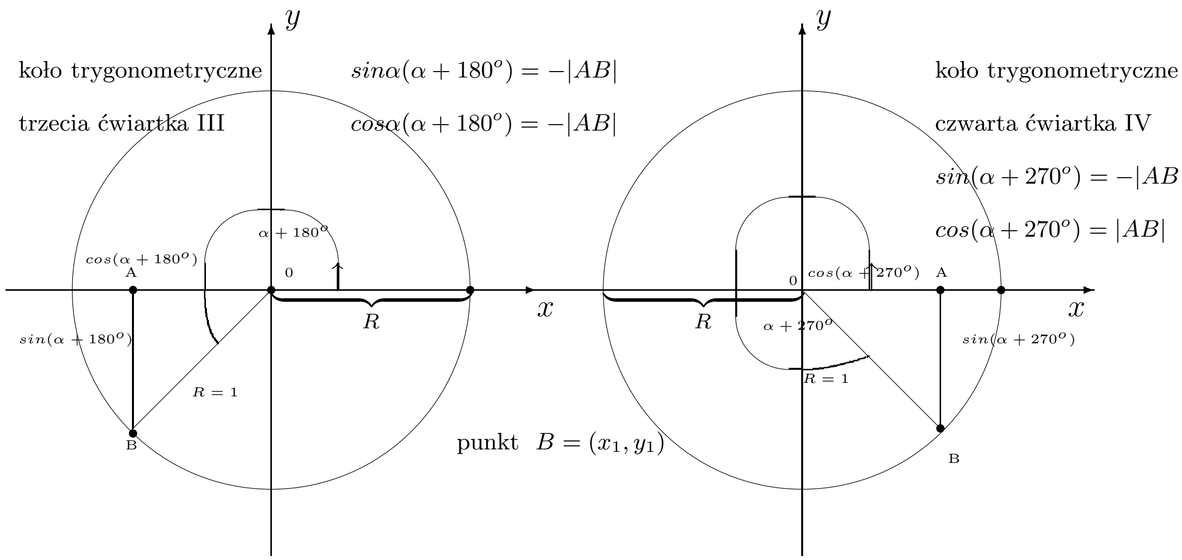
$$0 \leq \alpha \leq 90^o \qquad lub\ w\ mierze\ lukowej\ \ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ponieważ kąty α i β w trójkącie prostokątnym zmieniają się od zera do kąta prostego. W tym dla $\alpha = 0$ cotangens i secant są nieokreślone. Również dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$ tangens i cosecant nie są określone.
Niżej podamy deficje funkcji trygonometrycznych na kole trygonometrycznym. Funkcje sinus i cosinus okrešlone są dla wszystkich wartości rzeczywistych argumentu $\alpha \in \{-\infty, \infty\}$. Natomiast funkcje tangens okrešlona jest dla rzeczwistych wartości argumentu $\alpha \neq \frac{k\pi}{2},\ k = 0, 1, 2, ...;$ a funkcja cotangens okrešlna jest dla wszystkich rzeczywistych warto.sci agumentu $\alpha \neq k\pi,\ k = 0, 1, 2, 3, ...;$
Wartości funkcji sinus i cosinus leżą w przedziel domkinętym $[-1, 1]$. wartości funkcji tangens i cotanges przebiegają cały zbiò liczb rzeczywistych od minus nieskończoności $-\infty$ do plus nieskończoności ∞.
Znak wartości fukcji trugonometrycznych zależy od ćwiartki pierwszej I, drugiej II, trzeciej lub czwartej IV do ktòrej należy argument α.
Dla okešlenia znaku wartości funkcji trygonometrycznych stosujemy heurystyczną zasadę:
W pierwszej ćwiarte wszystkie są dodatnie sinus, cosinus, tangens i kotangens, w drugie tylko sinus jest dodatni, w trzecj tangens i cotangens są dodatnie , a w czwartej tylko cosinus jest dodatni.

2.2 Koło trygonometryczne.

Dla wszystkich kątów o wartościach rzeczywistych, ujemnych lub dodatnich, funkcje trygonometryczne definiujemy w kole trygonometrycznym.





Definition 2.7 *Sinus kąta α to stosunek współrzędnej* $\mathbf{y_1}$ *do promienia* $\mathbf{R}$

$$\sin \alpha = \frac{y_1}{R}$$

Definition 2.8 *Cosinus kąta α to stosunek współrzędnej* $\mathbf{x_1}$ *do promienia* $\mathbf{R}$

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{R}$$

Definition 2.9 *Tangens kąta α to stosunek współrzędnej* $\mathbf{y_1}$ *do wpsółrzędnej* $\mathbf{x_1}$

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{y_1}{x_1}, \quad x_1 \neq 0,$$

Definition 2.10 *Cotangens kąta α to stosunek współrzędnej* $\mathbf{x_1}$ *do wpsółrzędnej* $\mathbf{y_1}$

$$\mathrm{ctg}\ \alpha = \frac{x_1}{y_1}, \quad y_1 \neq 0,$$

Definition 2.11 *Secant kąta α to odwrotność sinusa kąta α. Zatem*

$$\sec \alpha = \frac{R}{y_1}, \quad y_1 \neq 0,$$

Definition 2.12 *Cosecant kąta α to odwrotność cosinusa kąta α. Zatem*

$$\csc \alpha = \frac{R}{x_1}, \quad x_1 \neq 0.$$

Ponieważ secant i cosecant określone są przez sinus i cosinus, dlatego dalej wystarczy rozpatrywać cztery funkcje trygonometryczne sinus, cosinus, tangens i cotangens.

2.2.1 Wzory redykcyjne

Wprost z definicji funkcji trygonometrycznych zauważamy, że wszystkie funkcje są nieujemne w pierwszej ćwiartce koła trygonometrycznego, gdyż dla kąta

$$0 \leq \alpha \leq 90^o,$$

współrzędne punktu $p = (x_1, y_1)$ są nieujemne, to jest $x_1 \geq 0,\ y_1 \geq 0$ i promień $R > 0$.
W drugiej ćwiartce tylko sinus ($\sin\alpha \geq 0$), jest nieujemny, gdyż współrzędna $y_1 \geq 0$.
W trzeciej ćwiartce tangens i cotanges ($\text{tg}\alpha \geq 0,\ \text{ctg}\alpha \geq 0$), są nieujemne, gdyż obie współrzędne $x_1 \leq 0, , y_1 \leq 0$ są ujemne i wtedy iloraz ($\frac{y_1}{x_1} \geq 0$) lub ($\frac{x_1}{y_1}$ $\geq$0).
W czwartej ćwiartce tylko cosinus ($\cos\alpha \geq 0$) jest nieujemny, gdyż współrzędna $x_1 \geq 0$. W tej pozycji kąta α, z wykresu koła trygonometrycznego odczytujemy wartości funkcji trygonometrycznych zapisane w niżej podanej tabeli

$0 \leq \alpha \leq 90^o$	$\sin\alpha \geq 0$	$\cos\alpha \geq 0$	$\text{tg}\alpha \geq 0$	$\text{ctg}\alpha \geq 0$
$90^o \leq \alpha \leq 180^o$	$\sin\alpha \geq 0$	$\cos\alpha \leq 0$	$\text{tg}\alpha \leq 0$	$\text{ctg}\alpha \leq 0$
$180^o \leq \alpha \leq 270^o$	$\sin\alpha \leq 0$	$\cos\alpha \leq 0$	$\text{tg}\alpha \geq 0$	$\text{ctg}\alpha \geq 0$
$270 \leq \alpha \leq 360^o$	$\sin\alpha \leq 0$	$\cos\alpha \geq 0$	$\text{tg}\alpha \leq 0$	$\text{ctg}\alpha \leq 0$

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta α osiągają już w pierwszej ćwiartce koła trygonometrycznego wszystkie możliwe wartości bezwzględne (z dokładnością do znaku). Zatem, inne wartości różnią się od nich jedynie znakiem. Te różnice ustalają wzory redukcyjne, które podajemy niżej.
Najpierw, zauważmy, że jeżeli kąt $0 \leq \alpha \leq 90^o$ leży w pierwszej ćwiartce to kąt $90^o - \alpha$ też leży w pierwszej ćwiartce oraz kąt $90^o + \alpha$ leży w drugiej ćwiartce. Natomiast, kąt $-\alpha$ leży w czwartej ćwiartce. W tej pozycji kąta α, z wykresu koła trygonometrycznego odczytujemy wartości funkcji trygonometrycznych zapisane w niżej podanej tabeli

$\sin(90^o - \alpha) = \cos\alpha$	$\sin(90^o + \alpha) = \cos\alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(90^o - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(90^o + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\text{tg}(90^o - \alpha) = \text{ctg}\alpha$	$\text{tg}(90^O + \alpha) = -\text{ctg}\alpha$	$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\alpha$
$\text{ctg}(90^O - \alpha) = \text{tg}\alpha$	$\text{ctg}(90^O + \alpha) = -\text{tg}\alpha$	$\text{ctg}(-\alpha) = -\text{ctg}\alpha$

Teraz, zauważmy, że jeżeli kąt $0 \leq \alpha \leq 90^o$ leży w pierwszej ćwiartce to kąt $180^o - \alpha$ leży w drugiej ćwiartce oraz kąt $180^o + \alpha$ leży w trzeciej ćwiartce.

$\sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin(180^o + \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(180^o + \alpha) = -\cos\alpha$
$\text{tg}(180^o - \alpha) = -\text{tg}\alpha$	$\text{tg}(180^O + \alpha) = \text{tg}\alpha$
$\text{ctg}(180^O - \alpha) = -\text{ctg}\alpha$	$\text{ctg}(180^O + \alpha) = \text{ctg}\alpha$

Zauważmy podobnie, że jeżeli kąt $0 \leq \alpha \leq 90^o$ leży w pierwszej ćwiartce to kąt $270^o - \alpha$ leży w trzeciej ćwiartce oraz kąt $180^o + \alpha$ leży w czwartej ćwiartce. Zatem, mamy następujące wzory redukcyjne:

$\sin(270^o - \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(270^o + \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(270^o - \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(270^o + \alpha) = \sin\alpha$
$\mathrm{tg}(270^o - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}(270^O + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$
$\mathrm{ctg}(270^O - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(270^O + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$

Niżej w tablicy podajemy zebrane wzory redukcyjne w mierze łukowej kątów.

Kąt	sinus	cosinus	tangens	cotangens
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$(\cos\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$
$\pi + \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$
$2\pi - \alpha$	$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$	$\mathrm{tg}(2\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(2\pi - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$

2.3 Zadania

Zadanie 2.1 *Długości boków trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$ są równe*

$$a = |BC| = 6, \quad b = |AC| = 8, \quad c = |AB| = 10$$

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych

$$sin\ \alpha, \quad sin\ \beta, \quad cos\ \alpha, \quad cos\ \beta,$$
$$tg\ \alpha, \quad tg\ \beta, \quad cotg\ \alpha, \quad cotg\ \beta$$

kątów $\alpha,\ \beta$ leżących naprzeciw odpowiednich boków $BC,\ AC$.

Zadanie 2.2 (i) *Narysuj położenie punktów*

$$p = (p_1, p_2) = (\sqrt{3}, 1), \quad q = (q_1, q_2) = (-\sqrt{3}, -1).$$

na kole trygonometrycznych o promieniu $R = 2$.
(ii) *Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$\begin{array}{llll} (a)\ \ sin\ 30^0 = \frac{p_2}{R} = & , sin\ 60^0 = \frac{p_1}{R} = \\ (b)\ \ cos\ 30^0 = \frac{p_1}{R} = & , cos\ 60^0 = \frac{p_2}{R} = \\ (c)\ \ tg\ 30^0 = \frac{p_2}{p_1} = & , tg\ 60^0 = \frac{p_1}{p_2} = \\ (d)\ \ cotg\ 30^0 = \frac{p_1}{p_2} = & , cotg\ 60^0 = \frac{p_2}{p_1} = \end{array}$$

(iii) *Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$
\begin{array}{llllllll}
(a) & sin\ 210^0 & = \dfrac{q_2}{R} & = & ,sin\ 240^0 & = & \dfrac{q_1}{R} & = \\
(b) & cos\ 210^0 & = \dfrac{q_1}{R} & = & ,cos\ 240^0 & = & \dfrac{q_2}{R} & = \\
(c) & tg\ 210^0 & = \dfrac{q_2}{q_1} & = & ,tg\ 240^0 & = & \dfrac{q_1}{q_2} & = \\
(d) & cotg\ 210^0 & = \dfrac{q_1}{q_2} & = & ,cotg\ 240^0 & = & \dfrac{q_2}{q_1} & =
\end{array}
$$

Zadanie 2.3 *Korzystając ze wzorów redukcyjnych oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$
\begin{array}{llll}
(a) & sin\ 120^0 = & & sin\ 150^0 = \\
(b) & cos\ 120^0 = & & cos\ 150^0 = \\
(c) & tg\ 120^0 = & & tg\ 150^0 = \\
(d) & cotg\ 120^0 = & & cotg\ 150^0 =
\end{array}
$$

Zadanie 2.4 *Korzystając ze wzorów redukcyjnych oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$
\begin{array}{llll}
(a) & sin\ 210^0 = & & sin\ 240^0 = \\
(b) & cos\ 210^0 = & & cos\ 240^0 = \\
(c) & tg\ 210^0 = & & tg\ 240^0 = \\
(d) & cotg\ 210^0 = & & cotg\ 240^0 =
\end{array}
$$

Zadanie 2.5 *Korzystając ze wzorów redukcyjnych oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$
\begin{array}{llll}
(a) & sin\ 300^0 = & & sin\ 330^0 = \\
(b) & cos\ 300^0 = & & cos\ 330^0 = \\
(c) & tg\ 300^0 = & & tg\ 330^0 = \\
(d) & cotg\ 300^0 = & & cotg\ 330^0 =
\end{array}
$$

Zadanie 2.6 (i) *Oblicz okres następującej funkcji:*

$$
\begin{array}{llll}
(a) & f(x) = sin\dfrac{1}{3}x, & (b) & f(x) = cos\dfrac{1}{3}x. \\
(c) & f(x) = tg\dfrac{1}{3}x, & (d) & f(x) = cotg\dfrac{1}{3}x.
\end{array}
$$

Zadanie 2.7 *Narysuj wykres funkcji*

$$
\begin{array}{llll}
(i) & f(x) = sin\dfrac{1}{3}x, & dla & 0 \leq x \leq 6\pi \\
(ii) & f(x) = tg\dfrac{1}{3}x & dla & -3\pi \leq x \leq 3\pi.
\end{array}
$$

2.3.1 Funkcje periodyczne

Funkcja $f(x)$ jest periodyczna, jeżeli istnieje liczba dodatnia $\omega > 0$ taka, że

$$f(x+\omega) = f(x), \tag{2.1}$$

dla każdej rzeczywistej wartości argumentu należącego do dziedziny $x \in D$. [2]
Jasne, że jeżeli funkcja $f(x)$ jest periodyczna o okresie $\omega > 0$, to zachodzi następująca tożsamość:

$$f(x + k\,\omega) = f(x), \qquad x \in D,$$

dla każdego całkowitego $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
Okresem funkcji $f(x)$ nazywamy najmiejszą z liczb $\omega > 0$, która spełnia tożsamość (2.1). [3]

Niżej sprawdzimy, że *funkcje trygonometryczne są periodyczne.*
Mianowicie, zauważamy, że jeżeli promień R obróci się o 360^o lub w mierze łukowej o 2π, to punkt $p = (x_1, y_1)$ wróci do pozycji wyjściowej. Co wiecej, jeżeli promień R obróci się w kierunku dodatnim lub ujemnym o wielokrotność okresu $\omega = 360^o$ lub w mierze łukowej o wielokrotność $\omega = 2\pi$, to punkt $p = (x_1, y_1)$ też wróci do pozycji wyjściowej.
Okresem funkcji sinus i cosinus jest liczba $\omega = 360^o$ lub w mierze łukowej liczba $\omega = 2\pi$. Natomiast, dla funkcji tanges i cotangens okresem jest liczba miejsza $\omega = 180^o$ lub w mierze łukowej $\omega = \pi$. Istotnie, funkcje tangens i cotangens osiągają te same wartości w pierwszej i w trzeciej ćwiartce koła trygonometrycznego, gdyż

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y_1}{-x_1}, \qquad \text{oraz} \quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{x_1}{y_1} = \frac{-x_1}{-y_1}, \qquad x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 0.$$

Przykład 2.2 *Oblicz okres następującej funkcji:*

$$f(x) = \sin\frac{3}{2}x$$

Rozawiązanie. Wiemy, że funkcja sinus ma okres 2π. Zatem okresem funkcji $f(x)$ jest liczba ω taka, że

$$f(x+\omega) = \sin\frac{3}{2}(x+\omega) = \sin(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\omega) = \sin\frac{3}{2}x = f(x)$$

dla każdego rzeczywistego x.
Skąd obliczamy okres

$$\frac{3}{2}\omega = 2\pi, \quad \omega = \frac{4}{3}\pi$$

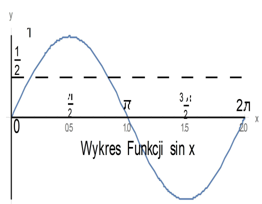
[2] Dziedziną funakcji $f(x)$ nazywamy zbiór argumentów x dla ktòch $f(x)$ jest okkre].slna
[3] Tożsamość znaczy, że równość zachodzi dla wszystkich wartości x w dziedzinie tożsamości $x \in D$.

Sprawdzamy, że okresem funkcji $f(x)$ jest liczba $\omega = \frac{4}{3}\pi$. Istotnie, mamy równość

$$\begin{aligned} f(x+\omega) = f(x+\frac{4}{3}\pi) &= \sin\frac{3}{2}(x+\frac{4}{3}\pi) \\ &= \sin(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\frac{4}{3}\pi). \\ &= \sin(x+2\pi) = \sin x = f(x). \end{aligned}$$

2.3.2 Wykresy funkcji trygonometrycznych

Funkcje trygonometryczne sinus i cosinus są periodyczne o okresie $\omega = 2\pi$ i określone na całej osi liczbowej. Wykreślając funkcje trygonometryczne agrument odkładamy na osi x, jak na rysunku.



Z określenia funkcji sinus

$$|\sin x| = |\frac{y_1}{R}| \leq 1, \quad \text{gdyz} \quad R \geq |y_1|, \quad \text{dla} \quad -\infty < x < \infty.$$

Wartości funkcji sinus nie przekraczają przedziału $[-1, 1]$. To znaczy, że dla wszystkich wartości argumentu $-\infty < x < \infty$ spełniona jest nieròwnoŝċ

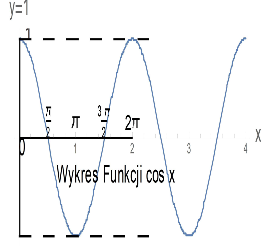
$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

Istotnie, z określenia funkcji sinus

$$|\sin x| = |\frac{y_1}{R}| \leq 1, \quad \text{gdyz} \quad R \geq |y_1|, \quad \text{dla} \quad -\infty < x < \infty.$$

Podobnie, funkcja cosinus jest periodyczna o okresie 2π i określona dla wszystkich rzeczywistych wartości kąta $-\infty < x < \infty$. Jej warotości nie przekraczają przedziału $[-1.1]$, gdyż z okresślenia funkcji cosinusa

$$|\cos x| = |\frac{x_1}{R}| \leq 1, \quad \text{gdyz} \quad R \geq |x_1|, \quad \text{dla} \quad -\infty < x < \infty.$$



Funkcje trygonometryczne tangens i cotangens są periodyczne o okresie $\omega = \pi$. Istotnie, kąt $x+\pi$ leży w trzeciej ćwiartce koła trygonometrycznego. Z tabeli odczytujeme wartość $\mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}x$. Zatem, prawdziwa jest następująca tożsamość:

$$f(x+\pi) = \mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}x = f(x),$$

dla każdego argumentu w dziedzinie funkcji tangens

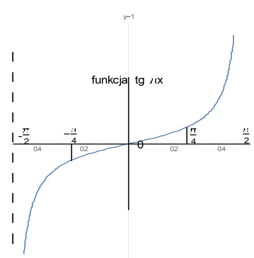
$$x \in D = \{x \ : x \neq \frac{k\pi}{2},\ k = 0, \pm 1 \pm 2, ...;\}.$$

i tożsamość

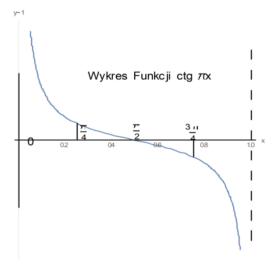
$$f(x+\pi) = \mathrm{ctg}(x+\pi) = \mathrm{ctg}x = f(x),$$

dla każdego argumentu w dziedzinie funkcji cotangens

$$x \in D = \{x \ : x \neq k\pi,\ k = 0, \pm 1 \pm 2, ...;\}.$$



Wykres funkcji cotangens



2.4 Tożsamości trygonometryczne

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość, która jest prawdziwa dla wszystkich wartości kątów w dziedzinie tożsamości. W odróżnieniu od tożsamości, równanie trygonometryczne jest spełnione tylko dla niektórych wartości kątów z dziedziny równania.
Podobnie, wzory trygonometryczne są tożsamościami dla wszystkich wartości kątów z dziedziny ich określenia.

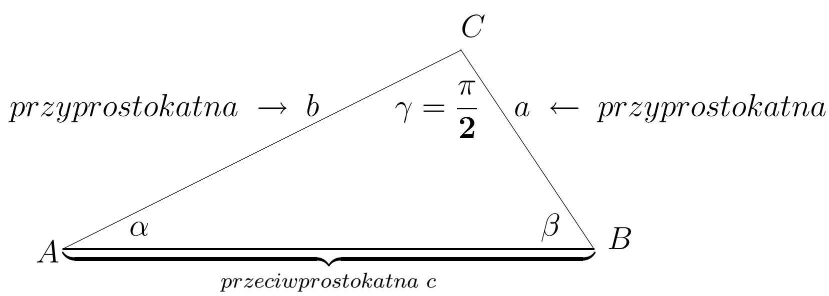
2.4.1 Jedynka trygonometryczna

Jedynka trygonometryczna to jest tożsamość

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

dla wszystkich wartości rzeczywistych kąta $\alpha \in (-\infty, \infty)$.
Wprost z definicji funkcji sinus i cosinus obliczamy przyprostokątne a i b trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$

$$a = c\sin\alpha, \quad b = c\cos\alpha.$$



Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że suma kwadratów przyprostokątnych równa jest kwadratowi przeciwprostokątnej

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

$$Po\ podstawieniu\ \ a = c * sin\ \alpha, \quad b = c * cos\ \alpha\ \ otrzymamy$$

$$(c \sin \alpha)^2 + (c \cos \alpha)^2 = c^2,$$

$$c^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = c^2 \ \ | : c^2,$$

Skąd wynika tozsamość

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

dla każdej wartości $\alpha \in (-\infty, \infty)$. To jest jedynka trygonometryczna.

Z jedynki trygonometrycznej wynikają następujące tożsamości:

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = csc^2\alpha, \qquad \alpha \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2,\ \pm 3, ...;$$

Istotnie, z definicji funkcji tangens wynika równość

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{cos^2\ \alpha + sin^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \csc^2\alpha.$$

dla każdego kąta $\alpha \neq (2\pi + 1)\dfrac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2,\ \pm 3, ...;$ dla którego

$$cos\ \alpha \neq 0.$$

To znaczy dla kąta α ze zbioru określoności funkcji tangens.[4]
Podobbnie z defincji funkcji cotangens wynika równość

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \sec^2\alpha.$$

dla każdego kąta $\alpha \neq k * \pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2,\ \pm 3, ...;$ dla którego

$$sin\ \alpha \neq 0.$$

To znaczy dla kąta α ze zbioru określoności funkcji cotangens. [5]

[4] Nieparzystą wielokrotność kąta prostego piszemy $(2\pi + 1)\dfrac{\pi}{2}, \quad k =, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$

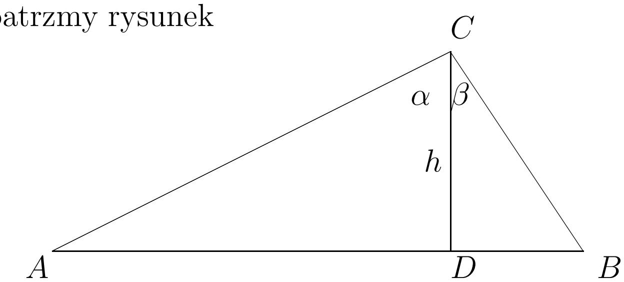
[5] Parzystą wielokrotność kąta półpełnego piszemy $k\ \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$

2.4.2 Funkcje sinus i cosinus sumy i różnicy kątów α, β

Niżej wyprowadzimy wzory na sumę i różnię dwóch kątów

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\alpha,\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \cos\alpha,\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \sin\alpha,\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \sin\alpha,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Rozpatrzmy rysunek



Wysokość h trójkąta $\triangle ABC$

Zauważamy, że

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{|AD|}{|AC|}, \quad \sin\beta = \frac{|DB|}{|BC|},\\
\cos\alpha &= \frac{h}{|AC|}, \quad \cos\beta = \frac{h}{|BC|},\\
h &= |AC|\cos\alpha, \quad h = |BC|\cos\beta
\end{aligned}
$$

Pole P trójkąta $\triangle ABC$ jest sumą pola P_1 trójkąta $\triangle ADC$ i pola P_2 trójkąta $\triangle DBC$

$$
P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2}|AC|\,|BC|\sin((\alpha+\beta) \tag{2.3}
$$

Z drugiej strony, wiemy, że

$$
P_1 = \frac{1}{2}|AC|\ h\ \sin\alpha, \qquad P_2 = \frac{1}{2}|BC|\ h\ \sin\beta, \tag{2.4}
$$

Porównując pola określone przez równości (2.3) i (2.4), przez proste przekształcenia, otrzymamy wzór na sinus sumy dwóch kątów α i β

$$\frac{1}{2}|AC|\,|BC|\sin((\alpha+\beta) = \frac{1}{2}|AC|\ h\ \sin\alpha + \frac{1}{2}|BC|\ h\ \sin\beta,$$

$$|AC|\,|BC|\sin(\alpha+\beta) = |AC|\ |BC|\ \cos\beta\ \sin\alpha + |AC|\ |BC|\ \cos\alpha,$$

$Skad\ sinus\ sumy$

$$\sin(\alpha+\beta) = \underbrace{\sin\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\alpha}_{sin\ (\alpha+\beta)},$$

Pozostałe wzory wyprowadzamy korzystając ze wzorów redukcyjnych.

$$\begin{aligned}
\sin((\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) &= \sin\alpha\ \cos(-\beta) + \sin(-\beta)\ \cos\alpha \\
&= \underbrace{\sin\alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \cos\alpha}_{sin\ (\alpha-\beta)}, \\
\cos(\alpha+\beta) = \sin(90^o - (\alpha+\beta)) &= \sin((90^o-\alpha)-\beta) \\
&= \sin(90^o-\alpha)\cos\beta - \sin\beta\cos(90^o-\alpha), \\
&= \underbrace{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}_{cos\ (\alpha+\beta)}, \\
\cos(\alpha-\beta) = \sin(90^o - (\alpha-\beta)) &= \sin((90^o-\alpha)+\beta) \\
&= \sin(90^o-\alpha)\cos\beta + \sin\beta\cos(90^o-\alpha), \\
&= \underbrace{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}_{cos\ (\alpha-\beta)},
\end{aligned}$$

Wzory na tangens i cotangens sumy i różnicy dwóch kątów wynikają bezpośrednio z powyższych wzorów

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\alpha}{\cos\alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \sin\alpha} = \underbrace{\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}}_{tg\ (\alpha+\beta)}$$

$$dla \quad \alpha+\beta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \sin\alpha}{\sin\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\alpha} = \underbrace{\frac{\mathrm{ctg}\alpha\ \mathrm{ctg}\beta - 1}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}}_{ctg\ (\alpha+\beta)}$$

$$dla \quad \alpha+\beta \neq k\ \pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;$$

Podobnie wyprowadzamy wzory na tangens i cotangens różnicy dwóch kątów.

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\ \cos\beta-\sin\beta\ \cos\alpha}{\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\beta\ \sin\alpha}=\underbrace{\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}}_{tg\ (\alpha-\beta)}$$

$$dla\quad \alpha-\beta\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,....;$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\beta\ \sin\alpha}{\sin\alpha\ \cos\beta-\sin\beta\ \cos\alpha}=\underbrace{\frac{\mathrm{ctg}\alpha\ \mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha}}_{ctg\ (\alpha-\beta)}$$

$$dla\quad \alpha-\beta\neq k\,\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,....;$$

2.4.3 Wzory kąta podwȯjonego

Wzory kąta podwójnego wynikają bezpośrednio z powyższych wzorów na sumę. Mianowicie, dla $\alpha=\beta$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\ \cos\alpha,\quad dla\quad \alpha\in(-\infty,\infty)$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\quad dla\quad \alpha\in(-\infty,\infty)$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha},\quad dla\quad \alpha\neq(2k+1)\ \frac{\pi}{4},\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...;$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}^2\alpha},\quad dla\quad \alpha\neq k\,\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...;$$

2.4.4 Wzory kąta połówkowego

Wzory kąta połówkowego otrzymujemy przez podstawienie do powyższych wzorów kąta podwójnego zamiast α połowę kąta $\frac{1}{2}\alpha$, wtedy otrzymamy

$$\sin\alpha=2\sin\frac{1}{2}\alpha\ \cos\frac{1}{2}\alpha,\qquad \alpha\in(-\infty,\infty),$$

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{1}{2}\alpha-\sin^2\frac{1}{2}\alpha,\quad \cos\alpha=1-2\sin^2\frac{1}{2}\alpha,\quad \cos\alpha=2\cos^2\frac{1}{2}\alpha-1$$

$$\alpha\in(-\infty,\infty),$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}\quad dla\quad \alpha\neq(2k+1)\ \frac{\pi}{2},\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...;$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\frac{1}{2}\alpha-1}{2\mathrm{ctg}^2\frac{1}{2}\alpha},\quad dla\quad \alpha\neq k\,\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...;$$

2.4.5 funkcje trygonometryczne połowy kąta

Z powyższych wzorów kąta połówkowego bezpośrednio wynikają wzory połowy kąta. Mianowicie, obliczając cosinus i sinus ze wzorów

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 1, \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$$

otrzymamy wzóry cosinusa i sinusa na połowę kąta α

$$|\cos\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad |\sin\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

dla $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

Wzory połowy kąta dla tangensa i cotangensa wynikają bezpośrednio z defincji tych funkcji i wzorów dla sinusa i cosinusa

$$|\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha| = |\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}| = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

dla $\alpha \neq (2k+1)\,\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;$

Cotangens jest odwrotnością tangensa, zatem

$$\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

dla $\alpha \neq 2k\,\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;$

2.4.6 Wyrażenie funkcji trygonometrycznych przez $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha$

Oznaczmy przez

$$t = \mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha \quad dla \quad \alpha \neq (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;.$$

Wtedy funkcje trygonometryczne kąta α można zapisać w postaci następujących wymierażeń wymiernych zmiennej t.

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty,$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \quad t \neq -1, 1, \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1-t^2}{2t} \quad t \neq 0.$$

Istotnie, wiemy, że

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\ \cos\tfrac{1}{2}\alpha \\
&= \frac{2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\ \cos\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha+\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha} \\
&= \frac{\dfrac{2\sin\dfrac{1}{2}\alpha\ \cos\dfrac{1}{2}\alpha}{\cos^2\dfrac{1}{2}\alpha}}{\dfrac{\sin^2\dfrac{1}{2}\alpha+\cos^2\dfrac{1}{2}\alpha}{\cos^2\dfrac{1}{2}\alpha}} = \frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned}$$

Podobnie funkcja cosinus

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha-\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha \\
&= \frac{\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha-\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}{\cos^2\tfrac{1}{2}+\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha} \\
&= \frac{\dfrac{\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha-\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}{\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha}}{\dfrac{\cos^2\tfrac{1}{2}+\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}{\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

Dla funkcji tangens i cotangens wzory płowy kąta wynikają wprost z ich definicji i wyżej podanych wzorów dla funkcji sinus i cosinus

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}, \quad t \neq -1, 1$$

Cotanges jest odwrotnością tangnsa. Zatem wzór dla cotangensa

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1-t^2}{2t}, \quad t \neq 0.$$

2.4.7 Suma i różnica funkcji trygonometrycznych

Niżej podajemy następujące wzory na sumę i ró znicę funkcji trygonometrycznych

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2},\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2},\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2},\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2},\\
\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta &= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\\
\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta &= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\\
\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{tg}\beta &= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\\
\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta &= \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Powyższe wzory wynikają ze wzorów (2.4) sinusa i cosinusa sumy i różnicy kątów. Mianowicie, wprowadzamy nowe zmienne

$$\alpha = x + y, \quad \beta = x - y, \quad x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2},$$

Korzystając ze wzorów (2.4) na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów zauważamy, że

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= \sin(x+y) + \sin(x-y)\\
&= (\sin x\cos y + \sin y\cos x) + (\sin x\cos y - \sin y\cos x)\\
&= 2\sin x\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.\\
\sin\alpha - \sin\beta &= \sin(x+y) - \sin(x-y)\\
&= (\sin x\cos y + \sin y\cos x) - (\sin x\cos y - \sin y\cos x)\\
&= 2\sin y\cos x = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta &= \cos(x+y) + \cos(x-y) \\
&= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + (\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\
&= 2\cos x \cos y = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}. \\
\cos\alpha - \cos\beta &= \cos(x+y) - \cos(x-y) \\
&= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) - (\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\
&= -2\sin x \sin y = -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}$$

Wzory sumy i różnicy tangensa i cotangensa wynikają wprost z definicji powyższych wzorów dla sinusa cosinusa.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}, \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \\
\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}, \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Ponieważ cotangens jest odwrotnością tangensa, zatem wzór dla sumy cotangensa

$$\mathrm{ctc}\alpha + \mathrm{ctg}\beta = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$
$$\mathrm{ctc}\alpha - \mathrm{ctg}\beta = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

2.5 Równania trygonometryczne

Zacznijmy od najprostrzych równań trygonometrycznych, rozwiązania których są częścią rozwiązań bardziej złożonych równań.

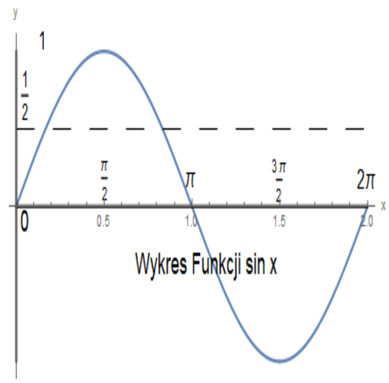
Przykład 2.3 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$(i) \quad \sin x = 0, \qquad (ii) \quad |\sin x| = 1.$$

Rozwiązanie (i). Głównymi pierwiastami tego równania, to znaczy zerami funkcji sinus w jej okresie od 0 do 360^o lub w mierze łukowej w zakresie od $0 \le \alpha \le 2\pi$ są rozwiązania

$$x = 0, \qquad \text{lub} \quad x = \pi.$$

Zobaczmy to również na wykresie funkcji $y = \sin x$.



Wszystkie rozwiązanie dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji sinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi,$$

dla parzystych i dla nieparzystych k. To znaczy, że wszystkie rozwiązania są wielokrotnością liczby π,

$$x_k = k\ \pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

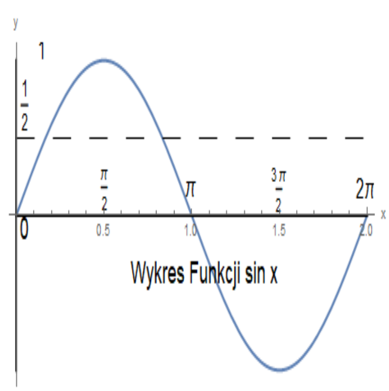
Rozwiązanie (ii). Głównymi pierwiastkami równania

$$|\sin x| = 1, \quad \text{lub} \quad \sin x = 1 \quad \text{lub} \quad \sin x = -1.$$

są liczby

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{lub} \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

Zobaczmy to również na wykresie funkcji $y = \sin x$.



Wszystkie rozwiązanie dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji sinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{3\pi}{2} + \pi + 2k\pi =$$

dla parzystych i dla nieparzystych k. To znaczy, że wszystkie rozwiązania są następującej postaci:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

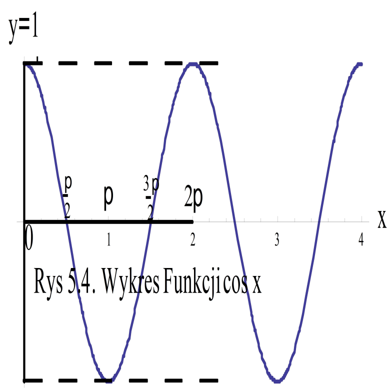
Przykład 2.4 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$(i) \quad \cos x = 0, \qquad (ii) \quad |\cos x| = 1.$$

Rozwiązanie (i). Głównymi pierwiastami tego równania, to znaczy zerami funkcji cosinus w jej okresie od 0 do 360^o lub w mierze łukowej w zakresie od $0 \le \alpha \le 2\pi$ są rozwiązania

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{lub} \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

Zobaczmy to również na wykresie funkcji $y = \cos x$.



Wszystkie rozwiązanie dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji cosinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

To znaczy, że wszystkie rozwiązania są następującej postaci:

$$x_k = (2k+1)\,\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

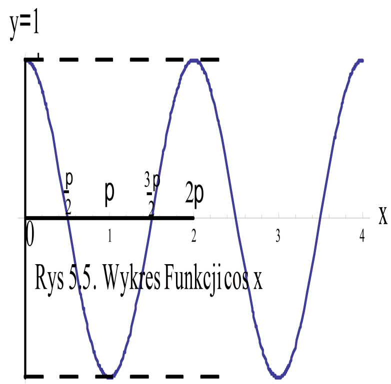
Rozwiązanie (ii). Głównymi pierwiastkami równania

$$|\cos x| = 1, \quad \text{lub} \quad \cos x = 1 \quad \text{lub} \quad \cos x = -1.$$

są liczby

$$x = 0, \quad \text{lub} \quad x = \pi.$$

Zobaczmy to również na wykresie funkcji $y = \cos x$.



Rys 5.5. Wykres Funkcji cos x

Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielikrotność okresu funkcji cosinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi,$$

To znaczy, że wszystkie rozwiązania dla parzystych i nieparzystych k, są następującej postaci:

$$x_k = k\ \pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Zauważmy, że sinus i cosinus kątów $\alpha_k = k\pi$ lub $\alpha_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ możemy napisać w następujęj postaci potęgi minus jedynki:

$$\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k, \qquad \cos k\pi = (-1)^k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... :$$

Przykład 2.5 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$(i) \quad \mathrm{tg} x = 0, \qquad (ii) \quad |\mathrm{tg} x| = 1.$$

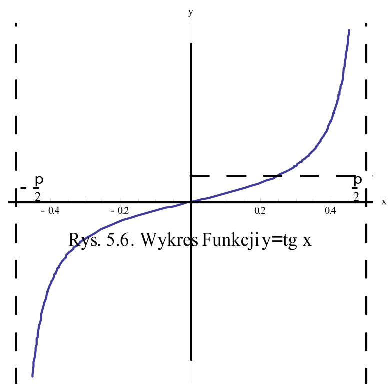
$$(iii) \quad \mathrm{ctg} x = 0, \qquad (iv) \quad \mathrm{ctg} x| = 1.$$

Rozwiązanie (i). Ponieważ okresem funkcji tangens jest liczab π, to głównym pierwiastkiem równania

$$\mathrm{tg}\ x = 0,$$

jest $x = 0$. Wtedy również sin $x = 0$.

Zobaczmy to również na wykresie funkcji $y = \text{tg}\, x$.



Rys. 5.6. Wykres Funkcji y=tg x

Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastka głównego wielokrotność okresu funkcji tangens. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

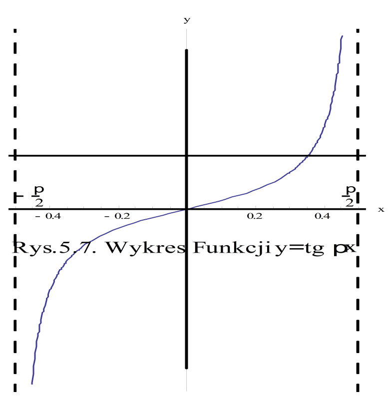
$$x_k = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Rozwiązanie (ii). W zakresie okresu funkcji tangens od $-\dfrac{\pi}{2}$ do $\dfrac{\pi}{2}$ są dwa pierwiastki główne równania

$$|\text{tg}|\, x = 1, \quad \text{lub} \quad \text{tg}\, x = 1, \quad \text{tg}\, x = -1.$$

$x_1 = -\dfrac{\pi}{4}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

Zobaczmy to również na wykresie funkcji $y = \text{tg}\, x$.



Rys.5.7. Wykres Funkcji y=tg px

Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastka głównego wielokrotność okresu funkcji tangens. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = -\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

lub zapisane w postaci jednego wzoru

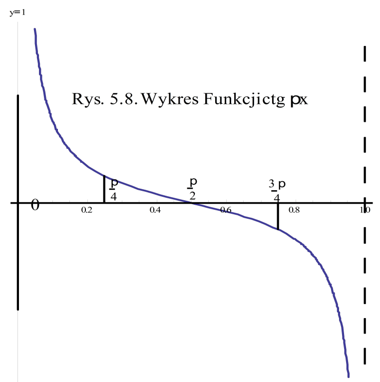
$$x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Rozwiązanie (iii). W zakresie okresu funkcji cotangens od 0 do $,\pi$ pierwiastkiem głównym równania

$$\operatorname{ctg} x = 0,$$

jest liczba $x = \frac{\pi}{2}$.

Zobaczmy to również na wykresie funkcji $y = \operatorname{ctg} x$.



Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastka głównego wielokrotność okresu funkcji cotangens. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

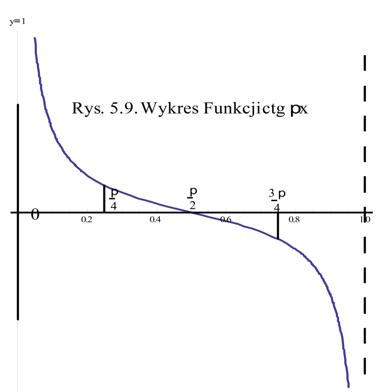
Rozwiązanie (iv). Głównymi pierwiastkami równania

$$|\mathrm{ctg} x| = 1, \quad \text{lub} \quad \mathrm{ctg} x = 1 \quad \text{lub} \quad \mathrm{ctg} x = -1.$$

są liczby

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad \text{lub} \quad x = \frac{3\pi}{4}.$$

Zobaczmy to również na wykresie funkcji $y = \mathrm{ctg} x$.



Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielikrotność okresu funkcji cosinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi = (4k+1)\frac{\pi}{4}, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{3\pi}{4} + k\pi = (4k+3)\frac{\pi}{4}.$$

dla $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$
Niżej w tablicy podane są wartości funkcji trygonometrycznych kątów wybranych.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
$\alpha = 0$	0	1	0	∞
$\alpha = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\alpha = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\alpha = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\alpha = \frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
$\alpha = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\alpha = \pi$	0	-1	0	$-\infty$
$\alpha = \frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\alpha = \frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0
$\alpha = \frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\alpha = 2\pi$	0	1	0	∞

Przykład 2.6 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$\sin x - \cos x = 0.$$

Rozwiązanie. W pierszej kolejności zauważmy, że dziedziną $D = R$ wyrażenia trygonometrycznego w równaniu jest zиór R wszystkich liczb rzeczywisych.
Z tablicy odczytujemy pierwiastki równania w przedziale $0 \leq x \leq 2\pi$ okresu $\omega = 2\pi$ funkcji sinus i cosinus

$$\sin x = \cos x.$$

Zatem widzimy, że sinus równy jest cosinus dla kątów $x = \dfrac{\pi}{4}$ oraz $x = \dfrac{5\pi}{4}$, które leżą w pierwszej lub trzeciej ćwiartce koła trygonometrycznego.
Wszystkie rozwiązania dostajemy dodając okres $\omega = 2\pi$ do tych rozwiązanń

$$x_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Rozwiązanie tego równania znajdziemy innym sposobem rozakładając wyrażenie trygonometryczne na czynniki. Mianowicie, lewą stronę równiania zapiszmy w postaci

$$\sin x - \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 0.$$

Stosując wzór na różnicę sinusów, otrzymamy iloczn

$$\begin{aligned}\sin x - \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) &= 2\sin\frac{(\frac{\pi}{2} - x) - x}{2}\cos(\frac{\frac{\pi}{2} - x) + x}{2} \\ &= 2\cos\frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{4} - x) \\ &= \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x) = 0.\end{aligned}$$

Skąd pierwiastki główne w przedziale $[0, 2\pi]$ okresu funkcji sinus

$$\frac{\pi}{4} - x = 0, \quad \text{lub} \quad \frac{\pi}{4} - x = \pi$$

Dodają okres $\omega = 2\pi$ funkcji sinus, otrzymamy wszystkie rozwiązania

$$x_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{\pi}{4} + (2k-1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Przykład 2.7 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$\text{tg}x + \text{ctg}x = 2.$$

Rozwiązanie. Z tablicy wartości funkcji tangens i cotangens, widzimy, że suma tangensa i cotangensa kąta x jest równa 2, jeżli $\text{tg}x = 1$ i $\text{ctg}x = 1$ dla $x = \dfrac{\pi}{4}$ lub $x = \dfrac{5\pi}{4}$. Wszystkie rozwiązania otrzymamy dodając do głównych pierwiastków wielokrotność ich okresu.
To znaczy

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{5\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1 \pm 2, ...;$$

Te same rozwiązania otrzymamy innym sposobem. Mianowicie, napiszmy to równanie w postaci ekwiwalętnej

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2.$$

Zauważmy, że dziedziną wyrażenia trygonometrycznego w tym równaniu jest zbiór

$$D = \{x \in R: \ \sin x \neq 0, \ \ i \ \ \cos x \neq 0\} = \{x \in R: \ x \neq k\frac{\pi}{2}, \ \text{i} \ \ x \neq k\pi, \}$$

dla całkowitych liczb $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$
Przekształcamy to równanie korzystając z jedynki trygonometrycznej i z sinusa podwojonego kąta

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \ \cos x} = \frac{1}{\sin x \ \cos x} = 2$$

Skąd wynika równanie

$$2\sin x \ \cos x = 1, \quad \text{lub} \quad \sin 2x = 1.$$

Z tablicy wartości funkcji trygonometrycznych pamiętamy, że $\sin 2x = 1$ dla pierwiastka $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{5\pi}{4}$ w kole trygonometrycznym. Dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu $\omega = \pi$ funkcji $\sin 2x$ otrzymamy wszystkie rozwiązania tego równania.

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{5\pi}{4} + k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Zauważmy, że powyżesze pierwiastki równania są takie same jak w pierszym sposobie rozwiązania i należą do dziedziny równania.

Przykład 2.8 *Rozwiąż równanie*

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$$

Rozwiązanie. Tej postaci równia rozwiązujemy przez podstawienie nowej niewiadomej $t = \sin x$, żeby otrzymać równanie kwadratowe

$$2t^2 - 3t + 1 = 0.$$

Wyóżnik tego r'ownania $\Delta = (-3)^2 - 4 * 2 * 1 = 1$. Zatem rozwiązania

$$t_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{3+1}{4} = 1.$$

Wracając do niewiadomej x, znajdujemy wszystkie rozwiązania

$$\sin x = \tfrac{1}{2}, \quad x_k = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

lub

$$\sin x = 1, \quad x_k = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

dla całkowitych $k = 0, \pm 1, \pm 2...;$

Zadanie 2.8 *Rozwiąż równanie*

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Jednym ze skutecznych sposobów rozwiązywania równań trygonometrycznych jest rozkład na czynniki wyrażenia trygonometrycznego. Niżej podajemy przykład takiego sposobu.

Przykład 2.9 *Rozwiąż równanie*

$$\cos x + 3\cos 3x + \cos 5x = 0.$$

Rozwiązanie. Zastosujmy wzór do nawiasu na suma cosinusów

$$\begin{aligned}(\cos x + \cos 5x) + \cos 3x &= 2\cos\frac{x+5x}{2}\cos\frac{x-2x}{2} + \cos 3x \\ &= 2\cos 3x\ \cos(-2x) + \cos 3x \\ &= \cos 3x(2\cos 2x + 1) = 0.\end{aligned}$$

Zatem, wyrażenie trygonometryczne rozłożyliśmy na dwa czynniki, które przyrównujemy do zera

$$\cos 3x = 0, \quad \text{i} \quad 2\cos 2x + 1 = 0, \quad \cos x - \frac{1}{2}.$$

Rozwiązując powyżesze proste równania, otrzymamy następujące serie rozwiązań:
Gdy

$$\cos 3x = 0,$$

to rozwiązanie

$$3x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x_k = \tfrac{1}{6}\pi + +\tfrac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

$$3x = \tfrac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad x_k = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

oraz gdy $\cos 3x = -\dfrac{1}{2}$, to rozwiązanie

$$3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x_k = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

$$3x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, \quad x_k = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Przykład 2.10 *Rozwiąż równanie*

$$\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0.$$

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $t = \sin x$. Wtedy dostajemy równanie kwadratowe dla niewiadomej t

$$t^2 + 2t - 3 = 0,$$

którego rozwiązanie jest $t_1 = -3$ i $t_2 = 1$. Ponieważ $-1 \leq \sin x \leq 1$, dlatego $t = -3$ należy udrzucić. Pozostaje wartość $t = 1$. Dla tej wartości

$$\sin x = 1, \quad \text{gdy} \quad x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Zadanie 2.9 *Rozwiąż równanie*

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x - (1 - \sqrt{3})\mathrm{tg} x - \sqrt{3} = 0.$$

Zadanie 2.10 *Rozwiąż równanie*

$$\sin x - \sin 4x + \sin 7x = 0.$$

Zadanie 2.11 *Rozwiąż równanie*

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0.$$

2.6 Nierówności trygonometryczne

Podobnie jak równania trygonometryczne, rozwiązujemy nierówności trygonometrtczne korzystając z wzorów redukcyjnych, wzorów sumy i różnicy funkcji trygonometrycznych.

Przykład 2.11 *Rozwiąż nierównówność w przedziala* $[0, 2\pi]$.

$$(i) \quad \sin x \leq \frac{1}{2}, \qquad (ii) \quad \cos x \geq \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie (i). Funkcja sinus osiąga wartość $\sin x = \frac{1}{2}$ dla kąta $x = \frac{\pi}{6}$ w pierwszej ćwiartce, lub dla kąta $x = \frac{5\pi}{6}$ w drugiej ćwiartce. Zatem nierówność jest prawdziwa przedziale $[0, 2\pi]$ dla

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \quad \text{lub} \quad \frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2\pi.$$

Zobaczmy to rozwiązanie na wykresie funkcji sinus.

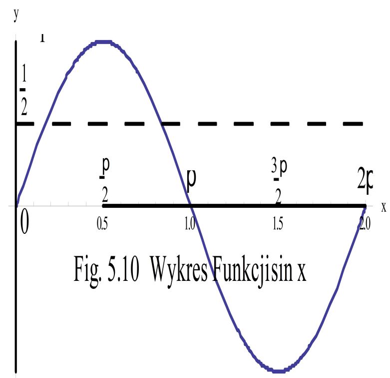
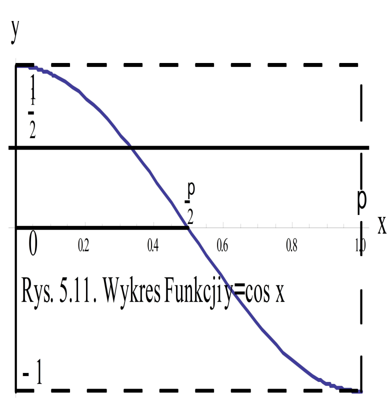


Fig. 5.10 Wykres Funkcjisin x

Rozwiązanie (ii). Funkcja cosinus osiąga wartość $\cos x = \frac{1}{2}$ dla kąta $x = \frac{\pi}{3}$ w pierwszej ćwiartce, lub dla kąta $x = \frac{5\pi}{3}$ w czwartej ćwiartce. Zatem nierówność jest prawdziwa przedziale $[0, 2\pi]$ dla

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \quad \text{lub} \quad \frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi.$$

Zobaczmy to rozwiązanie na wykresie funkcji sinus.

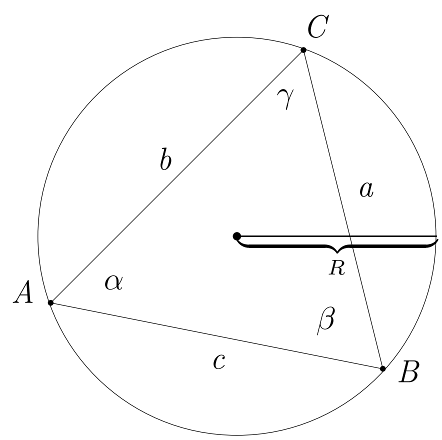


Rys. 5.11. Wykres Funkcji y=cos x

2.7 Twierdzenie sinusów

Twierdzenie 2.1 *W dowolnym trójkącie stosunek długości boków do sinusów kątów leżących na przeciw boków jest stały i równy średnicy okręgu opisanego na tym trójącie. To znaczy*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



Okrąg opisany na trójkącie

Dowód. Rozpatrujemy okrąg opisany na trójkącie ΔABC o promieniu R. Z wierzchołka A prowadzimy średnicę okrcęgu do przecięcia z okręgiem w punkcie D. Zauważmy, że krąty wpisane $\angle ABC = \beta$ i $\angle ADC = \delta$ w okrąg są oparte na tym samym łuku AC. Zatem są równe $\beta = \delta$. Trójkąt ΔADC jest prosty, gdyż kąt $\angle BCA$ oprаty na średnicy jest prosty. Z tego prostokątnego trójkąta ΔADC, znajdujemy sinus kąta δ. Mianowicie, dla $0 \le \delta < \frac{\pi}{2}$

$$\sin\delta = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{c}{2R}, \quad \text{lub} \quad \frac{c}{\sin\delta} = 2R, \quad \frac{c}{\sin\gamma} = 2R, \quad \gamma = \delta$$

Dla $\delta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ twierdzenie jest również prawdziwe, gdż $\sin\gamma = 1$, i $c = 2R$. Natomiast, dla $\gamma > \frac{\pi}{2}$ kąt $\delta = \pi - \gamma$ i wtedy $\sin\delta = \sin\gamma$ W tym przypadku twierdzenie jest również prawdziwe. Pozostałe wzory

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = 2R,$$

dowodzimy podobnie.
Twierdzenia sinusów w połączeniu z twierdzeniem cosinusów stosujemy w prost do wyznaczania boków i kątów trójkąta, na podstawie następujących dawanych

1. dwóch boków i kąta naprzeci w jednego z nich,
2. boku i dwóch kątów przyległych do tego boku,

Przykład 2.12 *Oblicz boki i kąty trójkąta ΔABC, mając długości dwóch boków $|AB| = c = 4$ i $|BC| = a = 2$ kąt $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ leżący na przeciw boku $[BC]$.*

Rozwiązanie. Zaznaczamy dane i niewiadome boki i kąty na rysunku

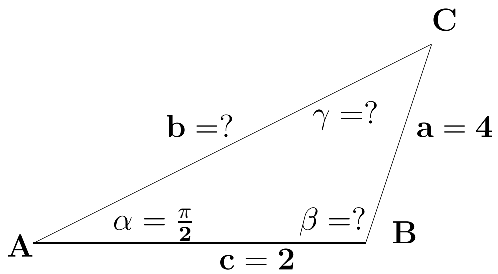


Fig. 5.14.Trójkąt $\triangle ABC$

Z twierdzenia sinusów obliczamy promień R okręgu opisanego na trójkącie

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R, \quad \frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2R, \quad \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2R, \quad R = 2.$$

Następnie też twierdzenia sinusów obliczamy sinus kąta γ leżącego naprzeciw boku $|AB| = c = 2$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R, \quad \sin\gamma = \frac{c}{2R} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Skąd znajdujemy kąt $\gamma = \frac{\pi}{6}$ i kąt β z sumy kątów w trójkącie

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad \beta = \pi - \alpha - \gamma = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

Pozostały bok $|AC| = b$ obliczamy z twierdzenia sinusów

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R, \quad b = 2R\sin\beta = 2 * 2 * \sin\frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3}.$$

2.8 Twierdzenie cosinusów

Podobnie jak twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów stosujemy do obliczanie boków i kątów dowolnych trójkątów. W dowolnym trójkącie ΔABC

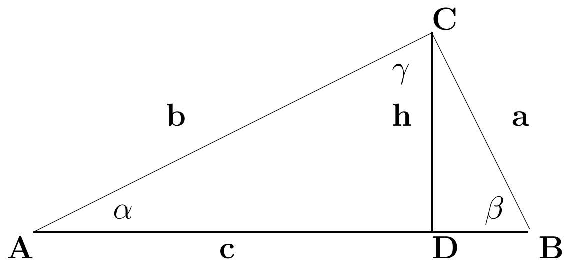


Fig. 5.15. Trójkąt $\triangle ABC$

o bokach i kątach zaznaczonych na rysunku zachodzą następujące związki pomiędzy bokami i kątami

$$(i)\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,c\cos\alpha$$

$$(ii)\ b^2 = a^2 + c^2 - 2a\,c\cos\beta$$

$$(iii)\ c^2 = a^2 + b^2 - 2a\,b\cos\gamma$$

Dowód. Udowodnimy pierwszą z wymienionych wyżej równości. Zauważmy, że w przypadku trójkąta prostokątnego, gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wzór (i) jest prawdziwy, gdyż wtedy stosuje się twierdzenie Pitagorasa. Dla $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Punkt **D**, spodek wysokści **h** dzieli bok $[AB]$ na dwie części

$$|AD| = b\cos\alpha, \qquad |DB| = c - b\cos\alpha.$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów ΔADC i ΔDBC, otrzymamy

$$h^2 = b^2 - (b\cos\alpha)^2 = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2$$

Skąd dostajemy wzór (i), to jest

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,c\cos\alpha.$$

Pozostałe wzory (ii) oraz (iii) dowodziemy podobnie.
Twierdzenie cosinusów stosujemy najczęściej, żeby obliczyć trzeci bok gdy dane są dwa boki i kąt pomędzy nimi oraz do obliczenia wszystkich kątów gdy znane są wszystkie boki.

Przykład 2.13 *W trójkąta ΔABC, dane są długości dwóch boków $|AB| =$*

$c = 3,\ |AC| = b = 8$ *i kąt między nimi* $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$*, jak na rysunku, oblicz bok* **a**.

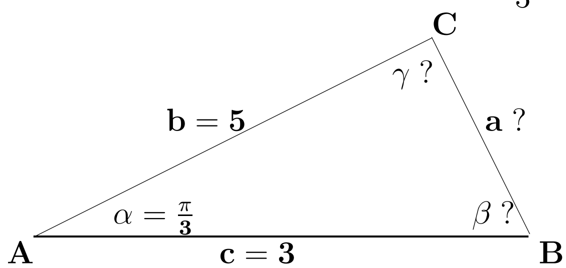


Fig. 5.16. Trójkąt $\triangle ABC$

Rozwiązanie. Z twierdzenia cosinusów obliczamy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\, c \cos\alpha = 8^2 + 3^2 - 2 * 8 * 3 * \frac{1}{2} = 49, \quad a = \sqrt{49} = 7.$$

Mając boki trójkąta, a, b, c obliczamy cosinus kątów β i γ.

$$\cos\beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2a\ c} = \frac{8^2 - 7^2 - 3^2}{2 * 7 * 3} = \frac{1}{7},$$
$$\cos\gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2a\ b} = \frac{3^2 - 7^2 - 8^2}{2 * 7 * 8} = -\frac{13}{14}$$

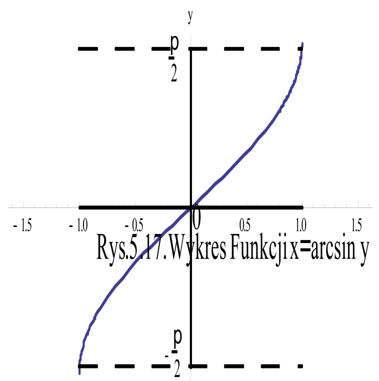
Wartośćci kątów odczytujemy z tablic lub jako argumenty funkcji cyklicznych.

2.9 Funkcje cykliczne

Funkcje cykliczne Arcsin α, Arccos α, Arctan α i Arccot α to są funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych w przedziałach w których funkcje trygonometryczne są rosnące lub malejące. Przejdźmy do opisu poszczególnych funkcji cyklicznych.]index*arcsin* x, *arccos* x, *arctg* x, *arcctg* x

2.9.1 Arcus sinus

Funkcja $y = \sin x$ jest rosnąca w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Zbiorem wartości funkcji sinus jest przedział$-1, 1]$. Zatem funkcja odwrotna $\arcsin y$ do funkcji $y = \sin x$ istnieje i jest określona w przedziale $[-1, 1]$. To znaczy dziedziną funkcji odwrotnej $\arcsin y$ do funkcji $y = \sin x$ jest zbiór wartości funkcji $\sin x$. Natomiast zbiorem wartości funkcji $\arcsin y$ jest przedział$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Zatem, mamy



Rys.5.17.Wykres Funkcji x=arcsin y

$$x = \arcsin y, \qquad -1 \leq y \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}$$

Niżej podajemy wykresy tych funkcji z zaznaczeniem ich zbiorów określoności i wartości.

x^o	$x - radian$	$y = \sin x$	$x = \arcsin y$
-90^o	$-\frac{\pi}{2}$	-1	$-\frac{\pi}{2}$
-60^o	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$
-45^o	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
-30^o	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$
0^o	0	0	0
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{\pi}{4}$
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	1	$-\frac{\pi}{2}$

Zauważmy, że zachodzą następujące tożsamości

$$(i) \quad \arcsin(\sin x) \equiv x, \quad \text{dla} \quad -\tfrac{\pi}{2} \leq x \leq \tfrac{\pi}{2}$$

$$(ii) \quad \sin(\arcsin x) \equiv x \quad \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1$$

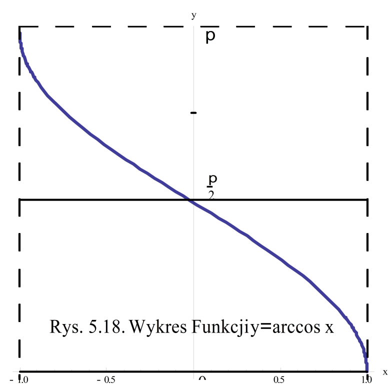
Rzeczywiście, niech $y = \sin x$, dla $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Wtedy funkcja $\sin x$ jest rosnąca i funkcja do niej odwrotna $x = \arcsin y$ istnieje i jest określona dla $y \in [-1, 1]$. Podstawiając za $y = \sin x$, otrzymujemy tożsamość (i).
Podobnie, niech $y = \arcsin x$ dla $x \in [-1, 1]$. Wtedy funkcja $\arcsin x$, jest rosnące i funkcja do niej odwrotna $x = \sin y$ istnieje i jest określona dla $y \in [-1, 1]$. Podstawiając $y = \arcsin x$ do równości $x = \sin y$, otrzymujemy tożsamość (ii).

2.9.2 Arcus cosinus

Funkcja $y = \cos x$ jest malejąca w przedziale $[0, \pi]$. Zbiorem wartości funkcji cosinus jest przedział$-1, 1]$. Zatem funkcja odwrotna $\arccos y$ do funkcji $y = \cos x$ istnieje i jest określona w przedziale $[-1, 1]$. To znaczy dziedziną funkcji odwrotnej $\arccos y$ do funkcji $y = \cos x$ jest zbiór wartości funkcji $\cos x$. Natomiast zbiorem wartości funkcji $\arccos y$ jest przedział $[0, \pi]$. Zatem, mamy

$$x = \arccos y, \qquad -1 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq \arccos y \leq \pi$$

Niżej podajemy wykresy tych funkcji z zaznaczeniem ich zbiorów określoności i wartości.



Rys. 5.18. Wykres Funkcjiy=arccos x

x^o	$x - radian$	$y = \cos x$	$x = \arccos y$
0	0	1	0
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
135^o	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
150^o	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
180^o	π	-1	π

Zachodzi prosty zawiązek pomiędzy arcus sinus i arcus cosinus

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{lub} \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x. \tag{2.7}$$

Rzeczywiście, zauważamy, że kąt

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin x \leq \pi,$$

gdyż kąt $-\dfrac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \dfrac{\pi}{2}$. Zatem mamy tożsamość

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \arccos x) = \sin(\arcsin x)$$

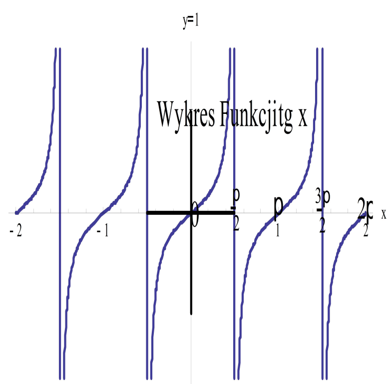
Skąd wynika tożsamość (2.7).

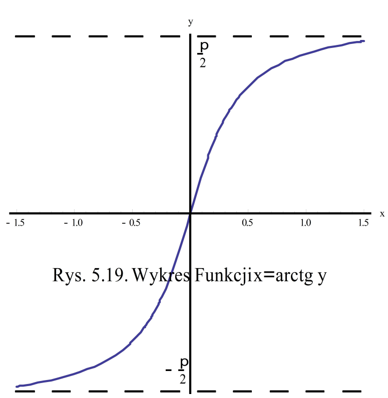
2.9.3 Arcus tangens

Funkcja tangens tg x jest okresowa o okresie $\omega = \pi$ i określona dla argumentu $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \ = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$. Zbiorem warości funkcji tangens jest zbiór liczb rzeczywistych $R = (-\infty, \infty)$. Funkcja tangens tg x jest rosnąca od $-\infty$ do ∞ w przedziale otwartym $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$. Zatem, funkcja odwrotna x = arctg y do funkcji $y =$ tg x w przedziale $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ istnieje.
Zbiorem wartości funkcji x = arctg y jest przedział otwarty $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$.

$$-\frac{\pi}{2} < \text{arctg } y < \frac{\pi}{2}, \qquad -\infty < y < \infty.$$

Niżej podajemy wykresy funkcji tangens i arcus tangens.





Rys. 5.19. Wykres Funkcjix=arctg y

2.9.4 Arcus cotangens

Funkcja $y = cotx$ jest malejąca w przedziale otwartym $(0, \pi)$ i jej zbiorem wartości są wszystkie liczby rzeczywiste $-\infty < y < \infty$. Zatem funkcja odwrotna $x =$ arccot y istnieje i jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych $-\infty < y < \infty$. Natomiast jej zbior wartości zmienia się w zakresie od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$, to znaczy

$$0 < \operatorname{arccot} y < \frac{\pi}{2}, \qquad -\infty < y < \infty.$$

Zachodzi następujący zawiązek pomiędzy arcus tangens i arcus cotangens

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{lub} \quad \operatorname{arcot} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x. \tag{2.8}$$

Rzeczywiście, zauważamy, że kąt

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \leq \pi,$$

gdyż kąt $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{2}$. Zatem mamy tożsamość

$$\cot(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x) = \operatorname{arctg} x$$

Skąd wynika tożsamość (2.8).

2.10 Zadania

2.10.1 Funkcje periodyczne

Zadanie 2.12 *Oblicz okres funkcji*

$$(i) \quad sin\frac{\pi x}{2}$$
$$(ii) \quad cos\frac{\pi x}{2}$$

Zadanie 2.13 *Podaj wykres funkcji*

$$(i) \quad sin\frac{\pi x}{4}, \quad -4\pi \leq x \leq 4\pi$$
$$(ii) \quad cos\frac{\pi x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 8\pi.$$

Zadanie 2.14 *Oblicz okres funkcji*

$$(i) \quad sin\frac{2\pi x}{3}$$
$$(ii) \quad cos\frac{2\pi x}{3}$$

Zadanie 2.15 *Podaj wykres funkcji*

$$(i) \quad sin\frac{2\pi x}{3}, \quad -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$
$$(ii) \quad cos\frac{2\pi x}{3}, \quad 0 \leq x \leq 3\pi.$$

Zadanie 2.16 *Oblicz okres funkcji*

$$(i) \quad tg\frac{\pi x}{4}$$
$$(ii) \quad ctg\frac{\pi x}{4}$$

Zadanie 2.17 *Podaj wykres funkcji*

$$(i) \quad tg\frac{\pi x}{4}, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$$
$$(ii) \quad ctg\frac{\pi x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 4\pi.$$

Zadanie 2.18 *Funkcja $E[x]$ całość z x ma największą wartość*

$$E[x] \leq x$$

nie większą od x [6]
Sprawdź, że okres funkcji okresowej część ułamkowa z liczby x,

$$f(x) = x - E[x].$$

jest równy $\omega = 1$.
Oblicz okres i podaj wykresy funkcji

$$(i) \quad f(x) = E[3x], \quad (ii) \quad g(x) = E[\frac{4x}{3}]$$

2.10.2 Tożsamość trygonometryczna

Zadanie 2.19 *Sprawdź tożsamowść*

$$sin^4x - cos^4x = 1 - 2cos^2x \qquad \infty < x < \infty.$$

Zadanie 2.20 *Sprawdź tożsamowść*

$$(1 + tg^2x)cos^2x = 1 \qquad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Zadanie 2.21 *Sprawdź tożsamowść*

$$\frac{1 + tg^2x}{1 + ctg^2x} = tg^2x \qquad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

[6] $E[x]$ Entier of x

Zadanie 2.22 *Wykaż, ze*

$$sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha+\beta)=2sin\alpha\ cos\beta$$

dla każdej rzeczyczywistej wrtości kątów α i β.

2.10.3 Ròwnania trygonometryczne

Zadanie 2.23 *Rozwiąż ròwnanie*

$$(i)\quad sin\frac{\pi x}{3}=0,\quad (ii)\quad cos\frac{\pi x}{3}=0.$$

Zadanie 2.24 *Rozwiąż ròwnanie*

$$(i)\quad tg\frac{\pi x}{3}=0,\quad (ii)\quad ctg\frac{\pi x}{3}=0.$$

Zadanie 2.25 *Rozwiąż ròwnanie*

$$(i)\quad sin\ x+cos\ x=0,\quad (ii)\quad sinx=cos\ x.$$

Zadanie 2.26 *Rozwiąż ròwnanie*

$$(i)\quad tg\ x-ctg\ x=0\quad (ii)\quad tg\ x=sin\ x.$$

2.10.4 Nieròwności trygonometryczne

Zadanie 2.27 *Rozwiąż nieròwność*

$$(i)\quad sin\frac{\pi x}{6}<\frac{1}{2}\quad (ii)\quad cos\frac{\pi x}{3}>\frac{1}{2}$$

Zadanie 2.28 *Rozwiąż nieròwność*

$$(i)\quad tg\frac{\pi x}{4}\leq 1\quad (ii)\quad ctg\frac{\pi x}{4}\geq 1$$

Zadanie 2.29 *Rozwiąż nieròwność*

$$(i)\quad sin\pi x-cos\pi x\leq 0\quad (ii)\quad sin\ \pi x+cos\ \pi x\geq\frac{1}{2}$$

Zadanie 2.30 *Rozwiąż nieròwność*

$$tg\pi x-ctc\pi x>0$$

2.10.5 Twierdzenie sinusòw

Zadanie 2.31 *Oblicz boki i kąty tròjkąta ΔABC mając długość dwòch bokòw*

$$|AB|=6,\quad |AC|=8\quad i\quad kat\ \angle\ ABC=60^o$$

Zadanie 2.32 *Oblicz boki tròjkąta ΔABC mając długość boku $|BC|=25$ i kąty*

$$\angle CAB=30^o,\quad \angle\ ABC=60^o$$

2.10.6 Twierdzenie cosinusów

Zadanie 2.33 *Oblicz boki i kąty trójkąta ΔABC mając długość dwóch boków*

$$|AB| = 6, \quad |AC| = 8 \quad i \quad kat\ \angle\ CAB = 60^o$$

Zadanie 2.34 *Oblicz boki trójkąta ΔABC mając długość boków*

$$|AB| = 9, \qquad |BC| = 12$$

i kąt $\angle ABC = 30^o$.

2.10.7 Funkcje cykliczne

Zadanie 2.35 *Oblicza wartość wyrażenia*

$$arcsin\frac{1}{2} + arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zadanie 2.36 *Oblicza wartość wyrażenia*

$$arccos\frac{1}{2} + arcscos\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zadanie 2.37 *Oblicza wartość wyrażenia*

$$arctg\frac{1}{\sqrt{3}} + arctg\sqrt{3}$$

Zadanie 2.38 *Podaj wykres funkcji*

$$f(x) = sin(arcsin\ x)$$

dla argumentu $x \in [-1, 1]$.

Zadanie 2.39 *Podaj wykres funkcji*

$$f(x) = cos(arcsin\ x)$$

dla argumentu $x \in [-1, 1]$.

Zadanie 2.40 *Rozwiąż równanie*

$$arcsin\ x - arccos\ x = 0$$

Zadanie 2.41 *Rozwiąż równanie*

$$2arcsin\ x - arccos\ x = \pi$$

Zadanie 2.42 *Rozwiąż równanie*

$$arctg\ x - arcctg\ x = 0$$

Zadanie 2.43 *Rozwiąż równanie*

$$3arctg\ x - 2arcctg\ x = \pi$$