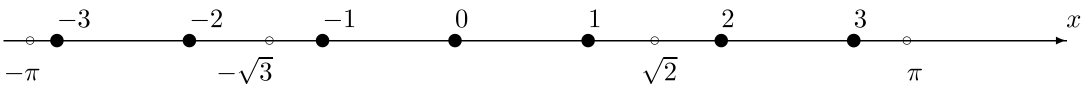
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

$$\sqrt{x^2} = |x|, \; dlatego \;\; \sqrt{4} = 2, \;\; nigdy \;\; -2$$



Oś liczbowa. Liczby rzeczywiste

LICZBY WYMIERNE I RZECZYWISTE[1]

Tadeusz STYŠ

Warszawa 2020

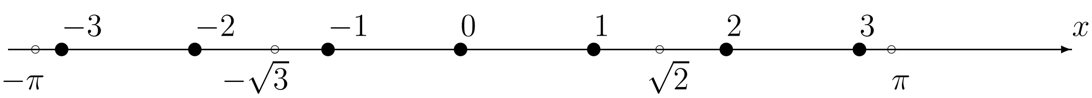
[1] Rozdział 2. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.

Contents

Chapter 1

Liczby wymierne i liczby rzeczywiste

$$\sqrt{x^2} = |x|, \ \textit{dlatego} \ \sqrt{4} = 2, \ \ \textit{nigdy} \ \ -2$$



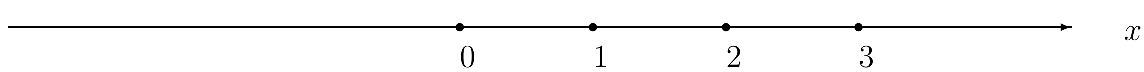
Oś liczbowa. Liczby rzeczywiste

1.1 O liczbach naturalnych i całkowitych

Zacznijmy od przypomnienia własności zbioru liczb naturalnych i liczb całkowitych. Niżej podajemy graficzny obraz tych zbiorów na osi liczbowej.
Zbiòr liczb naturalnych

$$N = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

zaznaczamy na osi liczbowej



Oś liczbowa, Liczby naturalne

Przypominamy, że w zbiòr liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie. To znaczy, że suma dwòch liczb natualnych

$$m + n = s, \ \ m, n \in N, \ \ \text{to} \ \ s \in N$$

jest liczbą naturalną
Na przyklad

$$3 + 5 = 8, \quad 3, 5 \in N, \ \ 8 \in N$$

Podobnie iloczyn dwòch liczb naturalnych

$$m * n = s, \ \ m, n \in N, \ \ \text{to} \ \ s \in N$$

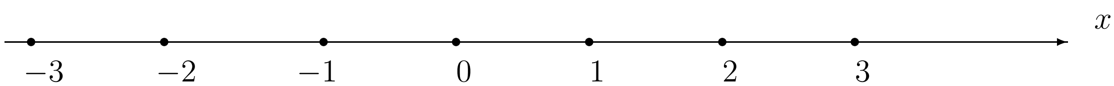
jest liczbą naturalną
Na przyklad

$$3 * 5 = 15, \quad 3, 5 \in N, \quad 15 \in N$$

Dołanczając wszystkie liczby ujemne przeciwne do liczba naturalnych otrzymamy zbiór liczb całkowitych Zbiór liczb całkowitych

$$C = \{..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

zaznaczamy na osi liczbowej



Oś liczbowa. Liczby całkowite

Zbiór liczb całkowitych jest zamknięty ze względu na dodawanie, odejmowanie i mnożenie. To znaczy, że suma dwóch liczb całkowitych

$$m + n = s, \quad m, n \in C, \quad \text{to} \quad s \in C$$

jest liczbą naturalną
Na przyklad

$$-10 + (-5) = -10 - 5 = -15, \quad -10, -5 \in N, \quad -15 \in N$$

Podobnie różnica dwóch liczb całkowitych

$$n - m = s, \quad n, m \in C, \quad \text{to} \quad s \in C$$

jest liczbą całkowitą
Na przyklad

$$-12 - (-5) = -12 + 5 = -7, \quad -12, -5 \in C, \quad -7 \in C$$

Również iloczyn dwóch liczb całkowitych

$$m * n = s, \quad m, n \in C, \quad \text{to} \quad s \in C$$

jest liczbą całkowitą
Na przyklad

$$-10 * (-5) = 50, \quad -10, -5 \in C, \quad 50 \in C$$

Natomiast, iloraz dwóch liczb całkowitych nie musi być liczbą całkowitą
Na przykład

$$\frac{3}{5}$$

jest ułamkiem, a nie jest liczbą całkowitą.
Niżej określamy liczby wymierne jako zbiór wszystkich możliwych ułamków.

1.2 Ułamki zwykłe

Licznik i mianownik ułamka zwykłego

$$\frac{\overbrace{5}^{licznik}}{\underbrace{8}_{mianownik}}$$

Ułamki zwykłe

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{9}$$

W tych ułamkach liczniki są te same równe 1. Natomiast mianowniki tych ułamków są kolejnymi liczbami $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
Niżej podane ułamki mają różne liczniki i różne mianowniki.

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{9}{10}, \quad \frac{3}{11}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{7}{15}$$

1.3 Dodawanie ułamków. Przykłady

Dodawanie ułamków o tych samych mianownikach. W tym przypadku dodajemy liczniki zostawiamy ten sam mianownik.

Przykład 1.1 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1+1+1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+1+1+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Przykład 1.2 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{1+2+3+5}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

Dodawanie ułamków o różnych mianownikach. Żeby dodać ułamki o różnych mianownikach: należy znaleźć wspólny mienownik. Może to być najmniesza wspólna wielokrotna mianowników.

Przykład 1.3 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{20}{6}+\frac{15}{60}+\frac{24}{60}=\frac{20+15+24}{60}=\frac{59}{60}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{3}{5}=\frac{5}{20}+\frac{12}{20}=\frac{5+12}{20}=\frac{17}{20}$$

1.4 Odejmowanie ułamków

Odejmowanie ułamków o tych samych mianownikach. Odejmujemy ułamki o tych samych mianownikach tak: odejmujemy liczniki i zostawiamy ten sam mianownik

Przykład 1.4 *Odejmij ułamki*

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1-1}{2}=0$$
$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{4}{5}-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4-2-1}{5}=\frac{1}{5}$$

Przykład 1.5 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{1+2+4}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{1+2+3+5}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$$

Przykład 1.6 *Odejmij ułamki*

$$\frac{7}{9}-\frac{1}{9}=\frac{7-1}{9}=\frac{6}{9}$$
$$\frac{13}{20}-\frac{5}{20}+\frac{3}{20}=\frac{13-5+3}{20}=\frac{12}{20}$$
$$\frac{37}{50}-\frac{23}{50}=\frac{37-23}{50}=\frac{14}{50}$$

Odejmowanie ułamkȯ o rȯżnych mianownikach. Odejmując ułamki o rȯżnych mianownikach: należy znaleźċ wspȯlny mienownik. Może to byċ najmniesza wspȯlna wielokrotna mianownikȯw.

Przykład 1.7 *Odejmij ułamki*

$$\frac{5}{9}-\frac{1}{3}=\frac{5-3*1}{9}=\frac{2}{9}$$
$$\frac{33}{25}-\frac{21}{50}=\frac{2*33-21}{50}=\frac{45}{50}=\frac{9}{10}$$
$$\frac{14}{15}-\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{14-3*2+5*2}{15}=\frac{14-6+10}{15}=\frac{18}{15}$$
$$\frac{253}{500}-\frac{126}{1000}=\frac{2*253-126}{1000}=\frac{506-126}{1000}=\frac{380}{1000}$$

1.5 Mnożenie ułamków

Operacja mnożenia ułamków jest bardzo prosta. Ułamek $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ mnożymy przez ułamek $\frac{s}{t}$, $s \neq 0$ według schematu: licznik razy licznik, mianownik razy mianownik

$$\frac{p}{q}*\frac{s}{t}=\frac{p*s}{q*t}, \quad q \neq 0, \ \ t \neq 0$$

Przykład 1.8 *Pomnóż ułamki*

$$(a) \quad \frac{2}{3}*\frac{4}{5}=\frac{2*4}{3*5}=\frac{8}{15}$$
$$(b) \quad \frac{10}{13}*\frac{21}{25}=\frac{10*21}{13*25}=\frac{210}{273}$$

1.6 Dzielenie ułamków

Operacja dzielenia ułamków jest bardzo prosta. Ułamek $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ dzielimy przez ułamek $\frac{s}{t}$, $s \neq 0$ według schematu: licznik razy mianownik, mianownik razy licznik

$$\frac{p}{q}:\frac{s}{t}=\frac{p*t}{q*s}, \quad q,s \neq 0, \ \ p,t \neq 0$$

Przykład 1.9 *Podziel ułamki*

$$(a) \quad \frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2*5}{3*4}=\frac{10}{12}$$
$$(b) \quad \frac{10}{13}:\frac{21}{25}=\frac{10*25}{13*21}=\frac{250}{273}$$

1.7 Zbiór liczb wymiernych

Dołanczając do zbioru liczb całkowitych wszystkie ułamki otrzymamy zbiór liczb wymiernych. Ułamki

$$...-\frac{17}{5}, -\frac{7}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{2}, \frac{4}{5}, \frac{7}{4}, \frac{5}{3}, , \frac{9}{2}, \frac{16}{3}, ...$$

nie są liczbami całkowitymi. Ogólnie, dla liczb całkowitych p i $q \neq 0$ ułamek

$$\frac{p}{q},$$

nie jest liczbą całkowitą, jeżeli $q \neq 1$. Dla $q = 1$ ułamek jest liczbą całkowitą. Zbiór wszystkich liczb całkowitych razem ze zbiórem wszystkich możliwych ułamków tworzą zbiór liczb wymiernych. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą W i piszemy

$$W = \{\frac{p}{q} : \quad \text{dla calkowitych liczb } p \text{ i } q \neq 0\}$$

Zbiór liczb wymiernych jest zamknięty ze względu na cztery operacje arytmetyczne dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez liczby różne od zera. To znaczy dla dowolnych liczb wymiernych $w_1, w_2 \in W$ wynik czterech operacji jest liczbą wymierną

$$w_1 + w_2 \in W, \quad w_1 - w_2 \in W, \quad w_1 * w_2 \in W, \quad \frac{w_1}{w_2} \in W, \ w_2 \neq 0.$$

Na przykład, dla

$$w_1 = -\frac{2}{3} \in W, \ w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

suma

$$w_1 + w_2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2*4+3*3}{12} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12} = \in W$$

jest liczbą wymierną
Dla

$$w_1 = -\frac{1}{2} \in W, \ w_2 = \frac{2}{3} \in W$$

różnica

$$w_1 - w_2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1*3-2*3}{6} = \frac{3-6}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \in W$$

jest liczbą wymierną
Dla

$$w_1 = \frac{2}{3} \in W, \ w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

iloczyn

$$w_1 * w_2 = \frac{2}{3} * \frac{3}{4} = \frac{2*3}{3*4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \in W$$

jest liczbą wymierną
Rówmież, dla liczb

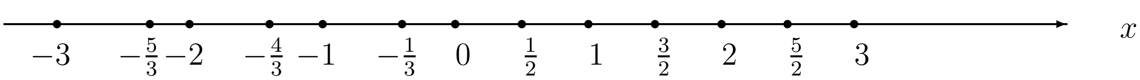
$$w_1 = \frac{2}{3} \in W,\ w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

iloraz

$$w_1 : w_2 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2 * 4}{3 * 3} = \frac{8}{9} \in W$$

jest liczbą wymierną
Zauważmy, że zbiór liczb wymiernych jest wszędzie gęsty. To znaczy pomiędzy dwoma różnymi liczbami wymiernymi w_1, w_2 istnieje "dużo" innych liczb wymiernych, na prrzykład ich średnia arytmetyczna $\frac{w_1 + w_2}{2} \in W$.
Ponadto, zbiór liczb wymiernych W jest najmnieszym zbiorem liczbowym zamkniętym ze względu na cztery operacje arytmetyczne. Mianowicie, złóżmy na chwile, że liczba wymierna x nie należy do zbioru W, $(x \notin W)$. Ponieważ każda liczba wymierna ma postać $\frac{p}{q}$ dla pewnych całkowitych p i $q \neq 0$. To znaczy, że nie ma liczb wymiernych poza zbiorem W.

Liczby wymierne są reprezentowane jako punkty na osi liczbowej



Oś liczbowa. Liczby wymierne

1.8 Liczby rzeczywiste

Dotychczas poznaliśmy zbiór liczb naturalnych N, zbiór liczb całkowitych C i zbiór liczb wymiernych W. Wiemy, że w zbiorze liczb naturalnych wykonalne są dwie operacje arytmetyczne, dodawanie i mnożenie, natomiast wynik odejmowania lub dzielenia dwóch liczb naturalnych może nie być liczbą naturalną.
Rozszerzeniem zbioru liczb naturalnych N jest zbiór liczb całkowitych C. Zatem wszystkie liczby naturalne są liczbami całkowitymi, piszemy $N \subset C$. W zbiorze liczb całkowitych C wykonalne są trzy operacje arytmetyczne dodawanie odejmowanie i mnożenie, a wynik dzielenia dwóch liczb całkowitych może nie być liczbą całkowitą.
Rozszerzeniem zbioru liczb całkowitych C jest zbiór liczb wymiernych W. Zatem wszystkie liczby całkowite są liczbami wymiernymi, piszemy $C \subset W$. W zbiorze liczb wymiernych W wykonalne są wszystkie cztery operacje arytmetyczne dodawanie odejmowanie i mnożenie i dzielenie.
Zauważmy, że w zbiorze liczb wymiernych W nie zawsze jest wykonalna operacja odwrotna do operacji potęgowania.
Na przykład, nie ma liczby wymiernej x, której kwadrat równy byłby 2. Inaczej

równanie

$$x^2 = 2$$

nie ma rozwiązania w zbiorze liczb wymiernych.
Istotnie, gdyby istniała liczba wymierna

$$x = \frac{p}{q},\ q \neq 0,$$

o największym wspólnym dzielniku $NWD(p,q) = 1$ to ta liczba wymierna byłaby rozwiązaniem równania

$$(\frac{p}{q})^2 = 2, \qquad i \quad p^2 = 2q^2.$$

Wtedy liczba całkowita p byłaby liczbą parzystą, to znaczy $p = 2k$ dla pewnej liczby całkowitej k. W tym przypadku liczba q musiałaby być również liczbą parzystą, to znaczy

$$q = 2s$$

dla pewnego całkowitego s.
W konsekwencji mamy nierówność $NWD(p,q) >= 2$, która przeczy istnieniu liczby wymiernej w postaci nieskracalnego ułamka $\frac{p}{q}$, w którym największy wspólny dzielnik licznika p i mianownika q, $NWD(p,q) = 1$.
Kolejnym rozszerzeniem zbiorów liczb

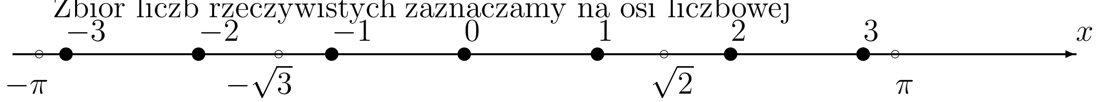
$$N,\ C,\ W$$

jest zbiór liczb rzeczywistych R w którym operacja odwrotne do potęgowanie jest wykonalna.
Do zbioru liczb rzeczywistych należą wszystkie liczby wymierne i wszystkie liczby niewymierne takie jak

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[5]{7}\ \pi, ...;$$

$$\sqrt{x^2} = |x|,\ dlatego\ \sqrt{4} = 2,\ nigdy\ -2$$

Zbiór liczb rzeczywistych zaznaczamy na osi liczbowej



Oś liczbowa. Liczby rzeczywiste

Zbiór liczb rzeczywistych

$$R = \{........, -3, -\sqrt{5}, -2, -\sqrt{2} - 1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, \sqrt[3]{9}, 3, \sqrt[3]{30}, \pi ...;\}$$

1.9 Zadania

Zadanie 1.1 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$20\frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})}{(2 - \frac{1}{3})(1 + \frac{2}{3})}$$

Zadanie 1.2 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$5[(\frac{4}{5}+\frac{7}{10})(\frac{1}{5}+\frac{1}{10})+(\frac{4}{5}-\frac{7}{10})(\frac{4}{5}+\frac{7}{10})]$$

Zadanie 1.3 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{1}{2}(\frac{2}{5}+1.5):(\frac{5}{7}-1\frac{2}{3})$$

Zadanie 1.4 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego*

$$36(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})$$

dla $a=3$ *i* $b=2$

Zadanie 1.5 *Wykonaj operacje arytmetyczne*

$$a*b, \qquad a-b, \qquad b:a$$

dla $a=3+\sqrt{7}, \quad b=4-2\sqrt{7}$

Zadanie 1.6 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\sqrt{67-\sqrt[3]{27}}$$

Zadanie 1.7 *Udowodnij, że liczba* $\sqrt{3}$ *jest liczbą niewymierną*

Zadanie 1.8 *Udowodnij, że liczba* $\sqrt[3]{7}$ *jest liczbą niewymierną*

Zadanie 1.9 *Znajdź wartości parametrów* a *i* b *dla których*

$$a\sqrt{b}=\sqrt{50}+\sqrt{128}+\sqrt{162}$$

Zadanie 1.10 *Dla zbiorów*

$$A=\{x: \ -\infty<x<5\} \quad \text{oraz} \quad B=\{x: \ 2<x\leq 9\}$$

Zaznacz na osi liczbowej alternatywę $A\smile B$ *i koniukcję* $A\frown B$ *tych zbiorów.*

Chapter 2

Wyrażenia arytmetyczne i algebraiczne

Zacznijmy od sformułowania pojęć wyrażenia arytmetycznego i algebraicznego.

Definition 2.1 *Wyrażeniem arytmetycznym nazywamy ciąg liczb połączonych czterema operacjemi arytmentycznymi dodawania, odejmowania mnożenia i dzielenia przez liczby różne od zera.*

Na przykład, wyrażenie

$$\frac{3 * 4 + 6 : 2 - 2 * 3}{2^3 + 3^2 - 8 : 2}$$

jest wyrażeniem arytmetycznym składającym się z ciągu liczb

$$3, 4, 6, 2, 2, 3, \quad licznik, \quad 2, 3, 3, 2, 8, 2, \quad mianownik$$

połączonych operacjemi

$$*,\ +,\ :,\ -,\ *, /,\ '+,\ '-,\ :$$

Podobnie definiujemy wyrażenia algebraiczne. Mianowicie

Definition 2.2 *Wyrażeniem algebraicznym nazywamy ciąg liczb lub liter połączonych czterema operacjemi arytmentycznymi dodawania, odejmowania mnożenia i dzielenia przez liczby lub litery, których wartości są różne od zera.*

Na przykład

$$\frac{a * 4 + x : 2 - 2 * 3}{x^3 + 3^2 - b : 2}$$

jest wyrażeniem algebraicznym składającym się z ciągu liczb i liter

$$a, 4, x, 2, 2, 3, x, 3, 3, 3, 2, b, 2$$

połączonych operacjemi

$$*,\ +,\ :,\ -,\ *, /,\ '+,\ '-,\ :$$

które dla wartości $a = 3,\ x = 6,\ b = 8$ staje się wyrażeniem arytmetycznym. Obliczając wartość wyrażenia arytmetycznego należy zachować kolejność wykonywania operacji arytmetycznych.

Najpierw wykonujemy operacje mnożenia i dzielenia, w następnej kolejności wykonujemy operacje dodawania i odejmowania.

Kolejność wykonywania operacji arytmetycznych mogą zmienić nawiasy, jeżeli w wyrażeniu nawiasy występują.

W szkołach i na uniwersytetach, w zakresie przedmiotów ścisłych, wiele wzorów mają postać wyrażeń algebraicznych.
W szkołach podstawowych już od pierwszej klasy uczymy obliczania wartości najprostrzych wyrażeń arytmetycznych.
Zatem, wyrażenia arytmetyczne lub algebraiczne są ważną częścią programów nauczania matematyki. Im wcześniej uczniowie osiągną sprawność rachunkową obliczania wartości tych wyrażeń tym lepiej. Oczywiście. sprawność obliczania wartości wyrażeń arytmetycznych lub algebraicznych można osiągnąć przez ćwiczenia rozwiązując odpowiednią ilość zadań.

2.1 Wyrażenia arytmetyczne proste i z nawiasami

Zacznijmy ćwiczenia obliczania wartości wyrażeń arytmetycznych od prostych zadań.

2.1.1 Ćwiczenia

Zadanie 2.1 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

(a) $12 + 14 + 24 \ =$ ....

(b) $50 - 24 - 8 \ =$ ....

Zadanie 2.2 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność działań*

(a) $18 - 16 + 2 * 8 \ =$ ....

(b) $5 * 6 + 24 : 3 \ =$ ....

Zadanie 2.3 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

(a) $3 * (4 + 6) - 2 * (3 + 5) \quad = \quad$ ....

....

(b) $(50 - 40) * 2 - (10 + 6) : 2 \quad = \quad$ ....

....

Zadanie 2.4 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$5^2 * 2^3 + 3^2 * 2^3 - 4^2 * 5^2$$

Zadanie 2.5 *Oblicz wartość wyrażenia artmetycznego*

$$\frac{3^3 * 2^3 - 3^2 * 2^2}{3 * 2^3 + 2 * 3}$$

Odp:6

Zadanie 2.6 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{\frac{2}{5} * \frac{3}{5} - \frac{2}{9} * \frac{3}{8}}{\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3}}$$

Zadanie 2.7 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5}}{\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3}}$$

Zadanie 2.8 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

$$\frac{(\frac{1}{3} - \frac{1}{2})(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})}{(\frac{2}{3} + \frac{3}{4})(\frac{4}{3} + \frac{5}{4})}$$

Zadanie 2.9 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

$$\frac{(\frac{2}{5} * \frac{3}{5} - \frac{2}{9} * \frac{3}{8})(\frac{3}{5} * \frac{3}{5} - \frac{1}{5} * \frac{3}{5})}{(\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3})(\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3})}$$

Zadanie 2.10 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

$$\frac{(\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5})(\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5})}{(\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3})(\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3})}$$

2.2 Wyrażenia algebraiczne

Przypominamy, że oprócz wyrażeń arytmetycznych, mamy wyrażenia algebraiczne. W wyrażeniach algebraicznych dopuszczamy litery, symbole o zmiennej warości. Zatem, wyrażeniem algebraicznym nazywamy ciąg liczb i liter połączonych operacjami arytmetycznymi dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia.

Przykład 2.1 *Uprość wyrażenie*

$$\frac{a^2-a}{a-1}-(a+1), \qquad a>1.$$

Rozwiązanie. Wykonując działania arytmetyczne, obliczmy

$$\begin{aligned}
\frac{a^2-a}{a-1}-(a+1) &= \frac{(a^2-a)-(a-1)(a+1)}{a-1}\\
&= \frac{(a^2-a)-[a(a+1)-1(a+1)]}{a-1}\\
&= \frac{a^2-a-[a^2+a-a-1]}{a-1}\\
&= \frac{a^2-a-a^2+1]}{a-1}\\
&= \frac{1-a}{a-1}=-\frac{1-a}{1-a}=-1.
\end{aligned}$$

2.2.1 Ćwiczenia

Zadanie 2.11 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości* $a=2$

$$\frac{\frac{a}{3}-\frac{a}{2}}{\frac{a}{3}+\frac{a}{4}}$$

Zadanie 2.12 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości* $b=1$

$$\frac{\frac{2}{b}*\frac{3}{b}-\frac{2}{b}*\frac{3}{b}}{\frac{b}{3}*\frac{b}{5}+\frac{b}{7}*\frac{b}{3}}$$

Zadanie 2.13 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości* $c=3$

$$\frac{\frac{c}{3}*\frac{c}{5}-\frac{c}{3}*\frac{3}{c}}{\frac{c}{3}*\frac{1}{c}+\frac{3}{c}*\frac{c}{3}}$$

Zadanie 2.14 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla* $a=2$

$$\frac{(\frac{a}{3}-\frac{a}{2})(\frac{2}{3}-\frac{a}{2})}{(\frac{2}{3}+\frac{a}{4})(\frac{4}{a}+\frac{a}{4})}$$

Zadanie 2.15 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla* $b = 3$

$$\frac{(\frac{b}{5} * \frac{3}{b} - \frac{b}{9} * \frac{3}{b})(\frac{3}{b} * \frac{3}{b} - \frac{1}{b} * \frac{3}{5})}{(\frac{b}{3} * \frac{2}{b} + \frac{3}{7} * \frac{b}{3})(\frac{b}{3} * \frac{b}{5} + \frac{b}{7} * \frac{b}{3})}$$

Zadanie 2.16 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla* $c = 1$

$$\frac{(\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{2} * \frac{c}{5})(\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{2} * \frac{c}{5})}{(\frac{c}{3} * \frac{c}{4} + \frac{c}{4} * \frac{c}{3})(\frac{c}{3} * \frac{c}{4} + \frac{c}{4} * \frac{c}{3})}$$

2.3 Wyrażenie algebraiczne liniowe

Wyrażenie algebraiczne

$$a * x + b$$

nazywamy liniowym ze względu na zmienną x, gdzie współczynniki wyrażenia liniowego a i b mają ustaloną wartość.

Na przykład

$$2 * x + 1, \quad \textit{gdzie wspolczynniki} \qquad a = 2, \quad b = 1$$

$$-5 * x + 4, \quad \textit{gdzie wspolczynniki} \qquad a = -5, \quad b = 4$$

2.3.1 Zdania

Zadanie 2.17 *Napisz wyrażenie algebraiczne liniowe o współczynnikach*

$$(i) \quad a = 5, \qquad b = -25$$

$$(ii) \quad a = \frac{3}{5}, \qquad b = \frac{2}{9}$$

$$(iii) \quad a = -\frac{13}{15}, \quad b = -\frac{15}{29}$$

2.4 Rȯwnanie liniowe

Rȯwnanie w postaci

$$a * x + b = 0$$

lub każde inne rȯwnanie, ktȯre można sprowadzić do tej postaci nazywamy rȯwnaniem liniowym ze względu na niewiadomą x. Współczynniki a i b tego rȯwnania mają wartość ustaloną.
Rozwiązaniem rȯwnania liniowego z niewiadomą x jest każda liczba, ktȯra podstawiona w miejsce x, spełnia to rȯwnanie.
Rozwiązanie rȯwnania liniowego otrzymujemy postępując według schematu:

• przenosimy liczby na prawą stronę zmieniając ich znak na przeciwny,
• niewiadomą x zostawiamy na lewej stronie
• dzielimy lub mnożymy przez współczynnik $a \neq 0$, żeby otrzymać współczynnik 1 przy zmiennej x.

Przykłady równań liniowych z rozwiązaniami.

$$2 * x - 4 = 0, \quad x = 2, \quad bo \qquad 2 * 2 - 4 = 0, \quad dla \qquad a = 2, \quad b = -4$$

$$-3 * x + 3 = 0, \quad x = 1, \quad bo \quad -3 * 1 + 3 = 0, \quad dla \quad a = -3, \quad b = 3$$

Przykład 2.2 *Rozwiąż równanie liniowe*

$$2x - 1 = 0, \qquad a = 2,, \quad b = -1.$$

Rozwiązanie.
Przenosimy liczbę -1 na prawą strone, zmieniając znak na przeciwny idzielimy obie strony tego równania przez 2

$$2x = 1 \mid : 2$$

W ten sposób znajdujemy rozwiązanie

$$x = \frac{1}{2}$$

Podstawiając do równania $x = \frac{1}{2}$, sprawdzamy, że otrzymane rozwiązanie spełnia to równanie.
Mianowicie dla $x = \frac{1}{2}$, mamy

$$2x - 1 = 2\frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Widzimy, że rozwiązanie $x = \frac{1}{2}$ spełnia to równanie. Teraz podamy ogólny schemat rozwiązania równania liniowego.

$$a\,x + b = 0,$$

$$a \neq 0,$$

$$a\,x = -b,$$

$$x = -\frac{b}{a},$$

2.4.1 Ćwiczenia

Zadanie 2.18 *Rozwiąż równanie*

$$(i) \quad 3\,x - 12 = 0$$

$$(ii) \quad 5\,x + 20 = 10$$

$$(iii) \quad \frac{3}{4}x + \frac{5}{8} = 1$$

Zadanie 2.19 *Mały pastuszek zauważył lecące bociany i krzyknął chyba ich leci 100. Starszy pastuch odpowiedział dużo mniej, gdyby leciało ich dwa razy tyle, i pół tyle, i ćwierć tyle i ty żebyś z nimi poleciał to wtedy byłoby ich razem z tobą 100. Ile bocianów leciało po niebie?*

Obraz Józefa Chełmońskiego (1849-1914). Bociany

Zadanie 2.20 *Franek czytał książkę 25 stron dziennie. Przeczytał całą książkę w ciągu 3 dni.*
Oblicz ile stron ma ta książka ?

....

Zadanie 2.21 *Marysia kupiła 3 zeszyty po 7 złotych każdy. Kazik kupił piłkę za 10 złotych i zegarek za 35 złotych?*

Ile zapaciła Marysia za 3 zeszyty ?

....

Ile zapłacił Kazik za piłkę i za zegarek ?

....

O Ile więcej złotych Kazik zapłacił za zakupy od Marysi ?

....

Bolek jest 2 razy starszy od Stefki, która ma 7 lat. Olek ma tyle lat co Bolek i Stefka razem.

(a) Ile lat ma Bolek ?

....

(b) Ile lat ma Olek ?

Zadanie 2.22 *Na kilku drzewach siedziały wrony. Janek powiedział do Ojca Tato dużo wron widzę na drzewach, chyba jest ich 100.*
Ojciec odpowiedział Jasiu gdyby było 2 razy tyle i połowę tyle to wtedy byłoby 100 wron.

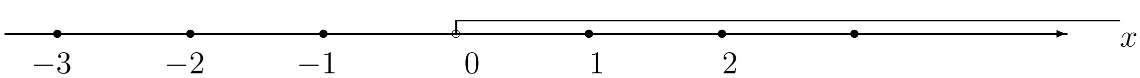
Ile wron siedziało na drzewach ?

Zadanie 2.23 *Uprość wyrażenie algebraiczne*

$$\frac{a^2 - a}{a - 1} - (a + 1), \qquad a > 1.$$

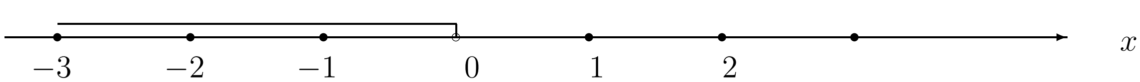
2.5 Nierówności

Zaznacz na osi liczbowej te wrtości x które są większe od zera, nierówność $x > 0$ ostra, zero nie jest włączone.



Nierównść ostra wartości $x > 0$

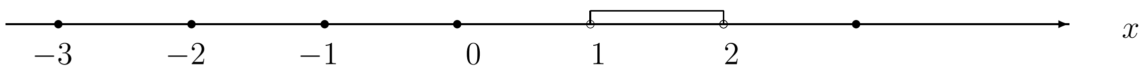
Zaznacz na osi liczbowej te wrtości x, które są mniejsze od zera, nierówność $x < 0$ ostra, zero nie jest włączone.



Nierównść ostra wartości $x < 0$

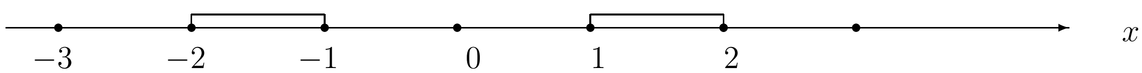
Zaznacz na osi liczbowej te wrtości x, które leżą
pomiędzy liczbą 1 i liczbą 2, to znaczy $1 < x < 2$ nierówność $1 < x < 2$ ostra,

wartości 1 i 2 nie są włączone.



Nierówność ostra wartości $1 < x < 2$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości x, które leżą pomiędzy liczbą -2 i liczbą -1 lub liczbą 1 i liczbą 2, to znaczy $-2 \leq x \leq -1$ lub $1 \leq x \leq 2$, nierówności słabe z włączeniem liczb $-2, -1, 1, 2$



Nierównść słaba $-2 \leq x \leq -1$ lub $1 \leq x \leq 2$

2.5.1 Ćwiczenia

Zadanie 2.24 *Rozwiąż nierówność*

$$(i) \quad 2x - 1 > 1$$

$$(ii) \quad 4x - 6 \leq 10$$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości x dla których nierówność jest prawdziwa.

Przykład 2.1 *Rozwiąż nierówność*

$$3(x-1) < 2(x+1)$$

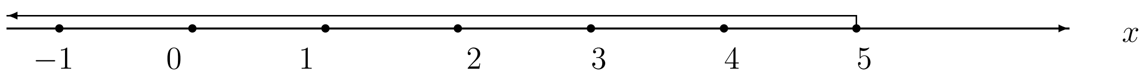
Zaznacz na osi liczbowej te wartości x dla których nierówność jest prawdziwa.
Rozwiązanie
Wykonujemy mnożenia po lewej i po prawej stronie nierówności

$$3x - 3 < 2x + 2$$

Zawsze, przenosimy zmienną x na lewą stronę nierówności ze znakiem przeciwnym, natomiast liczby przenosimy na prawą stronę nierówności też ze znakiem przeciwnym

$$3x - 2x < 2 + 3, \qquad x < 5$$

Na osi liczbowej zaznaczmy rozwiązanie $x < 5$ nierówności.



Nierównść ostra wartości $x < 5$

Zadanie 2.25 *Rozwiąż nierówność*

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad 3(3x-1) - 2(2x+1) < 4(x-1) \\
&(ii) \quad 3(x-2) + 4(x+2) \leq 2x + 10
\end{aligned}
$$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości x dla których nierówność jest prawdziwa.

2.6 Ułamki dziesiętne

Ułamki zwyczajne o mianownikach 10,100, 1000 na zywamy ułamkami dziesiętnymi. Ułamki dziesiętne zapisujemy używając przecinka zamiast kreski.

$$
\frac{1}{10} = 0,1, \quad \frac{1}{100} = 0,01, \quad \frac{1}{1000} = 0,001.
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{10} &= 0,3, & \frac{5}{100}, &= 0,05, \\
\frac{35}{1000} &= 0,035 & \frac{735}{1000} &= 0,735, \\
2\frac{3}{10} &= 2,3, & 10\frac{12}{100} &= 10,12.
\end{aligned}
$$

Mamy relacje odwrotne, ułamki dziesiętne zamieniamy na ułamki zwyczane

$$
\begin{aligned}
0,1 &= \frac{1}{10}, & 0,01 &= \frac{1}{100}, \\
0,001 &= \frac{1}{1000}, & 0,3 &= \frac{3}{10}, \\
0.05 &= \frac{5}{100}, & 0,035 &= \frac{35}{1000}, \\
0,735 &= \frac{735}{1000}, & 2,3 &= \frac{3}{10}, \\
10,12 &= 10\frac{12}{100}.
\end{aligned}
$$

Każdy ułamek zwyczajny możemy zamienić na ułamek dziesiętny.
Pierwszy prosty sposób zamiany ułamka zwyczajnego na dziesiętny polega

na zapisaniu tego ułamka przy mienowniku, $10, 100, 1000, ...$ Ten sposòb jest prosty tylko dla wybranych ułamkòw.

Przykład 2.2

$$\frac{1}{2} = \frac{1*5}{2*5} = \frac{5}{10} = 0.1$$
$$\frac{3}{4} = \frac{3*25}{4*25} = \frac{75}{100} = 0.25$$
$$\frac{7}{5} = \frac{7*20}{5*20} = \frac{140}{100} = 1.4$$
$$\frac{15}{250} = \frac{15*4}{250*4} = \frac{60}{1000} = 0.06$$

Drugi sposòb zamiany ułamkòw zwyczajnych na dziesiętne polega na dzieleniu licznika przez mianownik.

Przykład 2.3 *Zamień ułamek* $\frac{1}{4}$ *na ułamek dziesiętny.*
Rozwiązanie. *Dzielimy 1=1,00 przez 4. Zauważamy, że zera po przecinku nie zmieniają wartości 1*

$$\begin{array}{ll}
 & 0,25 \\
 & -- \\
 & 1,00 \quad :4 \\
- & 0 \\
 & -- \\
 & 10 \\
 & -8 \\
 & -- \\
 & \ \ 20 \\
 & - \ 2 \\
 & -- \\
 & \quad 0
\end{array}$$

Odpowiedź: $\frac{1}{4} = 0,25$

2.6.1 Ćwiczenia

Zadanie 2.26 *Zamień ułamek zwyczajny na dziesiętny*

$$(i)\quad \frac{3}{5}$$
$$(ii)\quad \frac{37}{50}$$
$$(iii)\quad \frac{253}{250}$$

Zadanie 2.27 *Zamień ułamek zwyczajny na dziesiętny*

$$(i)\quad \frac{2}{15}$$
$$(ii)\quad \frac{23}{45}$$
$$(iii)\quad \frac{37}{150}$$

2.7 Procenty i promile

$p\%$ procent to ułamk $\frac{p}{100}$ o mianowniku 100.

Na przykład

1% jeden procent to ułamek $\frac{1}{100} = 0.01$ o mianowniku 100.

25% to ułamek $\frac{25}{100} = 0.25$ o mianowniku 100.

100% to całość $\frac{100}{100} = 1$.

Obliczamy $p\%$ procent z wartości a

$$p\% \; * \; a = \frac{p}{100} * a$$

jako ułamek o liczniku p i o mianowniku 100 z a.

2.7.1 Ćwiczenia

Przykład 2.4 *Oblicz* 15% *z wartości a=60*

$$15\% * 60 = \frac{15}{100} * 60 = \frac{15 * 60}{100} = \frac{15 * 6}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

Przykład 2.5 *Oblicz* 25% *z wartości a=3000*

$$25\% * 3000 = \frac{25}{100} * 3000 = \frac{25 * 3000}{100} = \frac{75000}{100} = 750$$

Odwrotnie, mając $p\% * a$ procent wartości a, obliczamy wartość a

Przykład 2.6 30% *procent wartości a równa się* 600. *Oblicz wartość a*

Rozwiązanie.

$$30\% * a = 600, \quad \frac{30}{100} * a = 600, \quad a = \frac{600}{\frac{30}{100}} = \frac{600 * 100}{30} = 2000$$

Zadanie 2.28 *Oblicz* 75% *z wartości* $a = 2000$

Zadanie 2.29 *Oblicz* 15% *z wartości* $a = 4000$

Odwrotnie, mając $p\% * a$ procent wartości a, oblicz wartość a podaną niżej w ćwiczeniach

Zadanie 2.30 50% *procent wartości a równa się* 800. *Oblicz wartość a*

Zadanie 2.31 30% *procent wartości a równa się* 5000. *Oblicz wartość a*

Zadanie 2.32 *Cena metra kwadratowego materiału na zasłony okien kosztowała* 50 *zł. Najpierw podwyższono cenę o* 30% *potem obniżono o* 10 % *za metr kwadratowy. Ile zapłacił klient za* 10 m^2 *materiału ?*

Zadanie 2.33 *Cena materiału razem z* 7% *VAT kosztowała* 107 *zł. Podatek VAT materiału wrósł do* 22%*. Ile kosztował materiał z całym VAT ?. O ile procent wrosła cena materiału ?*

2.8 Promile

Promile to ułamki o mianowniku 1000.
$p\%\%$ promili to ułamk $\frac{p}{1000}$ o mianowniku 1000.

Na przykład

1%% jeden procent to ułamek $\frac{1}{1000} = 0.001$ o mianowniku 1000.

25%% to ułamek $\frac{25}{1000} = 0.025$ o mianowniku 1000.

1000%% to całość $\frac{1000}{1000} = 1$.

Obliczamy $p\%\%$ procent z wartości a

$$p\%\% \ * \ a = \frac{p}{1000} * a$$

jako ułamek o mianowniku 1000 z a.

2.8.1 Ćwiczenia

Przykład 2.7 *Oblicz* 15%% *z wartości a=3000*

$$15\%\% * 3000 = \frac{15}{1000} * 3000 = \frac{15 * 3000}{1000} = 45$$

Przykład 2.8 *Oblicz* 25%% *z wartości a=3000*

$$25\%\% * 3000 = \frac{25}{1000} * 3000 = \frac{25 * 3000}{1000} = 75$$

Odwrotnie, mając $p\%\% * a$ procent wartości a, obliczamy wartość a

Przykład 2.9 30%% *procent wartości a równa się* 600. *Oblicz wartość a*

Rozwiązanie.

$$30\%\% * a = 600, \quad \frac{30}{1000} * a = 600, \quad a = \frac{600}{\frac{30}{1000}} = \frac{600 * 1000}{30} = 20000$$

Zadanie 2.34 *Oblicz* 75%% *z wartości* $a = 2000$

Zadanie 2.35 *Oblicz* 15%% *z wartości* $a = 4000$

Odwrotnie, mając $p\%\% * a$ promili wartości a, oblicz wartość a podaną niżej w ćwiczeniach

Zadanie 2.36 50%% *promili wartości a równa się* 800. *Oblicz wartość a*

Zadanie 2.37 30%% *promili wartości a równa się* 5000. *Oblicz wartość a*

2.9 Procent składany

WprowadĄmy następujące oznaczenia

- K_0 - kapitał początkowy
- K_n - kapitał po n latach
- p - stopa procentowa w skali roku
- n - ilość lat oszczędności

Po pierwszym roku oszczczędzania kapitał K_0 wzrośnie o $p\%$

$$K_1 = K_0 + K_0\frac{p}{100} = K_0(1 + \frac{p}{100})$$

Po drugim roku oszczczędności kapitałK_1 wzrośnie o $p\%$

$$K_2 = K_1 + K_1\frac{p}{100} = K_1(1 + \frac{p}{100}) = K_0(1 + \frac{p}{100})^2$$

Ogólnie, stosując zasadę indukcji zupełnej, jeżeli po $n-1$ latach oszczędzania kapitał wrośnie o $p\%$

$$K_{n-1} = K_0(1 + \frac{p}{100})^{n-1}$$

to po n latach oszczędznia

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1}\frac{p}{100} = K_0(1 + \frac{p}{100})^n$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na końcowy kapitał po n latach oszczędzania

$$K_n = K_0(1 + \frac{p}{100})^n$$

Przykład 2.3 *Oblicz o ile wzrośnie kapitał* $150000PLN$ *po 10 latach, jeżeli stopa prcentowa* $p = 5\%$.

Rozwiaązanie. Stosując wzór, obliczamy

$$K_{10} = 150000(1 + \frac{5}{100})^{10} = 150000 * 1.05^{10} = 150000 * 1.62889 = 244334PLN$$

OdpowiedĄ: Kapitał $150000PLN$ wzrośnie przez 10 lat o $94334PLN$, jeżeli stopa procentowa w stosunku rocznym wynosi $p = 5\%$.

Spłata kredytu. Podobnie obliczamy procent składany od kredytu.
Po pierwszym roku spłacania kapitał K_0 zmaleje o $p\%$

$$K_1 = K_0 - K_0\frac{p}{100} = K_0(1 - \frac{p}{100})$$

Po drugim roku spłacania kapitał K_1 zmaleje o $p\%$

$$K_2 = K_1 - K_1\frac{p}{100} = K_1(1-\frac{p}{100}) = K_0(1-\frac{p}{100})^2$$

Ogólnie, stosując zasadę indukcji zupełnej, jeżeli po $n-1$ latach spłacania kapitał zmaleje do sumy

$$K_{n-1} = K_0(1-\frac{p}{100})^{n-1}$$

to po n latach spłacania kapitał zmaleje do sumy

$$K_n = K_{n-1} - K_{n-1}\frac{p}{100} = K_0(1-\frac{p}{100})^n$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na końcowy kapitał po n latach spłacania kredytu.

$$K_n = K_0(1-\frac{p}{100})^n$$

Przykład 2.4 *Oblicz o ile zmaleje kredyt od kapitału* $150000PLN$ *po 10 latach spłacania. i po 150 latach spłaconia, jeżeli stopa prcentowa* $p = 5\%$.

Rozwiaązanie. Stosując wzór, obliczamy

$$K_{10} = 150000(1-\frac{5}{100})^{10} = 150000 * 0.95^{10} = 150000 * 0.598737 = 89810PLN$$

$$K_{150} = 150000(1-\frac{5}{100})^{150} = 150000*0.95^{150} = 150000*0.0004555 = 68.33PLN$$

OdpowiedQ́: Po 10 latach kredyt zmaleje o $60189.5PLN$. Natomiast po 150 latach kredyt zmaleje o $149931.67PLN$.

Zadanie 2.38 *Oblicz o ile zmaleje kredyt od kapitału* $200000PLN$ *po 10 latach spłacania. i po 180 latach spłaconia, jeżeli stopa prcentowa* $p = 5\%$.

2.10 Wartość bezwzglęna

Wartość bezwzględna liczby to odległość punktu x od począdku układu oznaczonego przez 0. Zatem, wartość bezwzględna liczby x jest zawsze nieujemna.

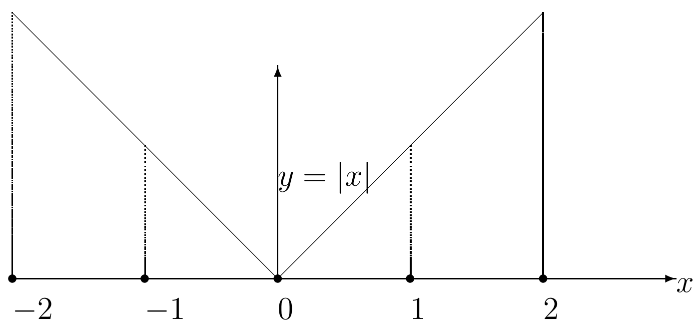
Definition 2.3 *Wartość bezwzględną liczby* x *określamy jak następuje:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{gdy} \quad x < 0 \end{cases}$$

Na przykład $|5| = 5$ bo $5 > 0$, również $|-5| = -(-5) = 5$, gdy $x = -5 < 0$. Również wartość bezwzględną liczby x jest dana wzorem

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Zauważmy, że $\sqrt{4} = 2$, nigdy -2.



Wykres wartości bezwzględnej $y = |x|$

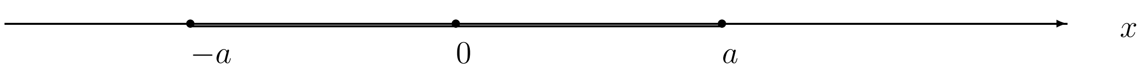
Odcinek na osi liczbowej. Z definicji wartości bezwzglęnej liczby x, wynika nierówność

$$|x| \leq a, \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad -a \leq x \leq a, \quad a \geq 0.$$

Rzeczywiście, zauważamy, że

$$|x| \leq a, \quad \text{gdy} \quad x \leq a \quad \text{i} \quad -x \leq a, \quad \text{to znaczy} \quad -a \leq x \leq a.$$

Na osi liczbowej zaznaczmy zbiór liczb x, które spełniają $-a \leq x \leq a$



Odcinek na osi liczbowej $|x| \leq a$.

Podobnie, odcinek $[a, b]$ o początku w punkcie a i końcu w punkcie b, to jest zbiór punktów x leżących pomiędzy punktami a i b zapisujemy jak następuje:

$$[a, b] = \{x \in R : \ a \leq x \leq b\}$$

Długość odcinka $[a, b]$, to jest odległość punktu a od punktu b, równa się wartości bezwzględnej różnicy $|b - a|$.

Przykład 2.5 *Rozwiąż równanie*

$$|2x - 3| = 5.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Rozwiązanie. Z defincji wartości bezwzględnej

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3=5, \quad gdy \quad 2x-3 \geq 0, \qquad to \quad x=4, \\ -(2x-3)=5 \quad gdy \quad -2x+3 \leq 0, \quad to \quad x=-1, \end{cases}$$

Rozwiązanie x=-1 lub $x = 4$ podane jest niżej na osi liczbowej.

Rozwiązanie $x = -1$ lub $x = 4$.

Przykład 2.6 *Rozwiąż nierówńść*

$$|x-3| \leq 2.$$

Rozwiązanie. Z definicji wartości bezwzlęnej nierówność

$$|x-3| \leq 2.$$

jest równoważna z podwójną nierównością

$$-2 \leq x-3 \leq 2, \qquad \text{lub} \quad 1 \leq x \leq 5.$$

OdpowiedĆ: $1 \leq x \leq 5$.

Przykład 2.7 *Podaj zbiór punktów, które spełniają nieróuwność*

$$|x-1| + |x+1| \leq 1.$$

Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej.

Rozwiązanie. Z definicji wartości bezwzlęnej znajdujemy

1. *dla* $\quad x-1 \leq 0, \qquad |x-1| = -(x-1) = 1-x, \quad |x+1| = -(x+1) = -1-x$

$$|x-1| + |x+1| = 1-x-1-x = -2x \leq 1,$$

gdy $\quad x \geq -\dfrac{1}{2},$

2. *dla* $\quad -1 \leq x \leq 1, \quad |x-1| = (x-1) = x-1, \quad |x+1| = -(x+1) = -1-x$

$$|x-1| + |x+1| = x-1-1-x = -2 \leq 1,$$

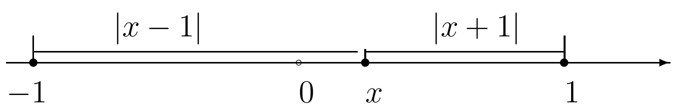
gdy $\quad -1 \leq x \leq 1$

3. *dla* $\quad x+1 \geq 0, \qquad |x-1| = x-1, \quad |x+1| = x+1$

$$|x-1| + |x+1| = (x-1)+(x+1) = 2x \leq 1,$$

gdy $\quad x \leq \dfrac{1}{2},$

OdpowiedǪ: Nierówność jest spełniona dla $-1 \leq x \leq 1$. To znaczy dla wszystkich x takich, że $|x| \leq 1$.
Również zauważmy, że odległość punktu $x \in [-1, 1]$ od punktu -1 plus odległość tego punktu $x \in [-1, 1]$ od 1 równa się 1. Zatem nierówność jest spełniona również dla $x = -1$ lub $x = 1$, wtedy zachodzi znak równości. Zaznaczmy to rozwiązanie na rysunku.



Równanie $|x-1| + |x+1| = 1$.

2.10.1 Zadania

Zadanie 2.39 *Rozwiąż równanie*

$$|3x - 5| = 4.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 2.40 *Rozwiąż równanie*

$$|2x - 3| = 5.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 2.41 *Rozwiąż nierówność*

$$|x - 5| \leq 2.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 2.42 *Podaj zbiór punktów, które spełniają nierówność*

$$|x| + |x - 2| \leq 2.$$

Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej

2.11 Ciąg arytmetyczne i szereg arytmetyczny.

Wyrażenia postaci

$$a_0, a_0 + r, a_0 + 2r,\ a_0 + 3r, ..., a_0 + n\,r; \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

nazywamy ciągiem arytmetcznym, gdzie $a_0 \in R$ jest pierwszym wyrazem ciągu i $r \in R$ jest różnicą ciągu.
Zatem wyraz ogólny ciągu a_n można zapisać wzorem

$$a_n = a_0 + n\,r, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu wynosi

$$a_{n+1} - a_n = a + (n+1)r - (a + n\,r) = r, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Na przyład, ciąg kolejnych liczb naturalnych

$$0, 1, 2, ...;$$

jest ciągiem arytmetycznym o wyrazie pierwszym $a_0 = 0$, różnicy $r = 1$ i o wyrazie ogólnym $a_n = n$.

Średnia Arytmetyczna. Zauważmy, że wyraz ciągu arytmetycznego

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

jest średnią arytmetyczną wyrazu poprzedniego i następnego.
Rzeczywiście, obliczamy

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_0 + (n-1)r) + (a_0 + (n+1)r)}{2} = \frac{2a_0 + 2nr}{2} = a_n$$

Również sumy dwóch wyrazów odległych o liczbę k od a_0 i o liczbę k od a_n

$$a_0 + a_n = a_k + a_{n-k}$$

są równa dla każdego $k = 0, 1, 2, ...n$;
Mianowicie, sprawdzamy, że dla każdego $k = 0, 1, 2, ..., n$, may

$$a_k + a_{n-k} = \underbrace{a_0 + kr}_{a_k} + \underbrace{a_0 + (n-k)r}_{a_{n-k}} = a_0 + \underbrace{a_0 + nr}_{a_n} = a_0 + a_n.$$

Przykład 2.8 *Sprawdź czy następujący ciąg jest artmetyczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{3n+1}{3}, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

$$(ii) \quad a_n = 1 + n^2, \quad n = 0, 1, 2, ...,:$$

Rozwiązanie (i). Sprawdzamy czy różnica r kolejnych wyrazów ciągu jest stała, to znaczy jest niezależna od n

$$r = a_{n+1} - a_n = \underbrace{\frac{3(n+1)+1}{3}}_{a_{n+1}} - \underbrace{\frac{3n+1}{3}}_{a_n} = \frac{3n+1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3n+1}{3} = \frac{1}{3}, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Odpowiedź: Ciąg jest arytmetyczny, gdyż różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu jest stała $r = \dfrac{1}{3}$ i nie zależy od $n = 0, 1, 2, ...;$

Rozwiązanie (ii). Sprawdzamy czy różnica kolejnych wyrazów ciągu jest stała, to znaczy niezależy od n

$$r = a_{n+1} - a_n = \underbrace{1 + (n+1)^2}_{a_{n+1}} - \underbrace{(1 + n^2)}_{a_n} = 1 + n^2 + 2n + 1 - (1 + n^2) = 1 + 2n,$$

Odpowiedź: Widzimy, że ciąg (ii) nie jest ciągiem arytmetyczny, gdyż różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu $r = 2n + 1$ dla $n = 0, 1, 2, ...;$ zależy od n.

2.11.1 Zadania

Zadanie 2.43 *Sprawdź czy następujący ciąg jest artmetyczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{8n+1}{5}, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$
$$(ii) \quad a_n = 1 + 2^n, \quad n = 0, 1, 2, ..., :$$

Postęp Arytmetyczny. Postępem arytmetycznym nazywamy sumę wyrazów ciągu arytmetycznego

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

lub

$$a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \cdots + (a_0 + nr),$$

W sigma notacji zapisujemy szereg arytmetyczny jako następującą sumę:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

lub

$$\sum_{k=0}^{n} (a_0 + kr) = a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \cdots + (a_0 + nr).$$

Łatwo wyprowadzić wzór na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego. Mianowicie, oznaczmy sumę przez

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Napiszmy tą sumę w odwrotnej kolejności dodawania wyrazów

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$$

Dodając stronami, otrzymamy

$$2S_n \quad = \quad (a_0 + a_n) + (a_1 + a_{n-1}) + (a_2 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_1) + (a_n + a_0)$$

Ponieważ, wyrazy postępu arytmetycznego spełniają równość

$$a_0 + a_n = a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2} = \cdots = a_n + a_0$$

dlatego, suma wyrazów ciągu arytmetycznego

$$2S_n = (n+1)(a_0 + a_n)$$

lub

$$S_n = \frac{n+1}{2}(2a_0 + nr).$$

Przykład 2.9 *Oblicz sumę postępu arytmetycznego*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że w tym postępie arytmetycznym pierwszy wyraz $a_0 = 0$ i różnica $r = 1$.
Stosując powyższy wzór, znajdujemy sumę

$$S_n = \frac{(n+1)}{2}(2a_0 + nr) = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Zadanie 2.44 *Oblicz sumę n wyrazów postępu arytmetycznego o wyrazie ogólnym*

$$a_n = \frac{3n+5}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, ..., ;$$

2.11.2 Ciągi geometryczne i postępy geometryczne.

Wyrażenie postaci

$$a_0, a_0q, a_0q^2, \ a_0q^3, ..., a_0q^n \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

nazywamy ciągiem geometrycznym, gdzie $a_0 \in R$ jest pierwszym wyrazem ciągu i $q \in R$ jest ilorazem ciągu.
Zatem wyraz ogólny ciągu geometrycznego zapisujemy wzorem

$$a_n = a_0q^n, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Zakładamy nie trywialny przypadek gdy $a_0 \neq 0, \ q \neq 0$.
Iloraz dwóch kolejnymi wyrazów ciągu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Na przykład, ciąg liczb

$$1, 2, 2^2, 2^3...; 2^n$$

o wyrazie pierwszym $a_0 = 1$, ilorazie $q = 2$ i o wyrazie ogólnym $a_n = 2^n$ jest ciągiem geometrycznym. Zauwamy, e gdy iloraz $q = 0$ to cig geometryczny jest o wyrazie oglnym staym $a_n = a_0$ dla kadego $n1, 2, ...;$
Średnia Geometryczna. Zauważmy, że wartość bezwzględna wyrazu ciągu geometrycznego jest średnią geometryczną wyrazu poprzedniego i następnego

$$|a_n| = \sqrt{|a_{n-1}a_{n+1}|}$$

Rzeczywiście, obliczamy

$$a_{n-1} * a_{n+1} = a\ q^{n-1} * a * q^{n+1} = a^2 * q^{2n} = a_n^2.$$

Skąd wynika średnia geometryczna

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} * a_{n+1}}$$

Również iloczyny dwóch wyrazów odległych o liczbę k od a_0 i liczbę k od a_n

$$a_0 * a_n = a_k * a_{n-k}$$

są równa dla każdego $k = 0, 1, 2, ...n$;
Mianowicie, sprawdzamy, że dla każdego $k = 0, 1, 2, ..., n$

$$a_k * a_{n-k} = \underbrace{a_0 * q^k}_{a_k} * \underbrace{a_0 * q^{n-k}}_{a_{n-k}} = \underbrace{a_0(a_0 q^n)} = a_0 * a_n.$$

Przykład 2.10 *Sprawdź czy następujący ciąg o danym wyrazie ogólnym jest geometryczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{3^n}{2^n}, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$
$$(ii) \quad a_n = n^2, \qquad n = 1, 2, ..., :$$

Rozwiązanie (i). Sprawdzamy czy iloraz q kolejnych wyrazów ciągu jest stały, to znaczy jest niezależny od n

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}) : (\frac{3^n}{2^n}) = \frac{3^{n+1} * 2^n}{2^{n+1} * 3^n} = \frac{3}{2} = q, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Odpowiedź: Ciąg jest geometryczny, gdyż iloraz kolejnych wyrazów ciągu jets stały i nie zależy od n, $q = \frac{3}{2}$ dla $n = 0, 1, 2, ...$;
Rozwiązanie (ii). Sprawdzamy czy iloraz q kolejnych wyrazów ciągu jest stały, to znaczy jest niezależny od n

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}, \qquad n = 1, 2, ...;$$

Odpowiedź: Ciąg nie jest geometryczny, gdyż iloraz kolejnych wyrazów ciągu $q = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$ dla $n = 1, 2, ...$; zależy od n.

2.11.3 Zadania

Zadanie 2.45 *Sprawdź czy następujący ciąg jest geometryczny.*

$$(i) \quad \frac{(\sqrt{2})^n}{5^n}, ... \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$
$$(ii) \quad \sqrt{n}, ... \qquad n = 1, 2, ...;$$

Zadanie 2.46 *Podaj pierwszy wyraz, n-ty wyraz i oblicz iloraz ciągu geometrycznego*

$$(i) \quad \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3^2}{5}, \frac{3^3}{5}.$$
$$(ii) \quad \sqrt{2},\ 2, 2\sqrt{2}, 4,\ 4\sqrt{2}.... :$$