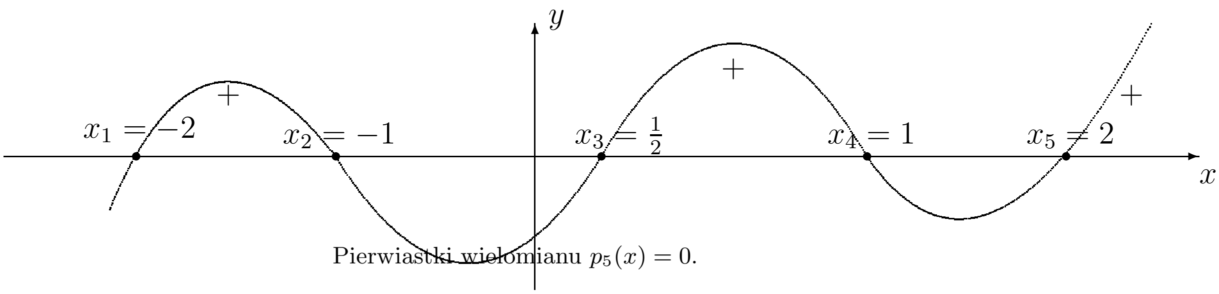
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16



Pierwiastki wielomianu $p_5(x) = 0$.

Wielomiany [1]

Tadeusz STYŠ

WARSZAWA 2020

[1] Rozdział 8. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.

Contents

Chapter 1

Wielomiany

Pod pojęciem *wielomiany* rozumiemy najprostrzą klasę funkcji o bardzo szerokim zakresie zastosowań. W tym wielomiany stopnia $n = 0, 1, 2, 3, ..., n$, jednej i wielu zmiennych, wielomiany interpolacyjne, wielomiany jako funkcje specjalne i dwumian Newtona.
Jasne, że w programie szkoły podstawowej nie wszystkie rodzaje wielomianów występują, a jeżeli występują to w bardzo elementarnej formie. Zatem w tym rozdziale wielomiany wprowadzone są w najprostrzej formie wsparte licznymi przykładmi i zadaniami.

1.1 Jednomiany, dwumiany i trójmiany

Jednomianem nazywamy ciąg liczb lub ciąg liczb i liter lub ciąg tylko liter połączonych operacją mnożenia.
Wymieńmy kilka jednomianów

$$\begin{array}{ll} 125 & 247, \quad \textit{jedna liczba jest jednomianem} \\ 2*5*7, & 3*4*5*6*7, \\ 3*a*b & a*b*c, \\ 4**5*x*y*z, & 5*a^2*b^3*c^4, \\ 15*x^3*y^2*z^3 & 7*9*a^4*b^5*x^6*y^7. \end{array}$$

Każdy jedomian jest szczególnym wyrażeniem arytmetycznym lub algebraicznym, gdyż występują w ich określeniu liczby lub litery połączone tylko operacją mnożenia.
Dwumianem nazywamy sumę dwóch jednomianów.
Na przykład

$$a+b, \;\; a-b, \;\; a^2+b^2, \quad 3x^3+5y^3.$$

Podobnie trójmianem nazywamy sumę trzech jednomianów.
Na przykład

$$\begin{array}{ll} a+b+c, & 2*x_3+4*y^3+5*x*y, \\ a^2+2*a*b+b^2, & x^2-2*x*y+y^2. \end{array}$$

1.2 Funkcja liniowa.

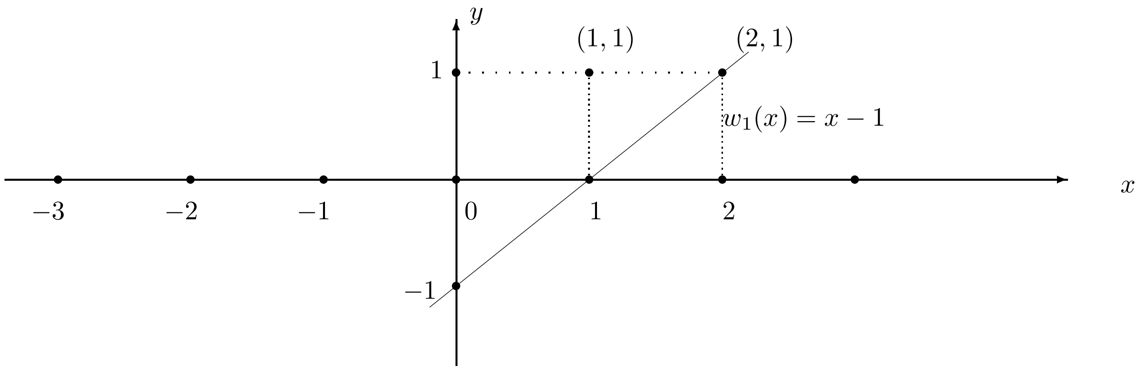
Funkcja liniowa, czyli wielomian stopnia $n = 1$ jest dwumianem szczególnej postaci:

$$w_1(x) = a\,x + b \tag{1.1}$$

o współczynnikach a i b oraz zmiennej x.
Dwumian $w_1(x) = a\,x + b$ nazywamy funckcją liniową, gdyż jej wykresem jest linia prosta.

Jeżeli współczynnik $a = 0$ to funkcja liniowa jest stała, której wykresem jest prosta równoległa do osi x. Funkcja liniowa ustala zależność pomiędzy współrzędnymi x i y, którą piszemy

$$w_1(x) = ax + b, \qquad lub \qquad y = ax + b$$



Wykres funkcji liniowej $y = x - 1$, w układzie wspołrzędnydnych x, y

Zauważmy, że linia prosta o równaniu $y = x - 1$ przechodzi przez punkty $(0, -1)$, $(1, 0)$ i przez punkt $(2, 1)$. Wartości tej funkcji liniowej obliczamy niżej dla argumentu $x = 0,\ 1,\ 2$

$$w_1(0) = 0 - 1 = -1, \quad w_1(1) = 1 - 1 = 0, \quad w_1(2) = 2 - 1 = 1.$$

Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.
Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współrzędnych

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1)$$

piszemy jako następującą zależność współrzędnej y od współrzędnej x:

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \tag{1.2}$$

Istotnie, gdy $x = x_0$ to $y = y_0$ lub gdy $x = x_1$ to $y = y_1$. To znaczy, że punkty (x_0, y_0), (x_1, y_1) leżą na prostej, gdyż ich współrzędne spełniają równanie prostej.

Przykład 1.1 *Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ i $(x_1, y_1) = (0, 1)$. Sprawdź który z punktów $(1, 1)$, $(1, 2)$ leży na prostej.*

Rozwiązanie:
Piszemy równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$(x_0, y_0) = (-1, 0) \quad i \quad (x_1, y_1) = (0, 1)$$

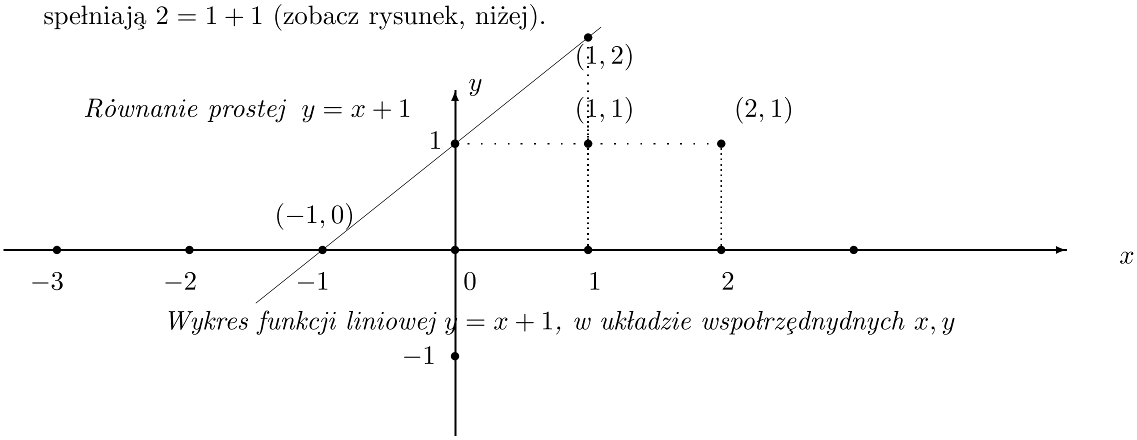
podstwiając do wzoru (1.2) ich współrzędne

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 = \frac{x - 0}{-1 - 0} * 0 + \frac{x + 1}{0 + 1} * 1 = x + 1$$

Odpowiedź: Równanie prostej przechodzącej przez punkty $(-1, 0)$ i $(0, 1)$

$$y = x + 1$$

Punkt $(1, 1)$ nie leży na prostej $y = x+1$ ponieważ jego współrzędne nie spełniają równania $1 \neq 1 + 1$. Natomiast punkt $(1, 2)$ leży na prostej $y = x + 1$ ponieważ jego współrzędne spełniają $2 = 1 + 1$ (zobacz rysunek, niżej).



1.2.1 Położenie prostych na płaszczyźnie.

Funkcja liniowa

$$y = ax + b$$

określa położenie prostej na płaszczyźnie (x, y). To znaczy punkt o wspórzędnych (x, y) leży na prostej, jeżeli $y = ax + b$.

Funkcja liniowa $y = ax + b$ przecina oś x w punkcie $(\frac{-b}{a}, 0)$ i przecina oś y w punkcie $(0, b)$.

Mówimy, że liczba x jest proporcjonalna do liczby y, jeżeli $y = ax$ lub $\frac{y}{x} = a$. Zatem proporcjonalność dwóch wielkości wyraża funkcja liniowa. Wtedy $a \neq 0$ jest współczynnikiem proporcjonalności.

Zauważmy, że prosta $y = ax + b$

- przecina oś y, w punkcie $(0, b)$, gdy $x = 0$, wtedy

$$y = ax + b = a * 0 + b = b$$

- przecina oś x, w punkcie $(-\frac{b}{a}, 0)$, gdy $x = -\frac{b}{a}$, wtedy

$$y = ax + b = a(-\frac{b}{a}) + b = 0.$$

- jeżeli $a = 0$ to $y = b$ wtedy prosta jest równoległa do osi x
- dwie proste o równaniach

$$y = a_1 x + b_1, \qquad y = a_2 x + b_2$$

przecinają się w punkcie (x_0, y_0), jeżeli ten punkt spełnia rónania tych prostych

$$y_0 = a_1 x_0 + b_1, \qquad i \qquad y_0 = a_2 x_0 + b_2$$

- dwie proste są równoległe, jeżeli $a_1 = a_2$. Wtedy proste nie mają punktu wspólnego lub pokrywają się.

Przykład 1.2 *Podaj położenie na płaszczyźnie (x, y) dwóch prostych o rónaniach*

$$y = x, \qquad y = 1 - x$$

Znajdź ich punkty przecięcia z osiami x i y oraz punkt przecięcia tych prostych.

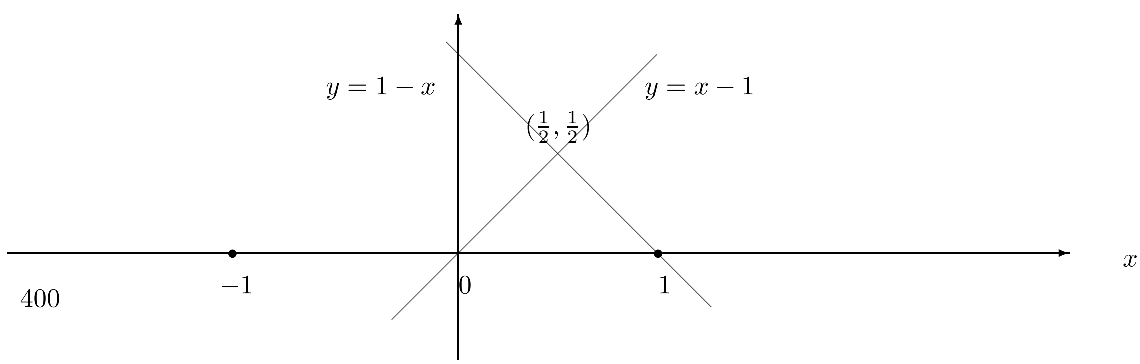
Rozwiązanie. Prosta o równaniu $y = x$ przecina oś x i oś y w początku układu współrzędnych $(0, 0)$, wtedy $x = 0$ i $y = 0$.
Podobnie, prosta o równaniu $y = 1 - x$ przecina oś x, gdy $y = 0$, to znaczy $1 - x = 0$, dla $x = 1$, w punkcie $(1, 0)$. Ta prosta przecina oś y gdy $x = 0$, wtedy $y = 1 - 0 = 1$ to jest w punkcie $(0, 1)$.
Dwie proste przecinają się w punkcie (x, y) gdy współrzędne tego punktu spełnia ją oba równania, to znaczy

$$y = x, \quad \text{oraz} \quad y = 1 - x$$

Skąd przez podstawien $y = x$ do drugiego równania znajdujemy

$$x = 1 - x, \qquad 2x = 1, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

Zatem proste przecinają się w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



Proste: $y = x$, $\quad y = 1 - x$

Zadanied 1.1 *Podaj położenie na płaszczyźnie (x, y) dwóch prostych o rónaniach*

$$y = 2x - 1, \qquad y = 1 - 2x$$

Znajd'z ich punkty przecięcia z osiami x i y oraz punkt przecięcia tych prostych.

Zadanied 1.2 *Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ i $(x_1, y_1) = (1, 1)$. Sprawdź który z punktów $(0, 1)$, $(2, 2)$ leży na prostej.*

Zadanied 1.3 *W których punktach prosta $y = -3x + 6$ przecina osie współrzędnych. Oblicz wartość tej funkcji liniowej dla $x = 1$. Sprawdź który z punktów $(0, 3)$, $(2, 0)$ leży na prostej.*

1.3 Funkcja kwadratowa

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem

$$w_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c, \qquad \text{lub} \quad y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0. \tag{1.3}$$

W przypadku gdy współczynnik $a = 0$ funkcja $y = bx + c$ jest liniowa.
Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych R. Natomiast, zbiór wartości funkcji kwadratowej zależy od współczynników a, b, c i nie jest całym zbiorem liczb rzeczywistych.
Wyróżnik funkcji kwadratowej. Wyrażenie

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

nazywamy wyróżnikiem funkcji kwadratowej.

1.3.1 Równanie kwadratowe

Funkcja kwadratowa ma wartość zero w punkcie x_0, jeżeli x_0 jest rozwiązaniem równania kwadratowego

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Pierwiastki równania kwadratowego wyznaczamy metodą starożytnych uzupełnienia wyrażenia

$$ax^2 + bx + c$$

do kwadratu.
Mianowicie, wyciągając wspóczynnik $a \neq 0$ przed nawias otrzymamy

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}).$$

Następnie, dodając i jednocześnie odejmując wyrażenie $(\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ piszemy wyrażenie kwadratowe w postaci kanonicznej

$$ax^2 + bx + c = a(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}} + \underbrace{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}) = a[\underbrace{(x + \frac{b}{2a})^2} - \underbrace{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}]$$

W ten spoób otrzymaliśmy postać kanoniczną funkcji kwadratowej:
Postać kanoniczna funkcji kwadratowej.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

gdzie wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$.
Pierwiastki równania kwadratowego. Z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej łatwo znajdujemy pierwiastki równania kwadratowego. Mianowicie piszemy

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0.$$

Dla wyròżnika $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ możemy ròżnicę kwadratòw napisać w postaci iloczynu

$$(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}) = 0.$$

Skąd wynikają wzory na pierwiastki równania kwadratowego

$$x_1 + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0, \qquad \text{lub} \quad x_2 + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

lub

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad \text{lub} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Zauważmy, że w przypadku gdy wyróżnik $\Delta = 0$, funkcja kwadratowa jest pełnym kwadratem

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2.$$

Wtedy z powyższych wzorów otrzymujemy pierwiastek podwójny

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 = 0, \qquad x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

1.3.2 Wzory Vieta

Pierwiastki równania kwadratowego

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

spełniają następujące wzory Vieta:
Suma i iloczyn pierwiastków

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 * x_2 = \frac{c}{a}.$$

Istotnie, obliczamy

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Podobnie iloczyn

$$\begin{aligned} x_1 * x_2 &= (\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}) * (\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}) \\ &= (-\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})^2 \\ &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Przykład 1.3 *Znajdź równanie kwadratowe którego suma pierwiastków równa 3 i iloczyn pierwiastków równy 2.*

Rozwiązanie. Stosując wzory Vieta, piszemy

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3, \qquad x_1 * x_2 = \frac{c}{a} = 2.$$

Skąd znajdujemy

$$b = -3a, \quad c = a.$$

Zatem, mamy rodzinę równań kwadratowych

$$ax^2 - 3ax + a = 0$$

z parametrem $a \neq 0$ których suma pierwiastków równa jest 3, i iloczyn pierwiastków równy jest 2.

Zadanied 1.4 *Znajdź równanie kwadratowe którego suma pierwiastków równa 6 i iloczyn pierwiastków równy 5.*

1.3.3 Rozkład funkcji kwadratowej na czynniki pierwsze

Jeżeli wyróżnik $\Delta < 0$ jest ujemny to równanie kwadratowe nie ma pierwiastków rzeczywistych. Wtedy funkcja kwadratowa nie rozkłada się na czyniki liniowe.
W przypadku gdy wyróżnik $\Delta \geq 0$ funkcja kwadratowa rozkłada się na czynniki liniowe.
Istotnie, wtedy możemy przedstawić funkcje kwadratową jako różnicę kwadratów

$$ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2]$$

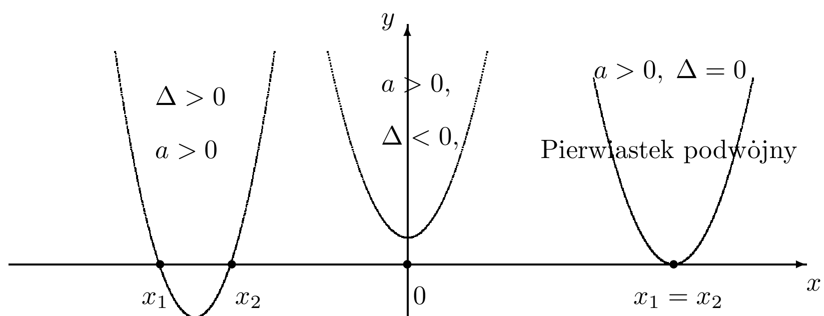
Stosując wzór na różnice kwadratów otrzymamy rozkład funkcji kwadratowej na czynniki liniowe

$$ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})] = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Położenie funkcji kwadratowej na płaszczyźnie. Położenie wykresu funkcji kwadratowej na płaszczyźnie we współrzędnych (x, y) wyznaczymy w następujących przypadkach:

$$(1) \quad a > 0, \quad \Delta > 0, \quad \Delta = 0, \quad \Delta < 0$$

$$(2) \quad a < 0, \quad \Delta > 0, \quad \Delta = 0, \quad \Delta =< 0.$$

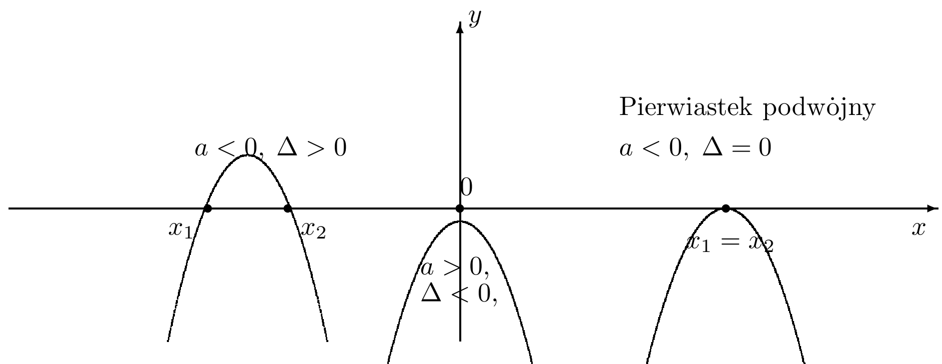


Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c, \ \ a > 0.$

W przypadku (2)

$$a < 0, \quad \Delta > 0, \quad \Delta = 0, \quad \Delta < 0$$

położenie wykresu trójmianu kwadratowego



Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c, \ \ a < 0.$

Z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej wnioskujemy, że

- funkcja kwadratowa osiąga minimum równe $-\frac{\Delta}{4a}$, jeżeli współczynnik $a > 0$ jest dodatni.

- funkcja kwadratowa osiąga maksimum równe $-\frac{\Delta}{4a}$, jeżeli współczynnik $a < 0$ jest ujemny.

Istotnie, w punkcje minimum lub maksimum $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}$ funkcja kwadratowa osiąga minimum lub maksimum, gdyż wtedy w postaci kanonicznej

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

wyrażenie $(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$ dla $x = -\frac{b}{2a}$, natomiast wartość funkcji $y = -\frac{\Delta}{4a}$.

Przykład 1.4 *Dla danej funkcji kwadratowej*

$$y = 2x^2 - 6x + 4$$

wykonaj następujące operacje:
(a) Znajdź mniejsca zerowe funkcji
(b) Rozłóż funkcje na czynniki liniowe
(c) Znajź minimum funkcji
(d) Podaj wykres funkcji

Rozwiązanie. Współczynniki równaia: $a = 2,\ b = -6,\ c = 4.$
Obliczmy wyróżnik równania

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 424 = 36 - 32 = 4 > 0.$$

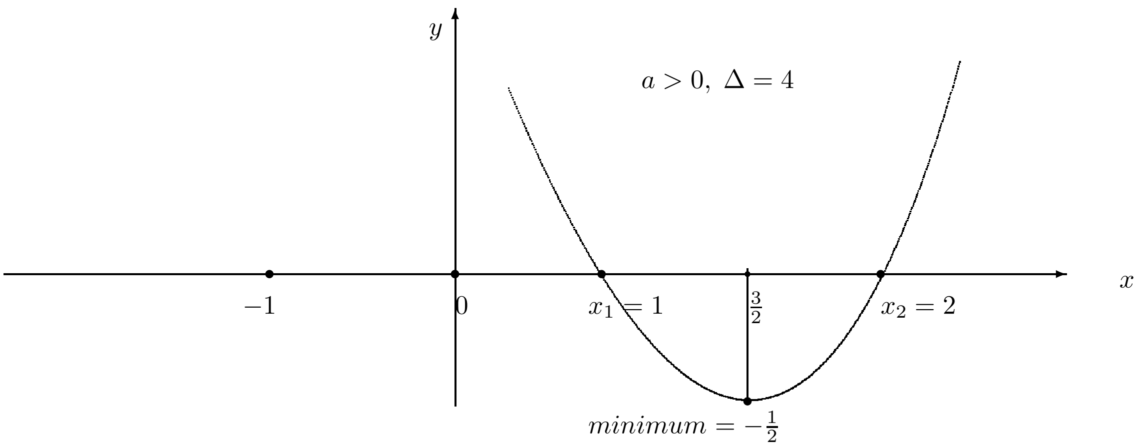
(a) Stosując wzory, obliczmy pierwiaski równia

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{4}}{4} = 1, \qquad x_2 = \frac{-b = \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{4}}{4} = 2$$

(b) Według wzoru, funkcja kwadratowa rozkłada się na czynniki liniowe

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) = 2(x - 1)(x - 2).$$

(c) Ponieważ wyróżnik $\Delta = 4 > 0$ jest dodatni to funkcja kwadratowa ma minimum $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{2}$w punkcie $(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.
Punkty w których leżą pierwiastki funkcji kwadratowej $(1, 0)$ $(2, 0)$ i punkt minimum $(\frac{3}{2}. -\frac{1}{2})$ wyznaczają położenie jej wykresu na płaszczyźnie (x, y).
(d) Wykres funkcji $y = 2x^2 - 6x + 4$



Funkcja kwadratowa $y = 2x^2 - 6x + 4$.

1.3.4 Nierówności kwadratowe

Rozwiązanie nierówności kwadratowych odczytujemy z położenia wykresu funkcji kwadratowej. Mianowicie, mamy następujące przypadki:

1. Dla $a > 0,\ \Delta > 0$ funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c > 0$ jest dodatnia poza pierwiastkami: $x < x_1$ oraz $x > x_2$, natomiast jest ujemna $y = ax^2 + bx + c < 0$ pomiędzy pierwiastkami: $x_1 < x < x_2$.

2. Dla $a < 0,\ \Delta > 0$ funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c > 0$ jest ujemna poza pierwiastkami: $x < x_1$ oraz $x > x_2$, natomiast jest dodatnia $y = ax^2 + bx + c > 0$ pomiędzy pierwiastkami: $x_1 < x < x_2$.

3. Dla $a > 0,\ \Delta \le 0$ funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c \ge 0$ jest nieujemna na całym zbiorze liczb rzeczywistych dla $-\infty < x < \infty$.

4. Dla $a < 0,\ \Delta \le 0$ funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c \le 0$ jest niedodatnia na całym zbiorze liczb rzeczywistych dla $-\infty < x < \infty$.

Przykład 1.5 *Rozwiąż następujące nierówności i znajdź maksimum lub minimum wskazanej funkcji:*

$$
\begin{array}{lll}
(1) & x^2 + x + 1 > 0, & y = x^2 + x + 1. \\
(2) & -2x^2 + 2x - 1 < 0, & y = -2x^2 + 2x - 1, \\
(3) & x^2 - 5x + 6 \ge 0, & y = x^2 - 5x + 6, \\
(4) & -2x^2 + x + 1 > 0, & y = -2x^2 + x + 1.
\end{array}
$$

Rozwiązanie, (1). Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji

$$y = x^2 + x + 1.$$

Współczynniki:

$$a = 1,\ b = 1,\ c = 1.$$

Wyróżnik:
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 * 1 * 1 = -3.$$
Ponieważ współczynnik $a = 1 > 0$ jest dodatni i wyróżnik $\Delta = -3 < 0$ jest ujemny to nierówność
$$x^2 + x + 1 > 0,$$
jest prawdziwa dla $-\infty < x < \infty$.
Funkcja
$$y = x^2 + x + 1$$
osiąga minimum równe $\frac{3}{4}$ w punkcie $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.
Rozwiązanie, (2). Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji
$$y = -2x^2 + 2x - 1.$$
Współczynniki: $a = -2,\ b = 2,\ c = -1$.
Wyróżnik: $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 * (-2) * (-1) = -4$.
Ponieważ współczynnik $a = -2 < 0$ jest ujemny i wyróżnik $\Delta = -4 < 0$ jest ujemny to nierówność
$$-2x^2 + 2x - 1 < 0$$
trómia jest prawdziwa dla $-\infty < x < \infty$.
Funkcja $y = -2x^2 + 2x - 1$ osiąga maksimum równe 1 w punkcie $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (\frac{1}{2}, 1)$
Rozwiązanie, (3). Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji
$$y = x^2 - 5x + 6.$$
Współczynniki: $a = 1,\ b = -5,\ c = 6$.
Wyróżnik: $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 * 1 * 6 = 1$.
Ponieważ wyróżnik $\Delta = 1 > 0,\ \sqrt{1} = 1$ jest dodatni to funkcja ma dwa różne pierwiastki
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 1}{2} = 2,\ \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 1}{2} = 3.$$
Zatem nierówność
$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$
jest prawdziwa poza pierwiastkam to znaczy dla $x < 2$ i dla $x > 3$
Funkcja $y = x^2 - 5x + 6$ osiąga minimu równe $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4}$ w punkcie $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}) = (\frac{5}{2}, \frac{-1}{4})$.
Rozwiązanie, (4). Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji
$$y = -2x^2 + x + 1,$$
Współczynniki: $a = -2,\ b = 1,\ c = 1$.
Wyróżnik: $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 * (-2) * 1 = 9$.
Ponieważ współczynnik $a = -2 < 0$ wyróżnik $\Delta = 9 > 0,\ \ \sqrt{9} = 3$ jest dodatnia to funkcja
$$y = -2x^2 + 2x - 1,$$
ma dwa różne pierwiastki
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{2 * (-2)} = 1,\ \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{2 * (-2)} = -\frac{1}{2}.$$
Zatem nierówność jest prawdziwa pomiędzy pierwiastkami to znaczy dla $-\frac{1}{2} < x < 1$.
Funkcja $y = -2x^2 + x + 1$ osiąga maksimum równe $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{9}{8}$ w punkcie $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}) = (\frac{1}{4}, \frac{9}{8})$.

Zadanied 1.5 *Rozwiąż następujące nierówności i znajdź maksimum lub minimum wskazanej funkcji:*

$$\begin{array}{lll} (1) & x^2 - x + 1 > 0, & y = x^2 - x + 1. \\ (2) & -3x^2 + 6x - 3 \leq 0, & y = -3x^2 + 6x - 3. \\ (3) & x^2 - x - 2 \geq 0, & y = x^2 - x - 2. \\ (4) & -4x^2 + 3x + 1 > 0, & y = -4x^2 + 3x + 1. \end{array}$$

Zadanied 1.6 *Dla jakich wartości parametru m funkcja kwadratowa*

$$y = x^2 + 2mx + m + 1$$

jest dodatnia dla wszystkich rzeczywistych wartości $x \in R$.

Przykład 1.6 *Dla trójmianu kwadratowego*

$$y = x^3 - 5x + 6$$

(i) wyprowadź postać kanoniczną trójmianu

(ii) znajdź jego pierwiastki i oblicz minimum trójmianu

(iii) narysuj położenie trójmianu na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Rozwiązanie:
(i) Wyróżnik tr:omianu kwadratowego o współczynnikach $a = 1,\ b - -5,\ c = 6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 41 * 6 = 25 - 24 = 1.$$

Proste przekształcenie tego trójmianu prowdzi do postaci kanonicznej

$$y = x^2 - 5x + 6 = x^2 - 5x + (\frac{-5}{2})^2 + 6 - (\frac{-5}{2})^2 = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

Skąd postać kanoniczna tego trójmianu

$$y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

(ii) Obliczmy pierwiastki trójmianu z postaci kanonicznej lub bezpośrednio ze wzorò. Mianowicie postać kanoniczna jest różnią kwadratów, którą rozkładamy na czynniki

$$y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4} = y = (x - \frac{5}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 = (x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}).$$

Skąd obliczamy pierwiastki równania kwadratowego

$$\begin{array}{ll} (x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}) = 0 & \\ (x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}) = 0, \quad lub & (x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}) = 0 \\ x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3, & x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2. \end{array}$$

Łatwo obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego podstawiając do wzorów

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-5}{2} - \frac{\sqrt{1}}{2} = 2, \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-5}{2} + \frac{\sqrt{1}}{2} = 3.$$

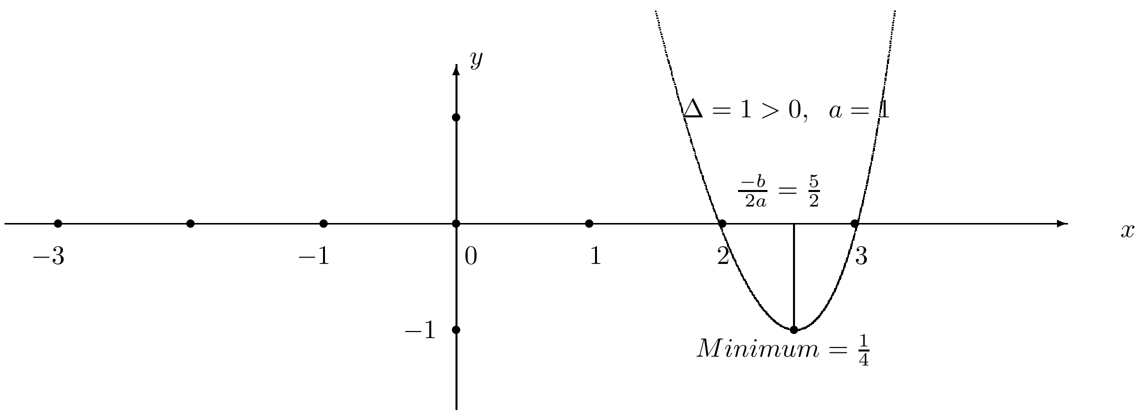
Minimum trójmianu kwadratowego obliczamy bezpośrednio z postaci kanonicznej

$$y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

Jasne, że wartość tego trójmianu jest najmniejsza, jeżeli kwadrat

$$(x - \frac{5}{2})^2 = 0.$$

Dla $x = \frac{5}{2}$, wartość $y = -\frac{1}{4}$. Zatem minimum trójmianu kwadratowego równe jest $\frac{1}{4}$.



1.3.5 Przykłady

Przykład 1.7 *Równanie kwadratowe*

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

ma dwa pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2. Korzystając ze wzirów Viete oblicz wartości wyrażeń algebraicznych

$$(x_1 + x_2)^2, \quad x_1^2 + x_2^2, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

Rozwiązanie: Współczynniki równania $a = 1,\ b = -4,\ c = 3$
Ze wzorów Viete obliczmy sumę i iloczyn pierwistkoów

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{1} = 4, \quad x_1 * x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3.$$

Skąd obliczamy wartości wyrażeń algebraicznych

$$(x_1 + x_2)^2 = 4^2 = 16, \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 16 - 2 * 3 = 10.$$

oraz

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 * x_2} = \frac{4}{3}.$$

Przykład 1.8 *Dla których wartości parametru m równanie*

$$x^2 - 2x + m = 0$$

ma dwa różne pierwiastki

Rozwiązanie: Równie

$$x^2 - 2x + m = 0$$

ma dwa różne pierwiastki, jeżeli wyróżnik tego równa jest dodatni

$$\begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4m > 0, \\ 4 - 4m > 0, \quad 4m < 4, \quad m < 1. \end{array}$$

Odpowieć: Równanie $x^2 - 2x + m$ ma dwa różne pierwiastki dla parametru $-\infty < m < 1$

Przykład 1.9 *Wyznacz współczynniki a, b, c równania kwadratowego*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

które posiada dwa rzeczywiste pierwiastki x_1 i x_2 takie, że ich suma i iloczyn są dane

$$x_1 + x_2 = 7, \qquad x_1 * x_2 = 10.$$

Rozwiązanie: Korzystając ze wzorów Viete

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 7, \qquad x_1 * x_2 = \frac{c}{a} = 10,$$

znajdujemy następujące związki

$$b = -7a, ; \qquad c = 10a.$$

Skąd równianie

$$ax^2 - 7ax + 10a = 0, \quad lub \quad a(x^2 - 7x + 10) = 0$$

spełnia warunki zadania dla każdego $a \neq 0$.

Przykład 1.10 *Wyznacz współczynniki a, b, c równania kwadratowego*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

które posiada dwa rzeczywiste pierwiastki $x_1 = 3$ i $x_2 = 8$

Rozwiązanie: Korzystając ze wzorów Viete

$$x_1 + x_2 = 3 + 8 = 11, \qquad \frac{-b}{a} = 11, \qquad x_1 * x_2 = 3 * 8 = 24, \qquad \frac{c}{a} = 24,$$

znajdujemy następujące związki

$$b = -11a, ; \qquad c = 24a.$$

Skąd otrzymujemy równianie

$$ax^2 - 11ax + 24a = 0, \quad lub \quad a(x^2 - 11x + 24) = 0$$

które posiada pierwiastki $x_1 = 3$, $x_2 = 8$ dla każdego $a \neq 0$.

1.3.6 Zadania

Zadanied 1.7 *Znajdź pierwiastki równania*

(i)) $x^2 - 3x + 6 = 0,$

(ii) $-2x^2 + 9x - 10 = 0,$

(iii) $4x^2 - 12x + 9 = 0.$

Zadanied 1.8 *Dla których wartości parametru m równanie*

$$-x^2 + 4x + m - 4 = 0$$

ma dwa różne pierwiastki

Zadanied 1.9 *Dla których wartości zmiennej x trójmian kwadratowy*

$$y = x^2 + 4x + 3$$

jest dodatni.
Oblicz najmniejszą wartość tego trójmianu kwadratowego.

Zadanied 1.10 *Dla których wartości zmiennej x trójmian kwadratowy*

$$y = -2x^2 + 5x + 3$$

jest ujemny.
Oblicz największą wartość tego trójmianu kwadratowego.

Zadanied 1.11 *Dla których wartości parametru m trójmian kwadratowy*

$$y = x^2 + 4x + m^2$$

jest dodatni dla wszystkich wartości zmiennej x.
Oblicz najmniejszą wartość tego trójmianu kwadratowego.

Zadanied 1.12 *Dla których wartości parametru m trójmian kwadratowy*

$$y = -x^2 + 3x - m,$$

jest ujemny dla wszystkich wartości zmiennej x.
Oblicz największą wartość tego trójmianu kwadratowego.

Zadanied 1.13 *Znajdź równanie kwadratowe którego suma pierwiastków równa 6 i iloczyn pierwiastków równy 5.*

1.4 Wielomiany stopia n

Wielomiany mają prostą strukturę i stanowią ważną klasę funkcji w zastosowaniach matematyki. W istocie, wielomianami można approksymować każdą funkcję ciągłą z dowolną dokładnością.

Wielomianem stopnia n z miennej x nazywamy wyrażenie algebraiczne nastepującej postaci:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0.$$

Jeżeli $a_n = 0$ to wielomian jest stopnia niższego niż n

1.4.1 Przykłady wielomianów

Wielomian stopnia $n = 0$ zmiennej x ma wartość stałą równą a_0

$$p_0(x) = a_0 \quad \textit{dla wszystkich wartosci} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian stopnia $n = 0$

$$p_0(x) = 8 \quad \textit{dla wsztstkich} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

ma wartość stałą, $a_0 = 8$ dla wsztykich wartości rzeczywistych x.
Wielomian stopnia $n = 1$ zmiennej x, funkcja liniowa

$$p_1(x) = a_1x + a_0 \qquad \textit{dla wszystkich wartosci} \quad x(-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian stopnia $n = 1$

$$p_1(x) = 5x + 7 \quad \textit{dla} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

ma współczynniki $a_1 = 5, \ a_0 = 7$.
Wielomian stopnia $n = 2$ zmiennej x, funkcja kwadratowa

$$p_2(x) = a_2x + a_1x^2 + a_0 \quad dla x \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian stopnia $n = 2$

$$p_2(x) = 3x^2 + 4x + 5 \qquad \textit{dla} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

ma współczynniki $a_2 = 3, \ a_1 = 4, \ a_0 = 5$.
Wielomian stopnia $n = 3$ zmiennej x, wielomian kubiczny

$$p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \textit{dla} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian kubiczny

$$p_3(x) = 2x^3 + 3x^3 + 4x + 5, \quad \textit{dla} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

ma współczynniki $a_3 = 2, \ a_2 = 3, \ a_1 = 4, \ a_0 = 5$.
Podobnie wielomian stopnia $n = 5$ miennej z,

$$p_5(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad dla x \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian stopnia $n = 5$

$$p_5(z) = 2z^5 - 7z^4 + 5z^2 + 2, \quad \textit{dla} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

ma współczynniki $a_5 = 2, \ a_4 = -7, \ a_3 = 0, \ a_2 = 5, \ a_1 = 0, \ a_0 = 2$.

1.4.2 Operacje arytmetyczne na wielomianach.

Następujące twierdzenie jest prawie oczywiste:

Twierdzenie 1.1 *Zbiór wielomianów stopnia nie większego niż n jest zamknięty ze względu na operacje dodawania i odejmowania.*

Istotnie, rozpatrzmy dwa następujące wielomiany

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

Znajdujemy sumę lub różnicę tych wielomianów przez grupowanie wyrazów przy tej samej potędze

$$p_n(x) \pm q_n(x) = (a_n \pm b_n)x^n + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 \pm b_1)x + (a_0 \pm b_0.)$$

Zauważamy, że w wyniku otrzymamy wielomian stopnia nie większego niż n o współczynnikachch

$$a_n \pm b_n,\ a_{n-1} \pm b_{n-1}, ..., a_1 \pm b_a, a_0 \pm b_0.$$

Zatem, suma lub różnica wielomianów stopnia co najwyżej n jest wielomianem stopnia co najwyżej n. To znaczy, że zbiór wielomianów stopnia co najwyżej n jest zamknięty na operacje dodawania i odejmowania wielomianów stopnia co najwyżej n.

Przykład 1.11 *Dodaj następujące wielomiany*

$$p_4(x) = 3x^4 - 2x^3 + x + 5, \quad q_3(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x + 1,$$

Wykonując dodawanie, otrzymamy wielomian

$$\begin{aligned} r_4(x) &= (3+0)x^4 + (-2+2)x^3 + (0+5)x^2 + (1+2)x + (5+1) \\ &= 3x^4 + 5x^2 + 3x + 6. \end{aligned}$$

stopnia $n = 4$ o współczynnikach $a_4 = 3,\ a_3 = 0,\ a_2 = 5,\ a_1 = 3,\ a_0 = 6.$

1.4.3 Dzielenie wielomianu $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$

Wielomian $p_n(x)$ stopnia n dzielimy przez dwumian $x - x_0$ stopnia $n = 1$ według schematu dzielenia podanego w następujących przykłady:

Przykład 1.12 *Wykonaj dzielenie:*

$$\begin{array}{lcl} (x^3 - 1) : (x - 1) & = & x^2 + x + 1 \\ x^3 - x^2 & & \\ ---- & & \\ x^2 - 1 & & \\ x^2 - x & & \\ ---- & & \\ x - 1 & & \\ x - 1 & & \\ ---- & & \\ 0 & & \end{array}$$

Zauważ, że wykonujemy odejmowanie pod kreską.
Zatem wielomian $x^3 - 1$ dzieli się przez dwumian $x - 1$ i wynikiem dzielenia jest trójmian $x^2 + x + 1$.
Sprawdzamy dzielenie wykonując operacje odwrotną do dzielenia, to jest operacje odwrotną, mnożenie

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 - x^2 - 1 = x^3 - 1$$

Istotnie, w wyniku mnożenia dzielnika $x - 1$ przez wynik dzielenia $x^2 + x + 1$ otrzymaliśmy dzielną $x^3 - 1$.

Przykład 1.13 *Wykonaj dzielenie:*

$$
\begin{array}{lll}
(x^4 - x^3 - x^2 - x - 2) : (x - 2) & = & x^3 + x^2 + x + 1 \\
x^4 - 2x^3 & & \\
- - -- & & \\
x^3 - x^2 & & \\
x^3 - 2x^2 & & \\
- - -- & & \\
x^2 - x & & \\
x^2 - 2x & & \\
- - -- & & \\
x - 2 & & \\
x - 2 & & \\
- - -- & & \\
0 & &
\end{array}
$$

Zauważ, że wykonujemy odejmowanie pod kreską.
Zatem wielomian $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ dzieli się przez dwumian $x - 2$ i wynikiem dzielenia, którym jest wielomian $x^3 + x^2 + x + 1$.
Sprawdzamy, że

$$(x - 2)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 2 = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2.$$

Zadanied 1.14 *Wykonaj dzielenie według powyższego schematu:*

$$(x^4 - 1) : (x - 1)$$

1.4.4 Dzielenie wielomianu $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$ z resztą.

Dzielenie wielomianów jest rozszerzeniem algorytmu dzielenia liczb całkowitych. W powyższych przykładach wykonaliśmy dzielenie wielomianu 3-go i 4-go stopnia przez dwumian $x - x_0$ bez reszty, czyli reszta $r = 0$. Jednak nie zawsze tak jest. Naogół wielomiany dzielą się przez dwumian z resztą r.
Ponieważ rozpatrujemy dzielenie wielomianu

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

tylko przez dwumian $x - x_0$ to reszta r jest liczbą, wielomianem stałym stopnia zero.
Podobnie jak przy dzieleniu liczb całkowitych piszemy

$$\frac{p_n(x)}{x - x_0} = q_{n-1}(x) + \frac{r}{x - x_0}, \qquad n \geq 1,$$

gdzie $q_{n-1}(x)$ jest wielomianem stopnia $n - 1$ i r jest resztą z dzielenia.
Zatem wielomian $p_n(x)$ można zapisać

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - x_0) + r$$

Z powyższej równości wynika wzór na resztę, mianowicie $r = p_n(x_0)$.

Przykład 1.14 *Wykonaj dzielenie*

$$(2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6) : (x - 3)$$

$$
\begin{array}{lll}
(2x^4+3x^3-4x^2+5x+6):(x-3) & = & 2x^3+9x^2+23x+74 \\
2x^4-6x^3 & & \\
\quad - - - - - - - - & & \\
\quad\;\; 9x^3-4x^2 & & \\
\quad\;\; 9x^3-27x^2 & & \\
\quad\;\; - - - - & & \\
\qquad\quad 23x^2+5x & & \\
\qquad\quad 23x^2-69x & & \\
\qquad\quad - - - - - - - & & \\
\qquad\qquad\quad 74x+6 & & \\
\qquad\qquad\quad 74x-222 & & \\
\qquad\qquad\quad - - - - - & & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 226 & &
\end{array}
$$

Odpowiedź: Wielomian $p_4(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$ podzielony przez dwumian $x - 3$ daje wynik $q_3(x) = 2x^3 + 9x^2 + 23x + 74$ z resztą $r = 226$.
Piszemy

$$\frac{p_4(x)}{x-3} = (2x^3 + 9x^2 + 23x + 74) + \frac{226}{x-3}.$$

lub

$$p_4(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6 = (2x^3 + 9x^2 + 23x + 74)(x - 3) + 226.$$

Skąd reszta z dzielenia $r = p_4(3) = 226$.

1.4.5 Pierwiastki wielomianów. Twierdzenie Bezouta

Zera funkcji liniowej czy kwadratowej, czyli wielomianów stopnia pierwszego i stopnia drugiego, łatwo znajdujemy stosując znane wzory podane w poprzednich paragrafach. Znane są również wzory na pierwiastki wielomianów trzeciego stopnia i czwartego stopnia. Wiadomo jednak, że nie istnieją wzory na określenie pierwiastków dowolnego wielomianu stopnia większego lub równego niż 5. Natomiast, wiadome są kryteria znajdowania pierwiastków niektórych wielomianów stopni wyższych. Na przykład wiadomo, że jeżeli jakiś wielomian o współczynnikach całkowitych ma pierwiastki całkowite, wtedy te pierwiastki są dzielnikami jego współczynnika a_0. To kryterium dotyczy tylko wielomianów o współczynnikach całkowitych, które mają pierwiaski też całkowite .
Usasadnienie tego kryterium jest proste. Mianowicie, niech całkowita liczba $x_0 \neq 0$ będzie pierwiastkiem wielomianu $p_n(x)$ stopnia n o współczynnikach też całkowitych. Teraz pokażemy, że x_0 jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.
Zachodzi oczywista następująca równość:

$$p_n(x_0) = 0, \qquad \text{oraz} \quad \frac{p_n(x_0)}{x_0} = \underbrace{a_n x_0^{n-1} + a_{n-1}x_0^{n-2} + \cdots + a_1}+\frac{a_0}{x_0} = 0 \qquad (1.4)$$

Wyrażenie podkreślone nawiasem $\underbrace{a_n x_0^{n-1} + a_{n-1}x_0^{n-2} + \cdots + a_1}$ jest liczbą całkowitą jako suma iloczynów liczb całkowitych. Z równości (1.4) wynika, że iloraz $\dfrac{a_0}{x_0}$ też jest liczbą całkowitą, gdyż suma jest zerem. Zatem pierwiastek x_0 jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Przykład 1.15 *Znajdź pierwiastki całkowite wielomianu*

$$p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 6$$

Rozwiązanie. Zera wielomianu $p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 6 = 0$ szukamy wśród dzielników 2 lub 3 współczynnika $a_0 = -6$.
Sprawdzamy czy $x_0 = 2$ jest zerem tego wielomianu

$$p_3(2) = 2^3 - 2^2 + 2 - 6 = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$$

Dzielnik $x_0 = 2$ jest zerem wielomianu $p_4(x)$.
Teraz sprawdzamy czy $x_0 = 3$ jest zerem tego wielomianu

$$p_3(2) = 3^3 - 3^2 + 3 - 6 = 27 - 9 + 3 - 6 = 12 \neq 0$$

Dzielnik $x_0 = 3$ nie jest zerem tego wielomianu.
Zauważmy, że są wielomiany dla których żaden z dzielników współczynnika a_0 nie jest zerem. Na przykład wielomian

$$p_2(x) = x^2 + 2x + 8$$

nie ma zer rzeczywistych, gdyż wyróżnik $\Delta = -28$ jest ujemny.
Podstawową informacją o pierwiastkach wielomianów jest twierdzenie Bezouta.

Twierdzenie 1.2 *Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu*

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

wtedy i tylko wtedy gdy ten wielomian dzieli się przez dwumian $x - x_0$.

Dowód. Zauważmy, że twierdzenie Bezouta jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to żeby liczba $x_0 \in R$ była pierwiastkiem wielomianu.
Warunek konieczny znaczy:
Jeżeli wielomian $p_n(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - x_0$ to liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu, to znaczy $p_n(x_0) = 0$ oraz reszta $r = 0$.
Zatem niech wielomian $p_n(x)$ będzie podzielny przez dwumian $x - x_0$ bez reszty. wtedy ten wielomian ma postać

$$p_n(x) = (x - x_0)q_{n-1}(x)$$

gdzie $q_{n-1}(x)$ jest wielomianem stopnia co ajwyyżej $n - 1$.
Skąd dla $x = x_0$ wynika równość $p_n(x_0) = 0$ i dlatego x_0 jest pierwiastkiem tego wielomianu.
Warunek dostateczny znaczy:
Jeżeli liczba $x_0 \in R$ jest pierwiastekiem wielomian $p_n(x)$ to ten wielomian jest podzielny przez dwumian $x - x_0$ z ressztą $r = 0$.
Wiadomo, że dzieląc wielomia $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$ otrzymamy równość

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - x_0) + r$$

gdzie $q_{n-1}(x)$ jest wielomianem stopnia $n - 1$.
Ponieważ x_0 jest zerem tego wielomianu, to znaczy $p_n(x_0) = 0$ oraz $p_n(x_0) = r$. Zatem reszta $r = 0$. Wtedy z powyższej równości wynika postać wielomianu

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - x_0)$$

w której jest czynnik $x - x_0$ i dlatego wielomian $p_n(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - x_0$ z resztą $r = 0$.

1.4.6 Rozkład wielomianu na czynniki

Z twierdzenia Bezouta wynika następujący wniosek:
Wniosek. Niech liczby rzeczywiste $x_1, x_2, ..., x_k,\ \ k \leq n$ bedą zerami wielomianu

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

wtedy ten wielomian można zapisać w postaci iloczynu

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_k)q_{n-k}(x) \tag{1.5}$$

$n-k$ czynników liniowych $(x - x_i),\ \ i = 1, 2, ..., k,$ i wielomianu $q_{n-k}(x)$ stopnia $n-k$.
Istotnie dla $k = 1$ z tweierdzenia Bezouta wprost wynika iloczyn

$$p_n(x) = (x - x_1)q_{n-1}(x)$$

Stosując powtórnie twierdzenie Bezouta do wielomianu $q_{n-1}(x)$ dla zera x_2 otrzymammy rozkład

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)q_{n-2}(x)$$

Powtarzając zastosowanie twierdzenia Bezouta dla następnych zer wielomianu $p_n(x)$ otrzymamy rozkład (1.5) wielomianu na czynniki liniowe i wielomianu $q_{n-k}(x)$.
Zauważmy, że rozkład wielomianu stopnia $n \geq 1$

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

jest równoważny z rozkładem wielomianu

$$p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

ze współczynnikiem $a_n = 1$, gdyż współczynnik $a_n \neq 0$ zawsze możemy wyciągnąć przed nawias.
Teraz z sformułujemy twierdzenie podstawowe o rozkładzie wielomianu naczynniki nierozkładalne:

Twierdzenie 1.3 *Każdy wielomian*

$$p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

rozkłada się na czynniki liniowe $x - x_0$ *lub czynniki kwadratowe* $x^2 + a_1 x + a_0$ *z wyróżnikiem* $a_1^2 - 4a_0 < 0$ *ujemnym. Ten rozkład jest jednoznaczy.*

Niżej wyliczmy następujące metody rozkładania wielomianów na czynniki:
Sposoby rozkładania wielomianów na czynniki.

1. Rokład trómianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$
2. Wyciąganie wspólnego czynnika przed nawias
3. Sposób grupowania wyrazów
4. Stosowanie wzorów uproszczonego mnożenia
5. Znajdowanie zer wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Przykład 1.16 *Rozłóż na czynniki wielomian kwadratowy*

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Rozwiązanie. Wielomian kwadratowy rozkłada się na czynniki w zależności od znaku wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$. Mianowicie, jeżeli wyróżnik $\Delta \geq 0$ jest nieujemny, wtedy ten trójmian ma dwa pierwiastki rzeczywiste i rozkłada się na czynniki

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ten przypadek obejmuje również pierwiastek podwójny kiedy $\Delta = 0$ i $x_1 = x_2$.
Jeżeli wyróżnik $\Delta < 0$ jest ujemny to trójmian $ax^2 + bx + c$ jest nie rozkładalny i wtedy czynnikiem jest wyrażenie $ax^2 + bx + c$.

Przykład 1.17 *Rozłóż na czynniki następujący wielomian przez grupowanie wyrazów i wyciąganie wspólnego czynnika*

$$p_3(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

Rozwiązanie. Stosujemy kombinacje powyższych sposobów. W tym przypadku grupujemy wyrazy pierwszy i drugi oraz trzeci i czwarty potem wyciągajająamy przed nawias x^2 oraz 4, w ten sosób otrzymamy

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 &= x^2(x-2) - 4(x-2) \\ &= (x-2)(x^2-4) \end{aligned}$$

Dalej, stosując wzór na różnicę kwadratów $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ dostajemy rozkład tego wielomianu na czynniki

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 &= x^2(x-2) - 4(x-2) = (x-2)(x^2-4) \\ &= (x-2)(x-2)(x+2) = (x-2)^2(x+2). \end{aligned}$$

Przykład 1.18 *Rozłóż na czynniki następujący wielomian*

$$p_3(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 10$$

Rozwiązanie. Stosujemy kombinacje powyższych sposobów. W tym przypadku wyciągając przed nawias x^2 oraz 5, otrzymamy

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 10 &= x^2(x+5) + 2(x+10) \\ &= (x+5)(x^2+2) \end{aligned}$$

Ponieważ wyrażenie kwadratowe $x^2 + 2 > 0$ jest wszędzie dodatnie to rozkład tego wielomianu na czynniki

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 10 &= x^2(x+5) + 2(x+10) \\ &= (x+5)(x^2+2) \end{aligned}$$

zawiera czynnik liniowy $x + 5$ i czynnik kwadradratowy $x^2 + 2$, który jest nie rozkładalny.

Przykład 1.19 *Rozłóż na czynniki następujący wielomian*

$$p_4(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$$

Rozwiązanie. W tym przypadku zer wielomianu o współczynnikach całkowitych szukamy wśród dzielników $-2, -1, 1, 2, 3, 4, 6$ wyrazu wolnego $a_0 = -12$.

1. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = -2$ jest zerem tego wielomianu
$$p_4(-2) = (-2)^4 - 4(-2)^3 - (-2)^2 + 16(-2) - 12 = 16 + 32 - 4 - 32 - 12 = 0$$
Zatem $x_0 = -2$ jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik $x + 2$.

2. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = -1$ jest zerem tego wielomianu
$$p_4(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 - (-1)^2 + 16(-1) - 12 = 1 + 4 - 1 - 16 - 12 = -32 \neq 0.$$
Zatem $x_0 = -1$ nie jest zerem tego wielomianu.

3. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = 1$ jest zerem tego wielomianu
$$p_4(1) = (1)^4 - 4(1)^3 - (1)^2 + 16(1) - 12 = 1 - 4 - 1 + 16 - 12 = 0$$
Zatem $x_0 = 1$ jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik $x - 1$.

4. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = 2$ jest zerem tego wielomianu
$$p_4(2) = (2)^4 - 4(2)^3 - (2)^2 + 16(2) - 12 = 16 - 32 - 4 + 32 - 12 = 0$$
Zatem $x_0 = 2$ jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik $x - 2$.

5. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = 3$ jest zerem tego wielomianu
$$p_4(3) = (3)^4 - 4(3)^3 - (3)^2 + 16(3) - 12 = 81 - 108 - 9 + 48 - 12 = 0$$
Zatem $x_0 = 3$ jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik $x - 3$.

Odpowiedź: Rozkład wielomian $p_4(x)$ na czynniki liniowe
$$p_4(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = (x + 2)(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Zadanied 1.15 *Rozłóż na czynniki następujące wielomiany:*

1. *Trójmian kwadratowy*
$$p_2(x) = 2x^2 + 6x + 4$$

2. *Wielomian*
$$p_3(x) = (x^3 - 8) + (x^2 - 4)$$

3. *Wielomian*
$$p_4(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 6$$

1.4.7 Nierówności wielomianowe

W tematach funkcje liniowe i kwadratowe opisane zostały sposoby rozwiązywania nierówności linowych i kwdratowych. Teraz zajmiemy się rozwiązywniem nierówności wyższych stopni $n \geq 3$.
Rozpatrzmy następują nierówność:
$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \geq 0 \qquad n \geq 1, \quad a_n \neq 0.$$

Rozwiązując powyższą nierówność wykonujemy następujące czynności:

1. Rozkładamy ten wielomian na czynniki

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_k)q_{n-k}(x), \quad a_n \neq 0.$$

W powyższym rozkładzie dopuszczamy k pierwiastków rzeczywistych włączając pierwiastki wielokrotne, $x_1, x_2, ..., x_k$. Zauważmy, że jeżeli $k = n$ to wielomian $p_n(x)$ rozkłada sie na czynniki lioniowe i ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste $x_1, x_2, ..., x_n$. Tutaj $q_{n-k}(x)$ jest wielomianem stopnia $n - k$ nie rozkładalnym na czynniki liniowe. To znaczy, że wielomian $q_{n-k}(x)$ zawiera tylko czynniki kwadratowe postaci $x^2 + bx + c$ z wyróżnikiem $\Delta = b^2 - 4c < 0$ ujemnym.

2. Zuważamy, że nierówność

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_k)q_{n-k}(x) \geq 0, \quad a_n \neq 0.$$

jest równoważna z nierównością

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)....(x - x_k)q_{n-k}(x) \geq 0, \quad \text{gdy} \quad a_n > 0,$$

lub z równoważna z nierównością

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)....(x - x_k)q_{n-k}(x) \leq 0, \quad \text{gdy} \quad a_n < 0.$$

Ponieważ obie strony nierówności zawsze możemy podzielić przez liczbę $a_n \neq 0$ różną od zera zachowując kierunek nierówności gdy liczba $a_n > 0$ jest dodatnia i zmieniając zwrot nierówności gdy liczba $a_n < 0$ jest ujemna.

3. Rozwiązanie odczytujemy z wykresu funkcji

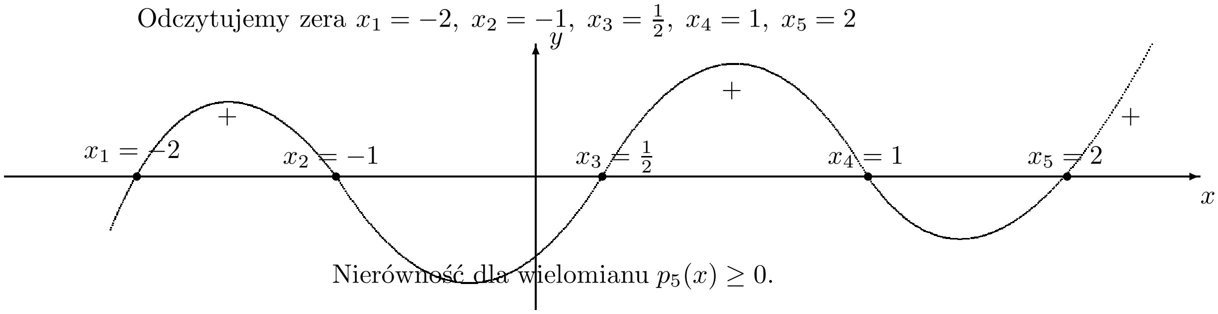
   - Przypadek $a_n > 0$ i wszystkie zera wielomianu $x_1,\ x_2, ..., x_k$ są różne $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.
     Na rysunku przykład nierówności dla wielomianu

     $$p_5(x) = 2x^5 - x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 8x - 4 \geq 0, \quad a_5 = 2 > 0.$$

     Rozkładamy ten wielomian na czynniki

     $$p_5(x) = (x + 2)(x + 1)(x - \frac{1}{2})(x - 1)(x - 2) \geq 0$$

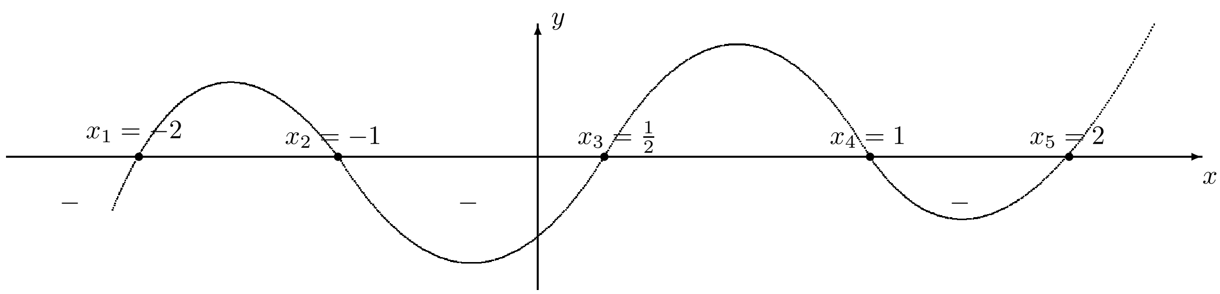
     Odczytujemy zera $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = 1,\ x_5 = 2$



Nierówność dla wielomianu $p_5(x) \geq 0$.

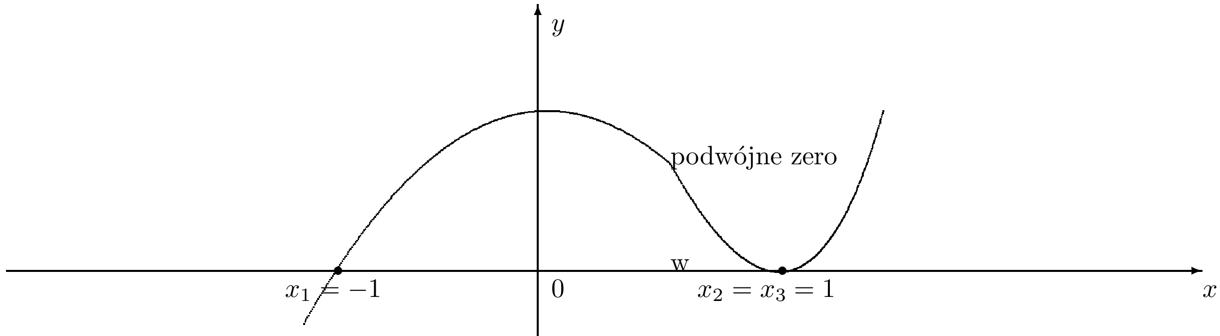
Z rysunku odczytujemy rozwiązanie, to znaczy te przedziały w których wielomian jest nieujemny:
Zatem, nierówność ta jest prawdziwa dla $x \in [-2, -1] \cup [\frac{1}{2}, 1] \cup [2, \infty]$

- Przypadek $a_n < 0$ i wszystkie zera wielomianu $x_1,\ x_2, ..., x_k$ są różne $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.
  Na rysunku przykład nierówności dla wielomianu
  $$p_5(x) = -2x^5 + x^4 + 10x^3 - 5x^2 - 8x + 4 \geq 0, \quad a_5 = -2 < 0.$$
  Rozkładamy ten wielomian na czynniki
  $$p_5(x) = -2(x+2)(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-2) \geq 0$$
  Dzieląc obie strony tej nierówności przez -2, otrzymamy nierówność przeciwną równoważną
  $$p_5(x) = (x+2)(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-2) \leq 0$$
  Odczytujemy zera $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = 1,\ x_5 = 2$ i zaznaczmy te zera na niżej podanym rysunku



Nierówność dla wielomianu $p_5(x) \leq 0$.

  Z rysunku odczytujemy rozwiązanie to znaczy te przedziały w których wielomian jest niedodatni:
  Zatem nierówność ta jest prawdziwa dla $x \in [-\infty, -2] \cup [-1, \frac{1}{2}] \cup [1, 2]$.
- Przypadek gdy wielomian ma wielokrotne zera. Wtedy wykres wielomianu nie przecina osi x, jeżeli krotność jest parzysta $2, 4, 6...$;
  Natomiast, jeżeli krotność jest nie parzysta to wykres wielomianu przcina oś x.
  Przypadek wielokrotnych zer wyjaśnimy na następującym przykładzie:
  Rozwiąż nierówność:
  $$p_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \geq 0$$
  Rozkładamy ten wielomian na czynniki
  $$p_3(x) = (x-1)(x+1)^2 \geq 0$$
  Następnie odczytujemy zera $x_1 = -1$, oraz powdwójne zero $x_2 = 1$. Zaznaczmy te zera na rysunku



Zero podwójne w punkcie $x = 1$.

Z rysunku odczytujemy rozwiązanie to znaczy te przedziały w których wielomian jest nieujemny:
Zatem nierówność ta jest prawdziwa dla $x \in [-1, \infty]$