

Chapter 1

Wzory uproszczonego mnożenia i dwumian Newtona

Jednomianem nazywamy ciąg liczb lub ciąg liczb i liter lub ciąg tylko liter połączonych operacją mnożenia.

Dla przykładu wymieńmy kilka jednomianów

$$\begin{array}{ll} 125 & 247, \quad \text{jedna liczba jest jednomianem} \\ 2 * 5 * 7, & 3 * 4 * 5 * 6 * 7, \\ 3 * a * b & a * b * c, \\ 4 * 5 * x * y * z, & 5 * a^2 * b^3 * c^4, \\ 15 * x^3 * y^2 * z^3 & 7 * 9 * a^4 * b^5 * x^6 * y^7. \end{array}$$

Jasne, że każdy jednomian jest szczególnej postaci wyrażeniem arytmetycznym, jeżeli zawiera tylko liczby lub jest szczególnym wyrażeniem algebraicznym, jeżeli zawiera litery lub liczby i litery. Szczególnym wyrażeniem arytmetycznym lub algebraicznym, gdyż tylko operacja mnożenia występuje w ich określeniu.

Dwumianem nazywamy sumę dwóch jednomianów.

Na przykład

$$a + b, \quad a - b, \quad a^2 + b^2, \quad 3x^3 + 5y^3.$$

Podobnie trójmianem nazywamy sumę trzech jednomianów.

Na przykład

$$\begin{array}{ll} a + b + c, & 2 * x_3 + 4 * y^3 + 5 * x * y, \\ a^2 + 2 * a * b + b^2, & x^2 - 2 * x * y + y^2. \end{array}$$

Ogólnie wielomianem nazywamy sumę wielu jednomianów.

Natomiast, wielomianem stopnia n nazywamy sumę jednomianów następującej postaci:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2 + a_3 * x^3 + \dots + a_{n-1} * x^{n-1} + a_n * x^n$$

Wyrazy wielomianu piszmy również w odwrotnej kolejności pomijając znak mnożenia $*$.

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

1.1 Wzory uproszczonego mnożenia

1. Dwumian, dwumian kwadratowy i trójmian kubiczny. Łatwo sprawdzamy

następujące tożsamości ¹

$$\begin{aligned} (a \pm b)^1 &= a \pm b, & \text{dwumian stopnia } n = 1 \\ (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2 a b + b^2, & \text{dwumian kwadratowy } n = 2 \\ (a \pm b)^3 &= a^3 - 3 a^2 * b + 3 * a * b^2 \pm b^3, & \text{trojman kubiczny } n = 3 \end{aligned}$$

Wzory na kwadrat sumy lub różnicy otrzymujemy przez mnożenie dwumianu $a \pm b$ przez siebie.

Mianowicie, obliczmy

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) = a(a - b) - b(a - b) \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2, \end{aligned}$$

Przykład 1.1 Dla ustalonej liczby naturalnej n znajdź naturalne liczby a i b takie że

$$n + a^2 = b^2$$

Rozwiązanie

Przenosząc a^2 na prawą stronę ze znakiem przeciwnym otrzymamy

$$n = b^2 - a^2$$

Ponieważ

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$$

to

$$n = (b - a)(b + a)$$

Następnie rozkładamy daną liczbę n iloczyn

$$n = 1 * n$$

Przyjmując

$$b - a = 1 \quad i \quad b + a = n$$

obliczamy rozwiązanie

$$a = \frac{n - 1}{2} \quad i \quad b = \frac{n + 1}{2}$$

Sprawdzamy, że

$$\left(\frac{n + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n - 1}{2}\right)^2 = n$$

Natępnie, jeżeli n ma czennik $p > 1$ i $p < n$ to rozkładamy liczbę n na iloczyn

$$n = p * q$$

¹Tożsamością nazywamy równość, która jest prawdziwa dla wszystkich wartości parametrów

Przyjmując

$$b - a = p \quad i \quad b + a = q$$

obliczamy rozwiązanie

$$a = \frac{q - p}{2} \quad i \quad b = \frac{p + q}{2}$$

Sprawdzamy, że

$$\left(\frac{p + q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q - p}{2}\right)^2 = p * q = n$$

Następnie, jeżeli n ma inny czynnik dzielnik $p_1 > p$ i $p_1 < n$ to rozkładamy liczbę n na iloczyn

$$n = p_1 * q_1$$

Przyjmując

$$b - a = p_1 \quad i \quad b + a = q_1$$

obliczamy rozwiązanie

$$a = \frac{p_1 - q_1}{2} \quad i \quad b = \frac{p_1 + q_1}{2}$$

Sprawdzamy, że

$$\left(\frac{p_1 + q_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p_1 - q_1}{2}\right)^2 = p_1 * q_1 = n$$

Ogólnie rozkładamy liczbę n na m czynników pierwszych

$$n = p_0 * p_1 * p_2 * \dots * p_m, \quad p_0 = 1$$

i stosując powyższy rozkład na iloczyn

$$n = p_k * q_k$$

obliczamy rozwiązanie

$$a = \frac{p_k - q_k}{2} \quad i \quad b = \frac{p_k + q_k}{2}$$

Sprawdzamy, że

$$\left(\frac{p_k + q_k}{2}\right)^2 - \left(\frac{p_k - q_k}{2}\right)^2 = p_k * q_k = n$$

dla $k = 0, 1, 2, 3, \dots, m$

W ten sposób otrzymujemy wszystkie $m + 1$ rozwiązań naturalnych.

Przykład 1.2 Niech $n = 15$. Wtedy mamy rozkład na iloczyn

$$15 = 1 * 15 \quad lub \quad p = 3 * 5$$

Zatem mamy pierwsze rozwiązanie dla $p = 1$ i $q = 15$

$$b = \frac{15 + 1}{2} = 8 \quad i \quad a = \frac{15 - 1}{2} = 7$$

Sprawdzamy, że

$$b^2 - a^2 = \left(\frac{15 + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{15 - 1}{2}\right)^2 = 64 - 49 = 15$$

Następnie dla rozkładu

$$15 = 3 * 5$$

przyjmujemy $p_1 = 3$ i $q_1 = 5$.

Wtedy mamy

$$b + a = 5 \quad i \quad b - a = 3$$

Skąd otrzymujemy drugie rozwiązanie

$$b = \frac{5+3}{2} = 4 \quad i \quad a = \frac{5-3}{2} = 1$$

Sprawdzamy, że

$$b^2 - a^2 = \left(\frac{5+3}{2}\right)^2 - \left(\frac{5-3}{2}\right)^2 = 16 - 1 = 15$$

2.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Podobnie sprawdzamy sześciąt sumy lub różnicy.

Mianowicie, obliczmy

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = a(a+b)^2 + b(a+b)^2 \\ &= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= (a^3 + 2a^2b + ab^2) + (ba^2 + 2ab^2 + b^3) \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ (a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 = a(a-b)^2 - b(a-b)^2 \\ &= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= (a^3 - 2a^2b + ab^2) - (ba^2 - 2ab^2 + b^3) \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \end{aligned}$$

3. Suma kwadratów.

Suma kwadratów dwóch liczb rzeczywistych różnych od zera jest dodatnia i równa się zero wtedy i tylko wtedy, gdy obie liczby są równe zero.

Mianowicie, piszemy

$$a^2 + b^2 > 0, \quad \text{gdy} \quad a \neq 0 \text{ lub } b \neq 0,$$

$$a^2 + b^2 = 0, \quad \text{gdy} \quad a = 0 \text{ i } b = 0.$$

4. Różnica kwadratów.

Różnica kwadratów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na czynniki liniowe. Mianowicie, mamy

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie

$$(a-b)(a+b) = a(a+b) - b(a+b) = (a^2 + ab) - (ba + b^2) = a^2 - b^2.$$

5. Suma sześciątów.

Suma sześciątów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na iloczyn

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie

$$\begin{aligned} (a + b)(a^2 - ab + b^2) &= a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2) \\ &= (a^3 - a^2b + ab^2) + (ba^2 - ab^2 + b^3) = a^3 + b^3. \end{aligned}$$

6. Różnica sześciątów.

Różnica sześciątów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na iloczyn

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie

$$\begin{aligned} (a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2) \\ &= (a^3 + a^2b + ab^2) - (ba^2 + ab^2 + b^3) = a^3 - b^3. \end{aligned}$$

1.1.1 Przykłady

Przykład 1.3 Wykonaj działanie

$$\begin{array}{ll} (i) & (2a + 3)^2, & (ii) & \left(\frac{x}{2} - 4\right)^2, \\ (ii) & (3a + 2)^3, & (iv) & (2x - 3y)^3, \end{array}$$

Rozwiązanie. Stosując wzory, obliczamy

$$ad.(i) \quad (2a + 3)^2 = (2a)^2 + 2(2a)3 + 3^2 = 4a^2 + 12a + 9.$$

$$\begin{aligned} sd.(ii) \quad \left(\frac{x}{2} - 4\right)^2 &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{2}\right)(-4) + (-4)^2 \\ &= \frac{x^2}{4} - 4x + 16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ad.(iii) \quad (3a + 2)^3 &= (3a)^3 + 3(3a)^2 \cdot 2 + 3(3a) \cdot 2^2 + 2^3 \\ &= 27a^3 + 54a^2 + 36a + 27. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ad.(iv) \quad (2x - 3y)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(-3y)^2 - (3y)^3 \\ &= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3. \end{aligned}$$

Zadanie 1.1 Wykonaj działania

$$\begin{array}{ll} (i) & \frac{(5a + 2)^2}{(2a - 3)^2}, & (ii) & \left(\frac{x^2}{3} - 1\right)^2, \\ (ii) & (3a + 2)^3, & (iv) & \left(\frac{3x - 2y}{2x + 3y}\right)^3, \end{array}$$

Zadanie 1.2 Uprość wyrażenie

$$\begin{array}{l} (i) \quad \frac{(a^2 + b^2)(a^3 - b^3)(a^3 + b^3)}{[(a + b)^2 + (a - b)^2](a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)} \\ (ii) \quad \frac{1 + x + x^2 + x^3}{1 + x^2} \end{array}$$

1.2 Dwumian Newtona (1642-1727).

Jednym z najważniejszych i szeroko stosowanym wzorów jest *Dwumian Newtona*:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \quad (1.1)$$

Dwumian Newtona piszemy również w Σ (sigma) notacji

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (1.2)$$

Napiszmy Dwumian Newtona dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$,

$$\begin{aligned} (a+b)^1 &= \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = a + b, & n=1 \\ (a+b)^2 &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = a^2 + 2ab + b^2, & n=2 \\ (a+b)^3 &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} a^{3-k} b^k = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3, & n=3 \\ (a+b)^4 &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} a^{4-k} b^k = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4, & n=4 \\ (a+b)^5 &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} a^{5-k} b^k = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5, & n=5 \end{aligned}$$

Własności symbolu Newtona $\binom{n}{k}$.

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

- Symetria

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Sprawdzamy

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Sprawdzamy

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * \frac{k+1}{n-k} \\ \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \end{aligned}$$

Własności współczynników Newtona można łatwo odczytać z powyższych tabeli. Mianowicie, własność 1

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

jest widoczna, ponieważ skrajne wartości w każdym wierszu równają się 1. Również jest widoczna w tabeli własność 2, symetria

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Tabelę wartości współczynników Newtona w n -*ty*m wierszu tworzymy stosując własność 3, to jest wzór.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Na przykład, z wartości już obliczonych w wierszu $n - 1$ obliczymy wartości w wierszu n

$$\begin{aligned} n = 1, \quad k = 0, \quad \binom{1}{0} + \binom{1}{1} &= 1 + 1 = 2 = \binom{2}{1} \\ n = 2, \quad k = 0, \quad \binom{2}{0} + \binom{2}{1} &= 1 + 2 = 3 = \binom{3}{1} \\ n = 2, \quad k = 1, \quad \binom{2}{1} + \binom{2}{2} &= 2 + 1 = 3 = \binom{3}{2} \\ n = 3, \quad k = 0, \quad \binom{3}{0} + \binom{3}{1} &= 1 + 3 = 4 = \binom{4}{1} \\ n = 3, \quad k = 1, \quad \binom{3}{1} + \binom{3}{2} &= 3 + 3 = 6 = \binom{4}{2} \\ n = 3, \quad k = 2, \quad \binom{3}{2} + \binom{3}{3} &= 3 + 1 = 4 = \binom{4}{3} \end{aligned}$$