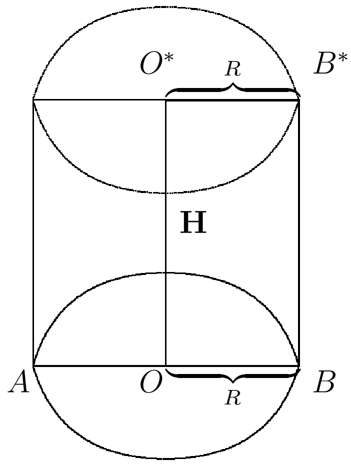
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16



Pole $P_{pow.bocz.} = 2\pi * R * H$

Pole $P_{podstawy} = \pi * R^2$

Pole $P_{pow.cal.} = 2\pi * R * (H + R)$

Objċetośċ $V_{walca} = \pi * R^2 * H$

Geometria przestrzeni. Stereometria [1]

Tadeusz STYŠ

WARSZAWA 2020

[1] Rozdział 19. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.

Contents

Chapter 1

Geometria w przestrzeni. Stereometria

1.1 Wstęp.

Stereometria to geometria figur w przestrzeni. W tym rozdziale zajmiemy się następującymi figurami:

1. Punkty i wektory w przestrzeni.
2. Parametryczne równanie prostej
3. Proste i płaszczyzny w przestrzeni.
4. Graniastosłupy i ostrosłópy, objętość i pole powierzchni.
5. Bryły obrotowe: walec, kula, stożek, objętość i pole powierzchni.

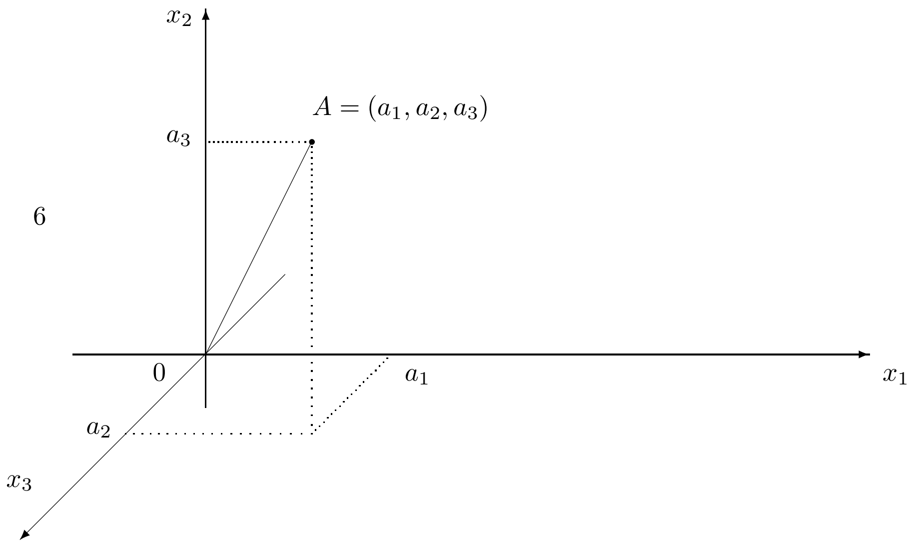
Wśród brył w przestrzeni, wyróżniamy bryły foremne i bryły platońskie. Bryły formne mają wszystkie ściany przystające. Bryły platońskie, do których należą czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan, uważane były w czasach starożytnych w Akademi Platona (427-347, B.C.) za figury idealne.

1.2 Punkty i wektory w przestrzeni

Położenie punktów i wektorów w przestrzeni określamy we współrzędnych kartezjańskich.

1.2.1 Punkty. Kartetezjański układ współrzędnych.

Podobnie jak na płaszczyźnie położenie figur geometrycznych w przestrzeni określamy we współrzędnych kartezjańskich



Na osiach liczbowych o kierunku i zwrocie osi $x_1,\ x_2,\ x_3$ odkładamy współrzędne punktów w przestrzeni kartezjańskiej

$$R^3 = \{(x_1, x_2, x_2):\ -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty.\}$$

Punkt

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

w układzie współrzędnych kartezjańskich x_1, x_2, x_3 ma współrzędne

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = a_3.$$

Na punktach

$$A = (a_1, a_2, a_3) \qquad i \qquad B = (b_1, b_2, b_3)$$

wykonujemy następujące operacje:

- Dodawanie punktów

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1, a_2, , a_3) + (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3). \end{aligned}$$

  Zatem suma punktów

$$A + B = C$$

  jest równa punktowi $C = (c_1, c_2, c_3)$ o współrzędnych

$$c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2, \quad c_3 = a_3 + b_3.$$

- Odejmowanie punktów

$$\begin{aligned} A - B &= (a_1, a_2, , a_3) - (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3). \end{aligned}$$

  Zatem różnica punktów

$$A - B = C$$

  jest równa punktowi $C = (c_1, c_2, c_3)$ o współrzędnych

$$c_1 = a_1 - b_1, \qquad c_2 = a_2 - b_2, \qquad c_3 = a_3 - b_3.$$

- Mnożenie punktu przez liczbę t

$$t * A = t * (a_1, a_2, , a_3) = (t * a_1, t * a_2, t * a_3).$$

  Zatem iloczyn punktu przez liczbę t jest równy punktowi

$$C = (c_1, c_2, c_3)$$

  o współrzędnych

$$c_1 = t * a_1,\ c_2 = t * a_2,\ c_3 = t * a_3.$$

Przykład 1.1 *Niech dane będą punkty* $A = (2, -3, 4)$ *i* $B = (2, -1, 3)$.
Oblicz

$$(i) \quad A + B, \quad (ii) \quad a - b, \quad (iii) \quad 2 * A + 3 * B.$$

Rozwiązanie. Obliczamy

$$\begin{aligned} (i) \ A + B &= (2, -3, 4) + (2, -1, 3) \\ &= (2 + 2, -3 - 1, 4 + 3) \\ &= (4, -4, 7). \\ Odpowiedz: \ A + B &= C, \quad C = (4, -4, 7). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad A - B &= (2, -3, 4) - (2, -1, 3) \\ &= (2 - 2, -3 - (-1), 4 - 3) \\ &= (0, -2, 1) \\ Odpowiedz: \ A - B &= C, \quad C = (0, -2, 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) \quad 2 * A + 3 * B &= 2 * (2, -3, 4) + 3 * (2, -1, 3) \\ &= (2 * 2 + 3 * 2, 2 * (-3) + 3 * (-1), 2 * 4 + 3 * 3) \\ &= (10, -9, 17). \end{aligned}$$

Odpowiedź: $2 * A + 3 * B = C, \quad C = (10, -9, 17)$.

Zadanied 1.1 *Niech dane będą punkty*

$$A = (3, 2, -1), \qquad B = (1, -1, 2).$$

Oblicz

$$(i) \quad A + B, \quad (ii) \quad A - B, \quad (iii) \quad 3 * A + 5 * B.$$

1.2.2 Wektory w przestrzeni

Niech dane będą punkty

$$A = (a_1, a_2, a_3), \qquad B = (b_1, b_2, b_3).$$

Wektor $\vec{AB}$ o paczątku w punkcie

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

i końcu w punkcie

$$B = (b_1, b_2, b_3)$$

określamy jako różnica punktów

$$\vec{AB} = B - A = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3].$$

[1] [2] Na przykład wektor związany o początku w punkcie $A = (0, 1, 3)$ i końcu w punkcie $B = (2, 0, 5)$ ma współrzędne

$$\vec{AB} = B - A = (2, 0, 5) - (0, 1, 3) = [2, -1, 2].$$

[1] Współrzędne v_1, v_2, v_3 wektora swobodnego $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ piszemy w nawiasach kwadrwtowych.

[2] Wektor swobodny określony jest przez jego długość, kierunek i zwrot, nie zależy od położenia na płaszczyźnie.

Dodawanie wektorów
Suma dwóch wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

równa jest wektorowi

$$\vec{z} = [z_1, z_2, z_3] = [v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3]$$

o współrzędnych

$$z_1 = v_1 + w_1, \quad z_2 = v_2 + w_2, \quad z_3 = v_3 + w_3.$$

Przykład 1.2 *Oblicz sumę wektorów*

$$\vec{v} = [1, 2, 1] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1, 2]$$

Rozwiązanie. Suma

$$\vec{v} + \vec{w} = [1, 2, 1] + (2, 1, 2) = [1 + 2, 2 + 1, 1 + 2] = [3, 3, 3]$$

Opowiedź: Sumą danych punktów $\vec{v} = [1, 2, 1]$ i $\vec{w} = [2, 1, 2]$ jest wektor $\vec{z} = [3, 3, 3]$.
Odejmowanie wektorów
Różnica dwóch wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

równajest wektorowi

$$\vec{z} = [z_1, z_2, z_3] = \vec{v} - \vec{w} = [v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3]$$

o współrzędnych

$$z_1 = v_1 - w_1 \quad i \quad z_2 = v_2 - w_2, \quad z_3 = v_3 - w_3.$$

Przykład 1.3 *Oblicz różnice wektorów*

$$\vec{v} = [1, 2, 6] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1, 5]$$

Rozwiązanie. Obliczamy różnicę wektorów

$$\vec{v} - \vec{w} = [1, 2, 6] - [2, 1, 5] = [1 - 2, 2 - 1, 6 - 5] = [-1, 1, 1]$$

Opowiedź: Wynikiem odejmowania danych wektorów $\vec{v} = [1, 2, 6]$ i $\vec{w} = [2, 1, 5]$ jest wektor $\vec{z} = [-1, 1, 1]$.

1.2.3 Iloczyn skalarny wektorów

[3] Iloczyn skalarny wektorów jest ważną operacją na wektorach stosowaną w matematyce stosowanej, w fizyce, chemii i w innych przedmiotach ścisłych.

Definition 1.1 *Iloczynem skalarnym wektorów* $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ *i* $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ *nazywamy liczbę*

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + v_3 * w_3$$

[3] Wielokość skalarna to znaczy wielkość określona liczbą

Zatem, iloczyn skalarny wektorów nie jest wektorem, natomiast jest liczbą

Przykład 1.4 *Oblicz iloczyn skalarny wektorów*

$$\vec{v} = [2, 5, 3] \quad i \quad \vec{w} = [7, 3, -2]. \tag{1.1}$$

Rozwiązanie. Stosując wzór (1.1) obliczamy iloczyn skalarny danych wektorów, piszemy

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w}) &= ([2, 5, 3] * [7, 3, -2]) \\ &= 2 * 7 + 5 * 3 + 3 * (-2) = 14 + 15 - 6 = 23. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Iloczyn skalarny danych wektorów $\vec{v} = [2, 5, 3]$ i $\vec{w} = [7, 3, -2]$ jest liczbą 23, piszemy

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 23.$$

Iloczyn skalarny wektorów zachowuje wszystkie własności operacji arytmetycznej mnożeni. Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

- iloczn skalarny jest przemienny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{v})$$

  Istotnie, sprawdzamy,że

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w}) &= v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + v_3 * w_3 \\ &= w_1 * v_1 + w_2 * v_2 + w_3 * v_3 \\ &= (\vec{w}, \vec{v}) \end{aligned}$$

- mnożenie skalarne wektorów jest rozdzielne względem dodawania

$$(\vec{v}, (\vec{w} + \vec{z})) = (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{z})$$

  Istotnie sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w} + \vec{z}) &= v_1 * (w_1 + z_1) + v_2 * (w_2 + z_2) + v_3(w_3 + z_3) \\ &= v_1 * w_1 + v_1 * z_1 + v_2 * w + 2 + v_2 * z_2 + v_3 * w_3 + v_3 * z_3 \\ &= \underbrace{v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + v_3 * z_3}_{(\vec{v}, \vec{w})} + \underbrace{v_1 * z_1 + v_2 * z_2 + v_3 * z_3}_{(\vec{v}, \vec{z})} \\ &= (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{z}) \end{aligned}$$

- Iloczyn skalarny wektora $\vec{v}$ przez siebie równy jest kwadratowi jego długości

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{v}) &= v_1 * v_1 + v_2 * v_2 + v_3 * v_3 \\ &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = |\vec{v}|^2. \end{aligned}$$

Teraz podamy ważne twierdzenie w postaci warunku dostatecznego i koniecznego

Twierdzenie 1.1 .
Warunek dostateczny: Jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest równy zero to wektory $\vec{v}$, $\vec{w}$ są prostopadłe, piszemy

$$\vec{v} \perp \vec{w}$$

Warunek konieczny: Jeżeli wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe

$$\vec{v} \perp \vec{w}$$

to ich iloczyn sklarny jest równy zero

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Razem warunek konieczny i dostateczny piszmy w symbolach

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Longleftrightarrow (\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Istnieje kilka dowodów tego twierdzenia. Tutaj podamy dowód oparty na twierdzeniu Pitagorasa. Mianowicie, udowodnimy, że trójkąt o ramionach $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Dowód warunku dostatecznego. Zakładamy, że iloczyn skalarny wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest równy zero

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Udowodnimy, że wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe.
Obliczamy kwadrat długości różnicy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$

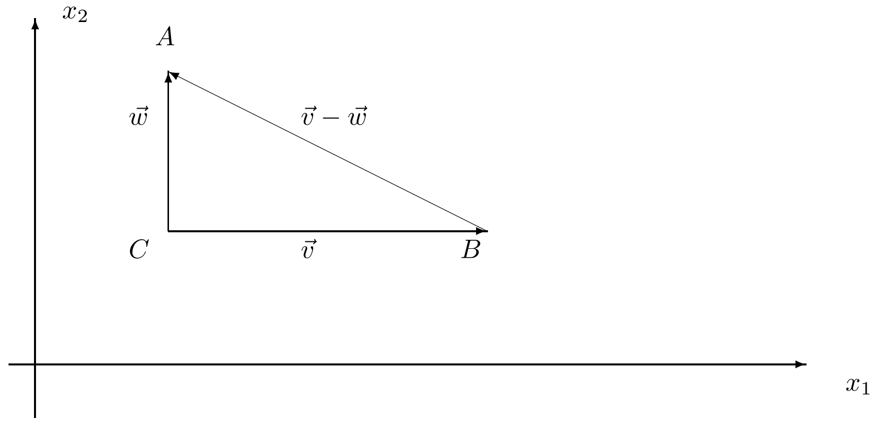
$$\begin{aligned} |\vec{v} - \vec{w}|^2 &= (\vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) \\ &= (\vec{v}, \vec{v}) - 2(\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{w}) \\ &= |\vec{v}|^2 - 2(\vec{v}, \vec{w}) + |\vec{w}|^2 \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

to boki trójkąta ΔABC

$$|AB| = |\vec{v}|, \qquad |AC| = |\vec{w}|, \qquad |BC| = |\vec{v} - \vec{w}|$$



spełniają równość

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = |v \vec{-} w|^2 \tag{1.2}$$

Z drugiej strony z twierdzenia Pitagorasa wynika, że suma kwadratów dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości boku trzeciego (cf. (1.2)) wtedy i tylko wtedy, jeżeli ten trójkąt jest prostokątny.
Zatem kąt $\angle ACB$ pomiędzy wektorami $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest prosty, jeżeli iloczyn skalarny tych wektorów równy jest zero. Koniec dowodu warunku dostatecznego.
Dowód warunku koniecznego. Zauważmy, że wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe.

$$\vec{v} \perp \vec{w}.$$

Udowodnimy, że iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

W tym celu obliczmy poraz drugi kwadrat dłudości różnicy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

$$\begin{aligned} |\vec{v}-\vec{w}|^2 &= (\vec{v}-\vec{w}, \vec{v}-\vec{w}) \\ &= (\vec{v}, \vec{v}) - 2(\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{w}) \\ &= |\vec{v}|^2 - 2(\vec{v}, \vec{w}) + |\vec{w}|^2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Z założenia wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe. Zatem boki AB i AC trójkąta ΔABC są prostopadłe. Wobec tego trójkąt ΔABC jest trójkątem prostym.
Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że kwadrat długości przeciwprostokątnej $[B, C]$ równy jest sumie kwadratów długości przyprostokątnych $[A, B]$ i $[A, C]$, piszemy

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 \quad lub \quad |\vec{v}-\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2, \tag{1.4}$$

gdzie

$$|AB| = |\vec{v}|, \quad |AC| = |\vec{w}|, \quad |BC| = |\vec{v}-\vec{w}|.$$

Z równości (1.3) i (1.4) wynika równość stron

$$\begin{aligned} &|\vec{v}-\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 - 2(\vec{v}, \vec{w}) + |\vec{w}|^2 \\ &|\vec{v}-\vec{w}|^2 = \vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2, \\ &|\vec{v}|^2 - 2(\vec{v}, \vec{w}) + |\vec{w}|^2 = \vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2, \\ &-2(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \end{aligned}$$

Zatem iloczyn skalarny wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest równy zero

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0,$$

jeżeli wektory $\vec{v} \perp \vec{w}$ są prostopadłe. Koniec dowodu warunku koniecznego. [4]

[4] Iloczyn skalarny $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$, wtedy i tylko wtedy, jeżeli $\vec{v} \perp \vec{w}$, w symbolach piszemy

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Longleftrightarrow (\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Przykład 1.5 *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [6, 8, 0], \quad \vec{w} = [9, 12, 0].$$

Rozwiązanie. Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzòr (1.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = [6, 8, 0], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = [9, 12, 0]$$

Zatem iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 6 * 9 + 8 * 12 + 0 * 0 = 54 + 96 = 150.$$

równy jest 100.
Wiemy, że kwadrat długości wektora $\vec{v} = [6, 8, 0]$ jest równy iloczynowi skalarnemu tego wektora przez siebie.

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = 6 * 6 + 8 * 8 + 0 * 0 = 36 + 64 = 100$$

Skąd długość wektora

$$|\vec{v}| = \sqrt{100} = 10.$$

Podobnie obliczamy długość wektora $\vec{w} = [9, 12, 0]$

$$\begin{aligned} |\vec{w}| &= \sqrt{(\vec{w}, \vec{w})} \\ &= \sqrt{9 * 9 + 12 * 12 + 0 * 0} \\ &= \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15. \end{aligned}$$

Przykład 1.6 *Dla jakiej wartości parametru m wektory*

$$\vec{v} = [m, 6, 3], \quad \vec{w} = [3, 2, 4].$$

są prostopadłe?

Rozwiązanie. Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzòr (1.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [m, 6, 3], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2] = [3, 2, 4]$$

Wektory są prostopadłe jeżeli ich iloczyn skalarny równy jest zero. Obliczamy iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = m * 3 + 6 * 2 + 3 * 4 = 3m + 24 = 0.$$

Skąd iloczyn skalarny równy jest zero

$$6m + 24 = 0, \quad dla \quad m = -\frac{24}{3} = -8.$$

Istotnie sprawdzamy, że dla $m = -8$ iloczyn skalarny wektora $\vec{v} = [m, 6, 3]$ przez wektor $\vec{w} = [3, 2, 4]$ równy jest zero

$$(\vec{v}, \vec{w}) = -8 * 3 + 6 * 2 + 3 * 4 = 24 - 24 = 0$$

Odpowiedź: Wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = [m, 6, 3], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = [3, 2, 4]$$

są prostopadłe dla parametru $m = -8$.

Zadanie 1.1 *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [12, 16, 0], \quad \vec{w} = [15, 20, 0].$$

Zadanie 1.2 *Dla jakiej wartości parametru m wektory*

$$\vec{v} = [m, 15, 2], \quad \vec{w} = [5, 3, 4].$$

są prostopadłe?

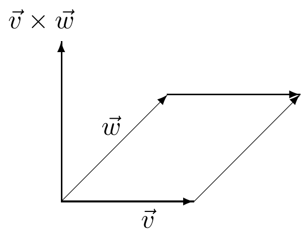
1.2.4 Iloczyn wektorowy w przestrzen tròjwymiarowej R^3

Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad i \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

w przestrzeni tròjwymiarowej

$$R^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : \ -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty \ \}$$



Wynikiem mnożenia wektorowego wektora $\vec{v}$ przez wektor $\vec{w}$ jest trzeci wector $\vec{v} \times \vec{w}$, ktòrego wpòłrzędne obliczamy z rozwinięcia Laplace'a macierzy utworzenej ze wspòłrzędnych wektorów

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \right\}$$

Mianowicie iloczyn

$$\vec{v} \times \vec{w} = [Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\}, -Det(\left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right\}), Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right\}]$$

gdzie wyznaczniki -determinants

$$Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\} = v_2 * w_3 - v_3 * w_2,$$

$$-Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right\} = -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1),$$

$$Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right\} = v_1 * w_2 - v_2 * w_1$$

Skąd otzymamy wzòr na wspòłrzędne iloczynu wektorowy

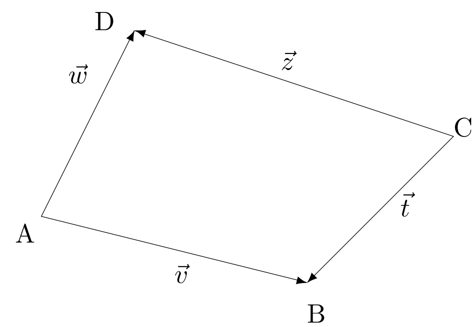
$$\vec{v} \times \vec{w} = [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]. \tag{1.5}$$

Wektor $\vec{v} \times \vec{w}$ jest prostopadły do wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$, a jego o długość równa jest polu równoległoboku o bokach $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Zatem długość wektora

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{|v_2 * w_3 - v_3 * w_2|^2 + |-(v_1 * w_3 - v_3 * w_1)|^2 + |v_1 * w_2 - v_2 * w_1|^2}$$

1.2.5 Pole czworokąta. Przykłady

Rozpatrzymy czworokąt $ABCD$



o wierzchołkach

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3)$$
$$C = (c_1, c_2, c_3), \quad D = (d_1, d_2, d_3)$$

rozpięty na wektorach

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = \vec{AD},$$
$$\vec{z} = [z_1, z_2, z_3] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [t_1, t_2, t_3] = \vec{CD},$$

gdzie współrzędne wektorów $\vec{v},\ \vec{w},\ \vec{z},\ \vec{t}$ określamy przez różnice współrzędnych wierzchołków A, B, C, D czworokąta $ABCD$

$$\begin{array}{lll} v_1 = b_1 - a_1, & v_2 = b_2 - a_2, & v_3 = b_3 - a_3, \\ w_1 = d_1 - a_1, & w_2 = d_2 - a_2, & w_3 = d_3 - a_3, \\ z_1 = b_1 - c_1, & z_2 = b_2 - c_2, & z_3 = b_3 - c_3, \\ t_1 = d_1 - c_1, & t_2 = d_2 - c_2, & t_3 = d_3 - c_3. \end{array}$$

Stosując iloczyn wektorowy (cf. (1.5)) możemy obliczyć pole dowolnego czworokąta o danych współrzędnych jego wierzchołków. Mianowicie, pole czworokąta $ABCD$ równe jest połowie iloczynu wektorowego wektorów

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{z} \times \vec{t}$$

Przykład 1.7 *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [3, 0, 0] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [0, 3, 0] = \vec{AD},$$
$$\vec{z} = [0, -6, 0] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [-3, -3, 0] = \vec{CD}$$

Iloczyn wektorowy

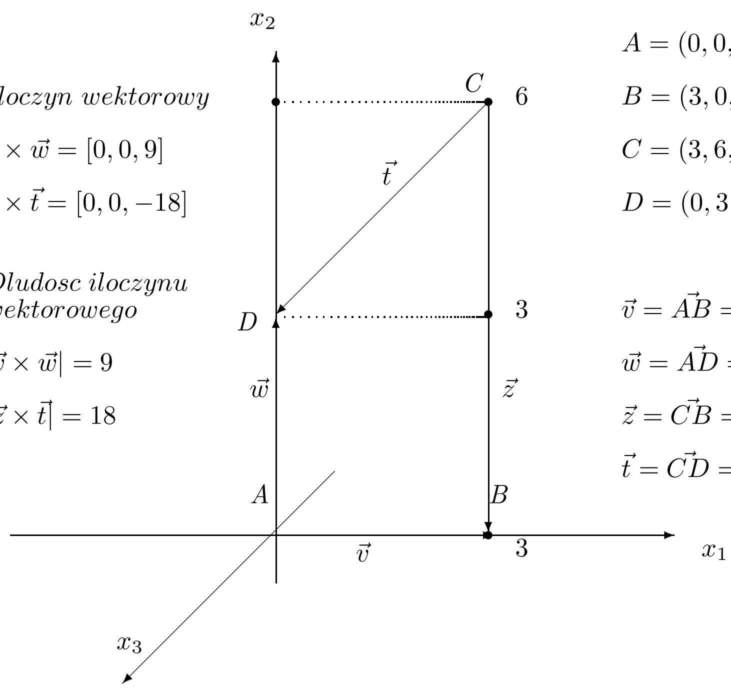
$\vec{v} \times \vec{w} = [0, 0, 9]$

$\vec{z} \times \vec{t} = [0, 0, -18]$

Dludosc iloczynu wektorowego

$|\vec{v} \times \vec{w}| = 9$

$|\vec{z} \times \vec{t}| = 18$



$A = (0, 0, 0)$

$B = (3, 0, 0)$

$C = (3, 6, 0)$

$D = (0, 3, 0)$

$\vec{v} = \vec{AB} = [3, 0, 0]$

$\vec{w} = \vec{AD} = [0, 3, 0)$

$\vec{z} = \vec{CB} = [0, -6, 0]$

$\vec{t} = \vec{CD} = [-3, -3, 0]$

Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{z} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (**??**))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 3 * 0, -(3 * 0 - 0 * 0), 3 * 3 - 0 * 0] \\ &= [0, 0, 9] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{z} \times \vec{t} &= [-6 * 0 - 3 * 0, -(0 * 0 - 3 * 0), 0 * 3 - 6 * 3] \\ &= [0, 0, -18] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$ i $\vec{z}$, $\vec{t}$.
Mianowicie

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{z} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 9^2} + \frac{1}{2}|\sqrt{0^2 + 0^2 + (-18)^2} \\ &= \frac{1}{2} * 9 + \frac{1}{2} * 18 \\ &= 4.5 + 9 = 13.5 \end{aligned}$$

[5]

Rozpatrzmy inny przykład obliczania pola czworokąta stosując iloczyn wektorowy.

[5] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 w przestrzeni kartezjńskiej R^3 obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

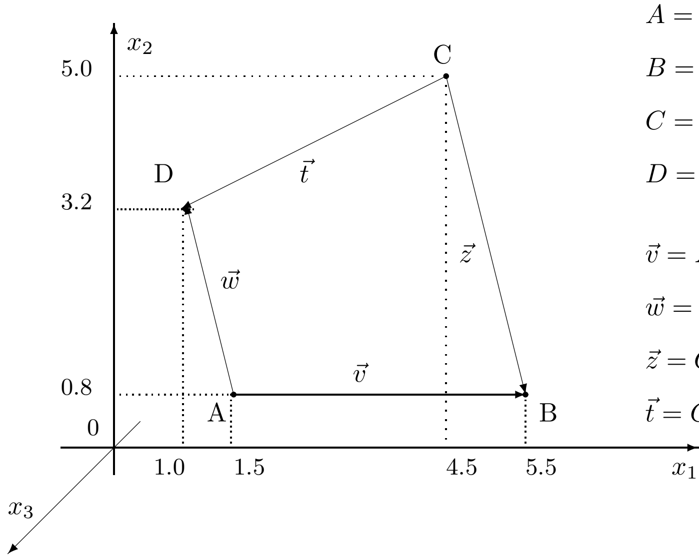
Przykład 1.8 *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [4.0, 0, 0] = \vec{AB},$$

$$\vec{w} = [-0.5, 2.4, 0] = \vec{AD},$$

$$\vec{z} = [-1.0, 4.2, 0] = \vec{CB},$$

$$\vec{t} = [-3.5, -1.8, 0] = \vec{CD}$$



$$A = (1.5, 0.8, 0)$$

$$B = (5.5, 0.8, 0)$$

$$C = (4.5, 5.0, 0)$$

$$D = (1.0, 3.1, 0)$$

$$\vec{v} = \vec{AB} = [4.0, 0, 0]$$

$$\vec{w} = \vec{AD} = [-0.5, 2.4, 0)$$

$$\vec{z} = \vec{CB} = [-1.0, 4.2, 0]$$

$$\vec{t} = \vec{CD} = [-3.5, -1.8, 0]$$

Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{z} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (**??**))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 0 * 2.4, -(4 * 0 + 0.5 * 0), 4 * 2.4 + 0.5 * 0] \\ &= [0, 0, 9.6] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{z} \times \vec{t} &= [4.2 * 0 + 1.8 * 0, -((-1) * 0 - (-3.5) * 0), 1 * 1.8 + 4.2 * 3.5] \\ &= [0, 0, 16.5] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$ i $\vec{z}$, $\vec{t}$.
Mianowicie

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{z} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 9.6^2} + \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 16.5^2} \\ &= \frac{1}{2} * 9.6 + \frac{1}{2} * 16.5 \\ &= 4.8 + 8.25 = 13.05 \end{aligned}$$

[6]

[6] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 w przestrzeni kartezjńskiej R^3 obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

1.2.6 Parametryczne równanie prostej w przestrzeni

Proste operacje na punktach i wektorach w przestrzeni prowadzą do parametrycznego określenia równania prostej.
Mianowicie, rozpatrzmy dwa punkty

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad A = (b_1, b_2, b_3),$$

i wektor

$$\vec{AB} = B - A.$$

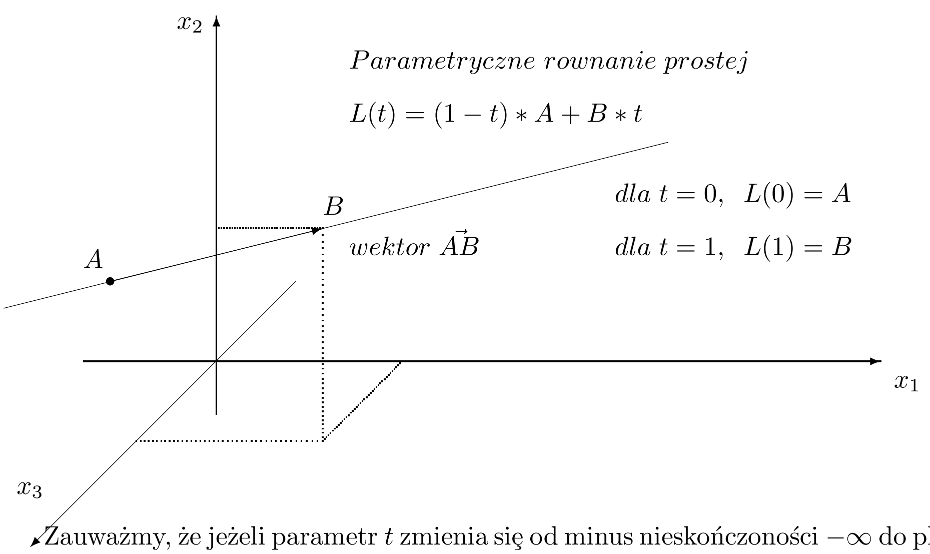
Wtedy łatwo piszemy równanie parametryczne prostej L

$$L(t) = A + t * \vec{AB}$$

lub

$$L(t) = (1 - t) * A + B * t.$$

Tutaj parametrem jest liczba t przebiegająca cały zbiòr liczb rzeczywisty od minus nieskonoczności do plus nieskonoczności, piszemy $-\infty < t < \infty$.



Zauważmy, że jeżeli parametr t zmienia się od minus nieskończoności $-\infty$ do plus nieskończoności ∞, to punkt $L(t)$ poruszasza się wzdłuż prostej L.
Parametryczne równanie prostej, wyrażamy również w terminach danych punktów A i B. Ponieważ wektor $\vec{AB} = B - A$, to równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty A i B ma następującą postać:

$$\begin{aligned} & L(t) = A + (B - A) * t, \\ \text{lub} \quad & L(t) = A + \vec{AB} * t, \\ \text{lub} \quad & L(t) = (1 - t) * A + B * t, \quad -\infty < t < \infty. \end{aligned}$$

Przykład 1.9 *Napisz parametryczne równanie prostej*

(i) o początku w punkcie $A = (1, 2, -1)$ *i kierunku wektora* $\vec{v} = [2, -1, 4]$

(ii) przechodzącej przez punkty $A = (1, -1, 2)$ i $B = (2, 1, 2)$

Rozwiązanie.

(i) Podstawiamy dane:

1. punkt $A = (1, -1, 2)$ i wektor $\vec{v} = (2, -1, 4)$ do ogólnego równania

$$\begin{aligned} L(t) &= A + t * \vec{v} \\ &= (1, -1, 2) + t * (2, -1, 4) \\ &= (1 + 2t, -1 - t, 2 + 4t). \end{aligned}$$

Odpowiedź: $L(t) = (1 + 2t, -1 - t, 2 + 4t), \quad -\infty < t < \infty.$

(ii) Podstawiamy dane: punkt $a = (1, -1, 2)$ i punkt $B = (2, 1, 2)$ do ogólnego równania

$$\begin{aligned} L(t) &= (1 - t)A + t * B = (1 - t)(1, -1, 2) + t * (2, -1, 4) \\ &= ((1 - t) + 2t, (1 - t) - t, 2(1 - t) + 4t) \\ &= (1 + t, 1 - 2t, 2 + 2t) \end{aligned}$$

Odpowiedź: $L(t) = (1 + t, 1 - 2t, 2 + 2t), \quad -\infty < t < \infty.$

Zadanied 1.2 *Napisz parametryczne równanie prostej*

(i) o początku w punkcie $A = (0, 1, -1)$ i kierunku wektora $\overrightarrow{v} = [2, 1, 3]$

(ii) przechodzącej przez punkty $A = (3, 1, 2)$ i $B = (0, 2, 2)$

1.3 Graniastosłupy

Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany, zwane podstawami, są przystajęcymi wielokątami leżącymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany są równoległobokami. Wśród graniastosłupów, wyróżniami postopadłościany proste i prostopadłościany pochyłe.

1.3.1 Sześcian foremny

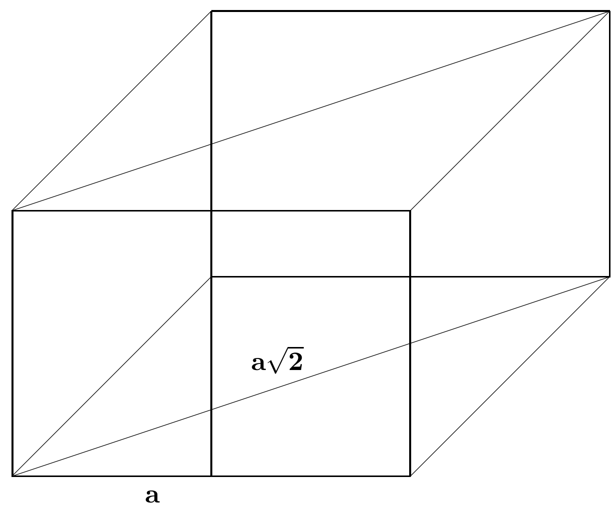
Sześcian foremny jest prostopadłościanem, który ma wszystkie sześć ścian kwadratami o boku a.

Powierzchnia $P_c = 6a^2$

Ojetošč $V = a^3$

Przekątna podstawy $= a\sqrt{2}$

Przekątna szešcianu $= a\sqrt{3}$



Szešcian Foremny

W sposób oczywisty znajdujemy, że

Pole powierzchni calkowitej	$P_c = 6a^2.$
Objetosc	$V_c = a^3.$
Przekatna podstawy	$d_p = a\sqrt{2}.$
Przekatna szescianu	$d = a\sqrt{3}.$

Przykład 1.10 *Dla sześcianu o boku $a = 4$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu,

(ii) objętość sześcianu.

(iii) przekątną podstawy sześcianu.

(iv) przekątna sześcianu.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów, obliczamy

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu $P_c = 6a^2 = 6 * 4^2 = 96$,

(ii) objętość sześcianu $V_c = a^3 = 4^3 = 64$.

(iii) przekątną podstawy sześcianu $d_p = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

(iv) przekątna sześcianu $d = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Zadanied 1.3 *Dla sześcianu o boku $a = 5$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu,

(ii) objętość sześcianu.

(iii) przekątną podstawy sześcianu.

(iv) przekątna sześcianu.

1.3.2 Prostopadłościan o podstawie prostokąta

Prostopadłościan o podstawie prostokąta o wymiarach podstawy a, b i wysokości h ma pole powierzchni całkowitej składające się z dwóch podstaw i czterech ścian bocznych.

$$P_c = 2a * b + 2a * h + 2b * h.$$

Objętość prostopadłościanu obliczamy z prostego wzoru

$$V = a * b * h$$

Przykład 1.11 *Dla prostopadłościanu o podstawie prostokąta o wymiarach $a = 4$, $b = 5$ i wysokości $h = 6$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu,

(ii) objętość prostopadłościanu.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów, obliczamy

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu

$$P_c = 2a * b + 2a * h + 2b * h = 2 * 4 * 5 + 2 * 4 * 6 + 2 * 5 * 6 = 148.$$

(ii) objętość prostopadłościanu $V = a * b * h = 4 * 5 * 6 = 120$.

Zadanied 1.4 *Dla prostopadłościanu o podstawie prostokąta o wymiarach $a = 2$, $b = 3$ i wysokości $h = 5$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu,

(ii) objętość prostopadłościanu.

1.3.3 Graniastosłup o podstawie trójkąta równobocznego

Prostopadłościan o podstawie trójkąta równobocznego o boku a ma ściany prostokątne o wymiarach $a \times h$, gdzie h jest wysokością tego prostopadłościanu.

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu $P_c = 2 * \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

(ii) objętość prostopadłościanu $V_c = h * \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Przykład 1.12 *Dla prostopadłościanu o boku podstawy trójkąta równobocznego $a = 2$, i wysokości $h = 4$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość sześcianu.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów na całkowitą powierzchie i objętość oblicamy

(i) pole całkowitej powierzchni $P_c = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$.

(ii) objętość sześcianu $V_c = h * \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4 * \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$.

Zadanied 1.5 *Dla prostopadłościanu o boku podstawy trójkąta równobocznego $a = 3$, i wysokości $h = 2$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość sześcianu.

1.3.4 Graniastosłup o podstawie sześciokąta foremnego

Powierzchnia całkowita i objętość graniastosłupa o podstawie sześciokąta foremnego składa się z dwóch podstaw i sześciu ścian. Łatwo obliczamy pole całkowitej powierzchni i ojętość graniastosłupa o podstawie sześciokąta formnego znając bok podstawy a i wysokość h. Mianowicie, mamy następujące wzory:
Pole podstawy składa się z pól 6-ciu trójkątów róocznych

$$P_t = 6 * \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Pole całkowite prostopadłościanu o podstawie sześciokąta foremnego

$$P_c = 2P_t + 6 * a * h = 12\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6a * h, \quad P_c = 3a^2\sqrt{3} + 6a * h.$$

Objętość prostopadłościanu o pdstawie sześciokąta foremnego

$$V == 3a^2\sqrt{3} * h.$$

Przykład 1.13 *Dla prostopadłościanu o podstawie sześciokąta foremnego o boku $a = 2$ wysokości $h = 4$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów na całkowitą powierzchie i objętość, oblicamy

(i) pole całkowitej powierzchni $P_c = 3a^2\sqrt{3} + 6a * h = 3 * 2^2\sqrt{3} + 6 * 2 * 4 = 12\sqrt{3} + 48$.

(ii) objętość sześcianu $V = P_c * h = 3a^2\sqrt{3} * h = 3 * 2^2\sqrt{3} * 4 = 48\sqrt{3}$.

Zadanied 1.6 *Dla prostopadłościanu o podstawie sześciokąta foremnego o boku $a = 4$ wysokości $h = 5$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość.

1.4 Ostrosłupy

Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego podstawą jest dowolny wielokąt a ściany boczne są trójkąmi o wspólnym wierzchołku. Wśród ostrosłupów wyróżniamy ostrosłupy foremne, których podstawą jest wielokąd foremny i spodek wysokości leży w środku okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.

1.4.1 Czworościan foremny

Czworościan foremny ma wszystkie cztery ściany, które są trójkątami równobocznymi. Zatem, kąty ścian mają 60^o lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{3}$ radianów. Pole powierzchni każdej ze ścian $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, gdzie a oznacza długość każdej z krawędzi czworościanu.
Pole powierzchni całkowitej czwrościanu foremnego równa się czterem razy pole powierzchni jednej ze ścian.

$$P_c = a^2\sqrt{3}.$$

Krawędź l czworościanu obliczamy z twierdzenia Pitagorasa. Mianowicie, wiemy, że wysokość ściany bocznej $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Jej spodek leżey w połowie krawędzi podstawy $\frac{a}{2}$. Zatem obliczamy

$$l^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2 = (\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{a^2}{4}$$

Objętość czworościanu formnego równa jest jednej trzeciej pola podstawy razy wysokość H

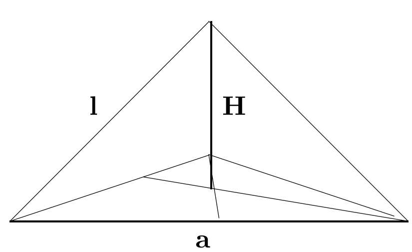
$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} * H$$

Wysokość H obliczamy w zależności od danej krawędzi a. Mianowicie, spodek wysokości h ściany bocznej leży na przecięciu wysokości podstawy w punkcie odległym od wierzchołka trójkąta o $\frac{2}{3}h = \frac{2}{3} * \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Krawędź czworościanu $l = a$. Z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy wysokość czworościanu

$$H^2 = a^2 - (\frac{2}{3}h)^2 = a^2 - (\frac{2}{3} * \frac{a\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{2}{3}a^2, \quad H = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Zatem ojętość czworościanu

$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} * H = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} * a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$



Czworościan Foremny $P_c = a^2\sqrt{3}$, $V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$

1.4.2 Ostrosłup prawidłowy o podstawie kwadratu

Oznaczenia:

- a bok kwadratu w podstawie ostrosłupa
- H wysokość ostrosłupa
- h wysokość ściany bocznej ostrosłupa
- l krawędź boczna ostrosłupa
- P_a pole podstawy ostrosłupa
- P_0 pole ściany bocznej ostrosłupa
- P_c pole powierzcni całkowitej ostrosłupa
- V objętość ostrosłupa

Jasne, że pole podstawy ostrosłupa foremnego równa się polu kwadratu $P_a = a^2$ o boku a. Pole pobocznicy ostrosłupa foremnego P_l równe jest polu czterech trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości **h**. Natomiast, pole ściany bocznej ostrosłupa P_0 równe jest polu trójkąta równoramiennego o podstwie a i wysokości h.

$$P_0 = \frac{1}{2}a * h.$$

Wysokść ściany bocznej wyrażamy w zależności od boku a i krawędzi l. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa oblicamy wysokość

$$h^2 = l^2 - (\frac{a}{2})^2, \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Wtedy pole ściany bocznej

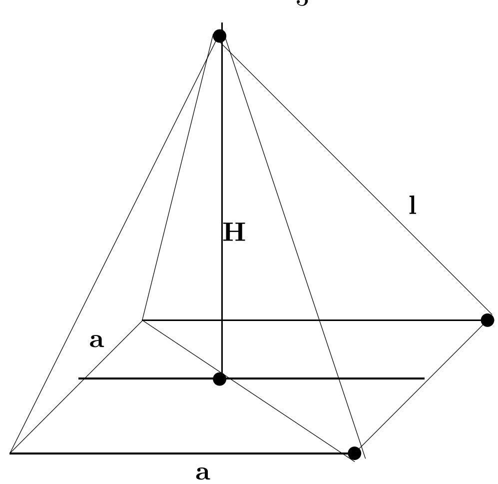
$$P_0 = \frac{1}{4}a * \sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Pole całkowitej powierzchni ostrosłupa równe jest polu czterech trójkątów w podstawie o boku a plus pola cztery trójkątów równoramiennych o podstawie a i ramionach l.
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa foremnego

$$P_c = a^2 + 4P_0, \qquad P_c = a^2 + a\sqrt{4l^2 - a^2}$$

i objętość ostrosłupa foremnego

$$V = \frac{1}{3}a^2 * H$$



Ostrosłup Foremny o Podstawie Kwadratu $\mathbf{P_c = a^2 + a\sqrt{4l^2 - a^2}}$, $\mathbf{V = \frac{1}{3}a^2 * H}$

1.4.3 Ostrosłup foremny o podstawie sześciokąta

Oznaczenia:

- a bok sześciokąta w podstawie ostrosłupa
- H wysokość ostrosłupa
- h wysokość ściany bocznej ostrosłupa
- l krawędź boczna ostrosłupa
- P_a pole podstawy ostrosłupa
- P_0 pole ściany bocznej ostrosłupa
- P_c pole powierzcni całkowitej ostrosłupa
- V objętość ostrosłupa

Jasne, że pole podstawy ostrosłupa foremnego równa się polu P_a sześciokąta foremnego o boku a

$$P_a = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Pole pobocznicy ostrosłupa foremnego P_l równe jest polu sześciu trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości **h**. Pole ściany bocznej ostrosłupa P_0 równe jest polu trójkąta równoramiennego o podstwie a i wysokości h.

$$P_0 = \frac{1}{2}a * h.$$

Wysokść ściany bocznej wyrażamy w zależności od boku a i krawędzi l. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa oblicamy wysokość

$$h^2 = l^2 - (\frac{a}{2})^2, \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Wtedy pole ściany bocznej

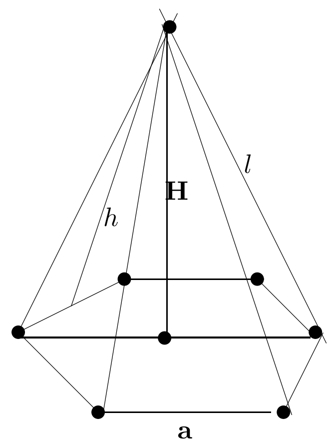
$$P_0 = \frac{1}{4}a * \sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Pole całkowitej powierzchni ostrosłupa równe jest polu sześciokąta foremnego w podstawie o boku a plus pola sze{sciu trójkątów równoramiennych o podstawie a i ramionach l.
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa foremnego

$$P_c = P_a + 6P_0, \qquad P_c = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{4}a\sqrt{4l^2 - a^2} \qquad P_c = \frac{3}{2}[a^2\sqrt{3} + a\sqrt{4l^2 - a^2}].$$

i objętość ostrosłupa foremnego

$$V = \frac{1}{3}\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} * H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} * H$$



Ostrosłup $P_c = \frac{3}{2}[a^2\sqrt{3} + a\sqrt{4l^2 - a^2}],\ V = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3} * H$

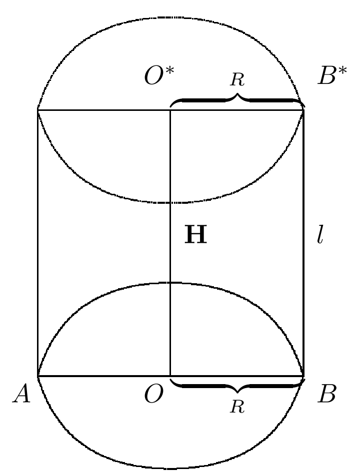
1.5 Bryły obrotowe

Wśród brył obrotowych wyróżniamy walec, stożek i kulę.

1.5.1 Walec

Walec powstaje z obrotu prostokąta wokół jednego z jego boków. Prosty kształt walca prowadzi do oczywistych wzorów na jego całkowitą powierzchnie i objętość.

Na niżej podanym rysunku mamy zaznaczony promień r i wysokość h walca o średnicy podstawy $AB = 2R$ oraz promirniu gòrnej podstawy $O^*B^* = R$. Literami O^* i B^* oznaczone są środki okręgów w dolnej i gòrnej podstawie.



Powierzchnia całkowita walca wyrażona jest przez promień R i wysokość H.

$$P_c = 2\pi RH.$$

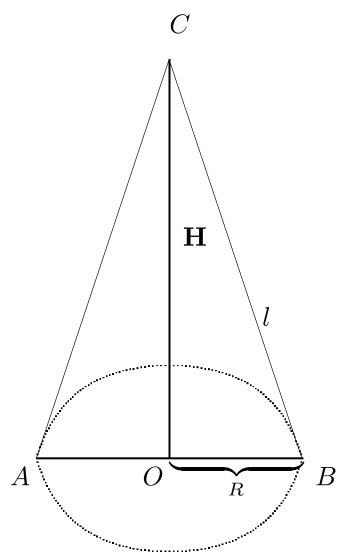
i objętość walca

$$V = \pi R^2\, H.$$

1.5.2 Stożek

Stożek powstaje z obrotu trójkąta prostokątnego wokół jednej z jego przyprostokątnych.
Oznaczenia:

- R promień podstawy stożka
- l tworząca stożka
- H wysokść stożka
- średnica $AB = 2R$ podstawy stożka
- środek O podastawy stożka o wierzchołku C
- P_l powierzchna boczna stożka
- P_c powierzchnia całkowita stożka
- V objętość stożka



- powierzchnia podstawy stożka $P_0 = \pi R^2$,
- powierzchna boczna stożka $P_l = 2\pi R\, l$
- powierzchnia całkowita stożka $P_c = \pi R(R + H)$
- objętość stożka $\dfrac{1}{3}\pi R^2 H$.

1.5.3 Kula

Kula o środku O promieniu R ma powierzchnie $P = 4\pi R^2$ i objętość $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$