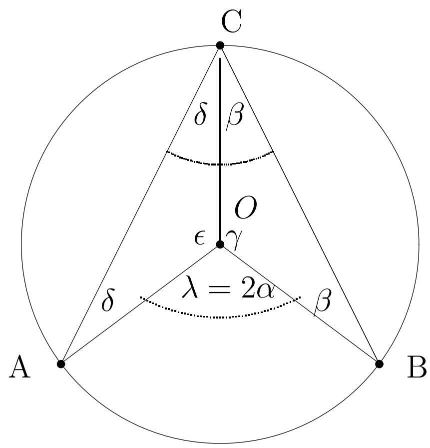
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

Kąt środkowy $2\alpha$ jest dwa razy większy od kąta wpisanego $\alpha$




$\alpha = \beta + \delta$

Kąt wpisany $\alpha$

Kąt środkowy $2\alpha$

# Geometria płaska. Planimetria [1]

**Tadeusz STYŠ**

**WARSZAWA 2020**

[1] Rozdział 18. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.

# Contents

# Chapter 1

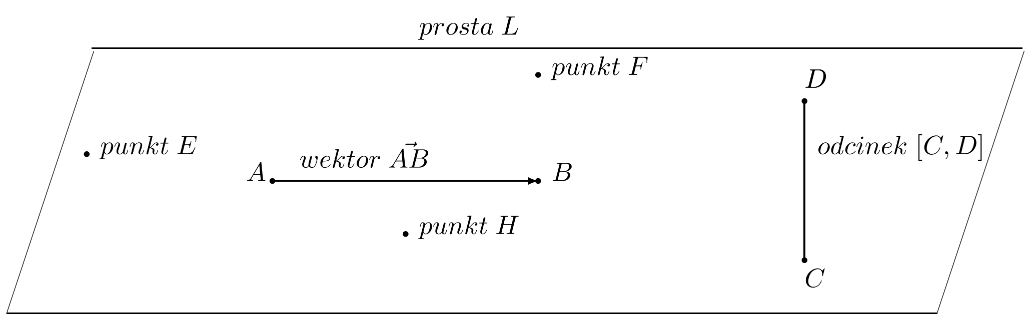
# Geometria płaska. Planimetria

## 1.1 Wstęp

Geometria Euklidesowa, która obejmje geometrię płaską i geometrie przestrzenną wchodzi do podstawy programu nauczania na poziomie podstawowym i średnim. W szkole podstawowej do programu rozszerzonnego matematyki wchodzą tylko niektòre tematy wsparte ćwiczeniami, które są opisane w rozdziale I.
Zakres geometrii płaskiej obejmuje konstrukcje z linijką i cyrklem figur płaskich oraz związki miarowe w tròjkątach, prostokątach, ròwnoległobokach, w okręgach i w wielokątach foremnych.

## 1.2 Punkty, odcinki i wektory na płaszczyźnie

Punkty, proste i płaszczyzny są pojęciami pierwotnymi, nie wymagają definicji. Punkt rozumiany jest jako figura geoametryczna bezwymiarowa. Prosta to przestrzeń euklidesowa jednowymiarowa, która składa się z punktów wspòł-liniowych. Podobnie płszczyzna tworzy przestrzeń euklidesową złożoną z punktów wspòł-płaszczyźnianych. Punkty położone na prostej lub na płaszczyźnie oznaczamy dużymi literami $A, B, C, ...$; Odcinek o początku w punkcie $A$ i końcu w punkcie $B$ oznaczamy symbolem $[A, B]$. Długość odcinka $[A, B]$ o początku $A$ i końcu $B$ oznaczamy modułem $|AB|$.
Wektorem o paczątku w punkcie $A$ i końcu w punkcie $B$ nazywamy odcinek skierowany $\vec{AB}$ o zwrocie od $A$ do $B$. Dḷugość wektora $|\vec{AB}|$ równa jest długości odcinka $|AB|$.



## 1.3 Położenie fiugur geometrycznych na płaszczyźnie.

Położenie figur geometrycznych na płaszczyźnie określamy we współrzędnych kartezjńskich. W kartezjańskim układzie współrzędnych współrzędne punktów punkty

$$A = (a_1, a_2) \quad i \quad B = (b_1, b_2)$$

piszemy w nawiasach zwykłych. Natomiast wektor

$$\vec{AB} = [a_2 - a_1, b_2 - b_1]$$

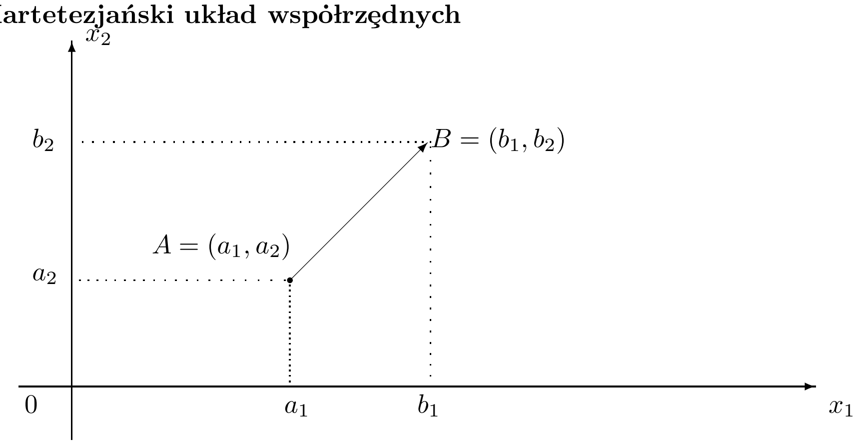
o współrzędnych różnicy współrzędnych piszemy w nawiasach kwadratowych.

**Przykład 1.1** *Niech punkty* $A = (3, 1.5)$ *i* $B = (5, 3.5)$ *tworzą wektor* $\vec{AB}$ *o pucz[a]tku A i końcu B. Wtedy wektor*

$$\vec{AB} = [5 - 3, 3.5 - 1.5] = [2, 2]$$

*ma współrzędne* $x_1 = 2, \;\; x_2 = 2.$

**Kartetezjański układ współrzędnych**




### 1.3.1 Operacje arytmetyczne na punktach

*Dodawanie punktów.* Suma dwóch punktów

$$A = (a_1, a_2) \quad i \quad B = (b_1, b_2)$$

równajest punktowi

$$P = (p_1, p_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

o współrzędnych $p_1 = a_1 + b_1 \quad i \quad p_2 = a_2 + b_2$.

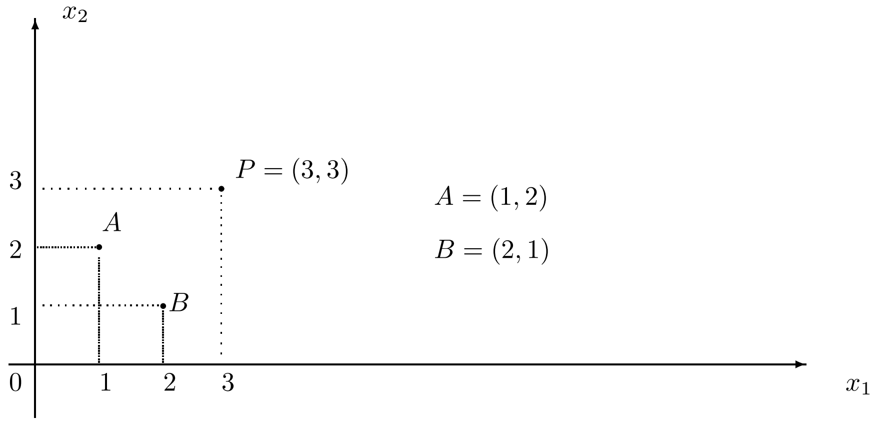
**Przykład 1.2** *Oblicz sumę punktów*

$$A = (1, 2) \quad i \quad B = (2, 1)$$

*Rozwiązanie.* Suma

$$A + B = (1, 2) + (2, 1) = (1 + 2, 2 + 1) = (3, 3)$$

*Opowiedź:* Sumą danych punktów $A = (1, 2)$ i $B = (2, 1)$ jest punkt
$P = (3, 3)$.




*Odejmowanie punktów.* Różnica dwóch punktów

$$A = (a_1, a_2) \quad i \quad B = (b_1, b_2)$$

równajest punktowi

$$P = (p_1, p_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

o współrzędnych $p_1 = a_1 - b_1 \quad i \quad p_2 = a_2 - b_2$.

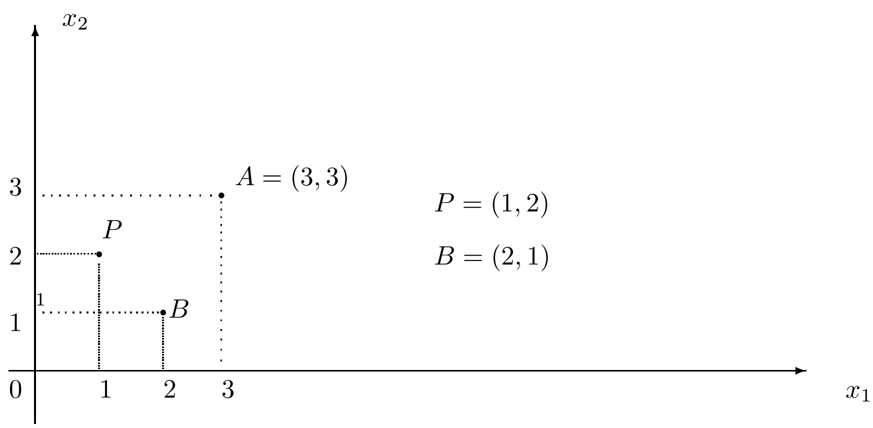
**Przykład 1.3** *Oblicz różnicę punktów*

$$A = (1, 2) \quad i \quad B = (2, 1)$$

*Rozwiązanie.* Różnica

$$A - B = (3, 3) - (2, 1) = (3 - 2, 3 - 1) = (1, 2)$$

*Opowiedź:* Różnicą danych punktów $A = (3, 3)$ i $B = (2, 1)$ jest punkt $P = (1, 2)$.




### 1.3.2 Wektory na płaszczyźnie

Niech dane będą punkty $A = (a_1, a_2)$ i $B = (b_1, b_2)$.
Wektor $\vec{AB}$ o paczątku w punkcie $A = (a_1, a_2)$ i końcu w punkcie $B = (b_1, b_2)$ określamy jako różnica punktów

$$\vec{AB} = B - A = [b_1 - a_1, b_2 - a_2].$$

[2] [3] Na przykład wektor związany o początku w punkcie $A = (0, 1)$ i końcu w punkcie $B = (2, 0)$ ma współrzędne

$$\vec{AB} = b - a = (2, 0) - (0, 1) = [2, -1].$$

[1] Nie ma pojęcia iloczynu lub ilorazu punktów

[2] Współrzędne $v_1, v_2$ wektora swobodnego $\vec{v} = [v_1, v_2]$ piszemy w nawiasach kwadrawtowych.

[3] Wektor swobodny określony jest przez jego długość, kierunek i zwrot, nie zależy od położenia na płaszczyźnie.

### 1.3.3 Operacje arytmetyczne na wektoracha

**Dodawanie wektorów**
Suma dwóch wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2]$$

równajest wektorowi

$$\vec{z} = [z_1, z_2] = [v_1 + w_1, v_2 + w_2]$$

o współrzędnych $z_1 = v_1 + w_1 \quad i \quad z_2 = v_2 + w_2$.

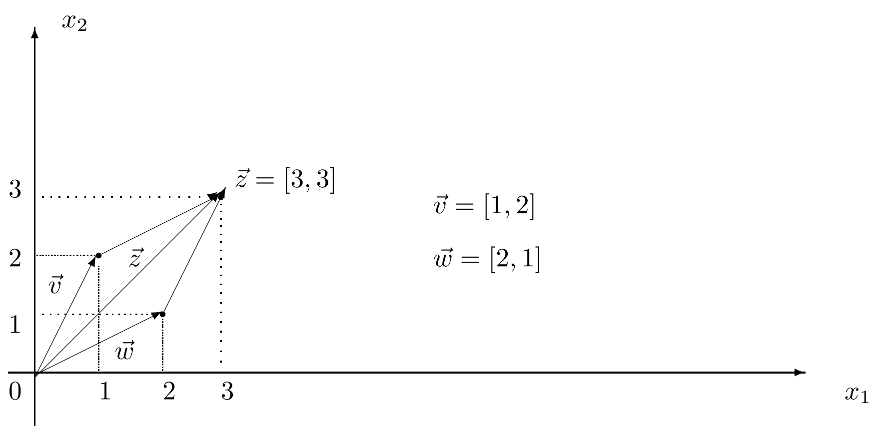
**Przykład 1.4** *Oblicz sumę wektorów*

$$\vec{v} = [1, 2] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1]$$

*Rozwiązanie.* Suma

$$\vec{v} + \vec{w} = [1, 2] + (2, 1) = [1 + 2, 2 + 1] = [3, 3]$$

*Opowiedź:* Sumą danych punktów $\vec{v} = [1, 2]$ i $\vec{w} = [2, 1]$ jest wektor $\vec{z} = [3, 3]$.




**Odejmowanie wektorów**
Różnica dwóch wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2]$$

równajest wektorowi

$$\vec{z} = [z_1, z_2] = \vec{v} - \vec{w} = [v_1 - w_1, v_2 - w_2]$$

o współrzędnych $z_1 = v_1 - w_1 \quad i \quad z_2 = v_2 - w_2$.

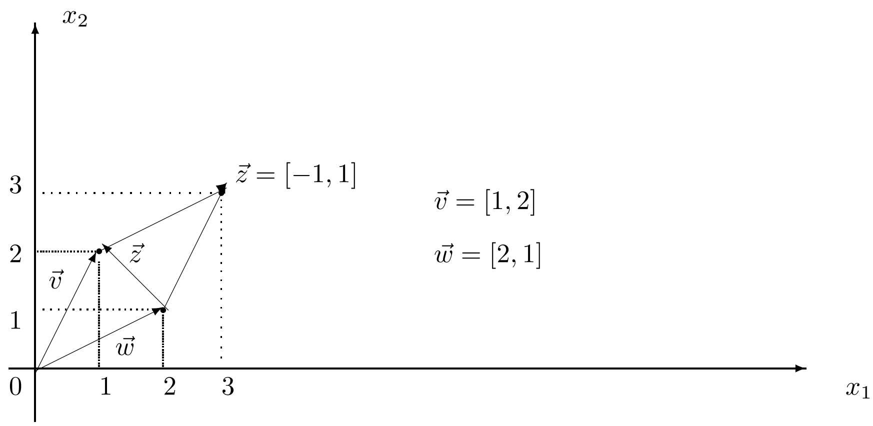
**Przykład 1.5** *Oblicz różnice wektorów*

$$\vec{v} = [1, 2] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1]$$

*Rozwiązanie.* Oblkiczamy różnicę wektorów

$$\vec{v} - \vec{w} = [1, 2] - [2, 1] = [1 - 2, 2 - 1] = [-1, 1]$$

*Opowiedź:* Wynikiem odejmowania danych wektorów $\vec{v} = [1, 2]$ i $\vec{w} = [2, 1]$ jest wektor $\vec{z} = [-1, 1]$.




### 1.3.4 Iloczyn skalarny wektorów

[4] Iloczyn skalarny wektorów jest ważną operacją na wektorach stosowaną w matematyce stosowanej, w fizyce, chemii i w innych przedmiotach ścisłych.

**Definition 1.1** *Iloczynem skalarnym wektorów $\vec{v} = [v_1, v_2]$ i $\vec{w} = [w_1, w_2]$ nazywamy liczbę*

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2$$

Iloczyn skalarny wektorów nie jest wektorem, natomiast jest liczbą

**Przykład 1.6** *Oblicz iloczyn skalarny wektorów*

$$\vec{v} = [2, 5] \qquad i \qquad \vec{w} = [7, 3]. \tag{1.1}$$

*Rozwiązanie.* Stosując wzór (1.1) obliczamy iloczyn skalarny danych wektorów, piszemy

$$(\vec{v}, \vec{w}) = ([2, 5] * [7, 3]) = 2 * 7 + 5 * 3 = 14 + 15 = 29.$$

*Odpowiedź:* Iloczyn skalarny danych wektorów $\vec{v} = [2, 5]$ i $\vec{w} = [7, 3]$ jest liczbą 29, piszemy

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 29.$$

Iloczyn skalarny wektorów zachowuje wszystkie własności operacji arytmetycznej mnożeni. Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2] \qquad i \qquad \vec{w} = [w_1, w_2]$$

- iloczn skalarny jest przemienny

  $$(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{v})$$

  Istotnie, sprawdzamy, że

  $$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2 = w_1 * v_1 + w_2 * v_2 = (\vec{w}, \vec{v})$$

- mnożenie skalarne wektorów jest rozdzielne względem dodawania

  $$(\vec{v}, (\vec{w} + \vec{z})) = (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{z})$$

  Istotnie sprawdzamy, że

  $$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w} + \vec{z}) &= v_1 * (w_1 + z_1) + v_2 * (w_2 + z_2) \\ &= v_1 * w_1 + v_1 * z_1 + v_2 * w + 2 + v_2 * z_2 \\ &= \underbrace{v_1 * w_1 + v_2 * w_2}_{(\vec{v}, \vec{w}} + \underbrace{v_1 * z_1 + v_2 * z_2}_{(\vec{v}, \vec{z})} \\ &= (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{z}) \end{aligned}$$

[4] Wielokość skalarna to znaczy wielkość określona liczbą

- Iloczyn skalarny wektora $\vec{v}$ przez siebie równy jest kwadratowi jego długości

$$(\vec{v},\vec{v}) = v_1 * v_1 + v_2 * v_2 = v_1^2 + v_2^2 = |\vec{v}|^2$$

Teraz podamy ważne w zastosowniach następujące twierdzenie

**Twierdzenie 1.1** *Wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, jeżeli ich iloczyn skalarny równy jest zero, piszmy*

$$\vec{v}\perp\vec{w} \Longleftrightarrow (\vec{v},\vec{w}) = 0.$$

**Dowód.** Istnieje kilka dowodów tego twierdzenia. Tutaj podamy dowód oparty na twierdzeniu Pitagorasa. Mianowicie, udowodnimy, że trójkąt o ramionach $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0$$

Obliczamy kwadrat długości różnicy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$

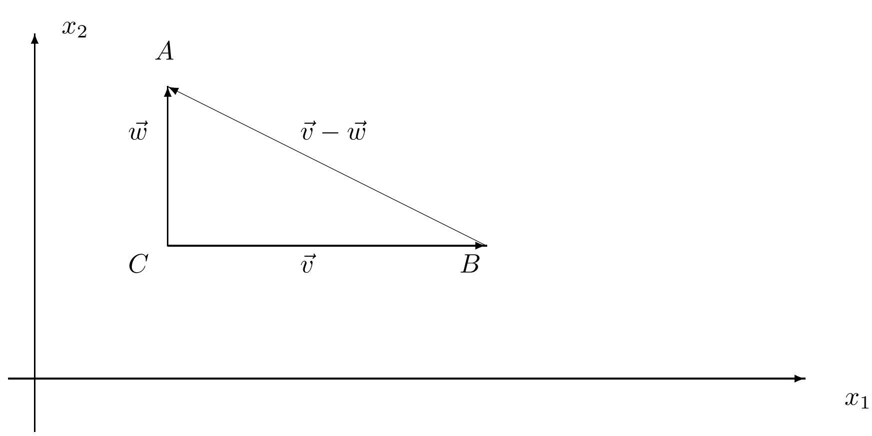
$$\begin{aligned}
|\vec{v}-\vec{w}|^2 &= (\vec{v}-\vec{w},\vec{v}-\vec{w}) \\
&= (\vec{v},\vec{v}) - 2(\vec{v},\vec{w}) + (\vec{w},\vec{w}) \\
&= |\vec{v}|^2 - 2(\vec{v},\vec{w}) + |\vec{w}|^2
\end{aligned}$$

Zauważmy, że jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0$$

to boki trójkąta $\Delta ABC$

$$|AB| = |\vec{v}|, \qquad |AC| = |\vec{w}|, \qquad |BC| = |\vec{v}-\vec{w}|$$




spełniają równość

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = |v \vec{-} w|^2 \tag{1.2}$$

wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0.$$

Z drugiej strony z twierdzenia Pitagorasa wynika, że suma kwadratów dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości boku trzeciego (cf. (1.2)) wtedy i tylko wtedy, jeżeli ten trójkąt jest prostokątny.
Zatem kąt $\angle ACB$ pomiędzy wektorami $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest prosty wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny tych wektorów równy jest zero.
Koniec dowodu.
Zauważmy, że iloczyn skalarny wektorów jest związany z twierdzeniem Pitagorasa, Istotnie, warunek prostopadłości wektorów [5] [6]

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

jest równoważny z tezą twierdzenia Pitagorasa o trójkącie prostokątnym.

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = |v \vec{-} w|^2.$$

**Przykład 1.7** *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [6, 8], \qquad \vec{w} = [9, 12].$$

*Rozwiązanie.* Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzór (1.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [6, 8], \qquad i \qquad \vec{w} = [w_1, w_2] = [9, 12]$$

Zatem iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 6 * 9 + 8 * 12 = 54 + 96 = 150.$$

równy jest 100.
Wiemy, że kwadrat długości wektora $\vec{v} = [6, 8]$ jest równy iloczynowi skalarnemu tego wektora przez siebie.

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = 6 * 6 + 8 * 8 = 36 + 64 = 100$$

Skąd długość wektora

$$|\vec{v}| = \sqrt{100} = 10.$$

Podobnie obliczamy długość wektora $\vec{w} = [9, 12]$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(\vec{w}, \vec{w})} = \sqrt{9 * 9 + 12 * 12} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15.$$

**Przykład 1.8** *Dla jakiej wartości parametru $m$ wektory*

$$\vec{v} = [m, 6], \qquad \vec{w} = [3, 2].$$

*są prostopadłe?*

*Rozwiązanie.* Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzór (1.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [m, 6], \qquad i \qquad \vec{w} = [w_1, w_2] = [3, 2]$$

Wektory są prostopadłe jeżeli ich iloczyn skalarny równy jest zero. Obliczamy iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = m * 3 + 6 * 2 = 3m + 12 = 0.$$

[5] Wartość iloczynu skalarnego wektorów nie jest wektorem, natomiast jest liczbą.

[6] Zauważmy, że znikanie iloczynu skalarnego $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym prostopadłości wektorów $\vec{v}, \vec{w}$ , w symbolach piszemy $\vec{v} \perp \vec{w} \iff (\vec{v}, \vec{w}) = 0$.

Skąd iloczyn skalarny ròwny jest zero

$$6m + 12 = 0, \quad dla \quad m = -\frac{12}{3} = -4.$$

Istotnie sprawdzamy, że dla $m = -4$ iloczyn skalarny wektora $\vec{v} = [m, 6]$ przez wektor $\vec{w} = [3, 2]$ ròwny jest zero

$$(\vec{v}, \vec{w}) = -4 * 3 + 6 * 2 = 0$$

*Odpowiedź:* Wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [m, 6], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2] = [3, 2]$$

są prostopadłe dla parametru $m = -4$.

**Zadanie 1.1** *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [12, 16], \quad \vec{w} = [15, 20].$$

**Zadanie 1.2** *Dla jakiej wartości parametru $m$ wektory*

$$\vec{v} = [m, 15], \quad \vec{w} = [5, 3].$$

*są prostopadłe?*

## 1.4 Konstrukcje podstawowe z cyrklem i linijką

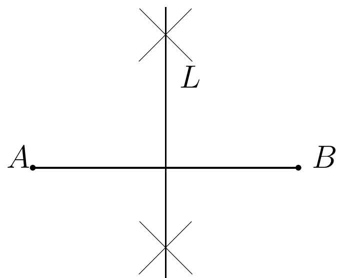
Do konstrukcji podstawowych przy pomocy cyrkla i linijki zaliczamy tutaj [7]

- konstrukcja symetralnej danego odcinka,
- konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej, ktòra przechodzi przez dany punkt poza prostą,
- konstrukcja dwusiecznej danego kąta,
- konstrukcja prostych ròwnoległych,
- konstrukcja tròjką o danch bokach,
- konstrukcja czworokąta o danych bokach.

### 1.4.1 Konstrukcja symetralnej odcinka.

Niech dany będzie odcinek $[A, B]$ o długości $a = |AB|$. Stawiamy cyrkiel w punkcie $A$ i rozwartością cyrkla większą od połowy odcinka $[A, B]$ zakreślamy dwa łuki nad odcinkiem i pod odcinkiem. Rysujemy prostą $L$ przez punkty przecię łuków. Prosta $L$ jest symetralną odcinka $[A, B]$.

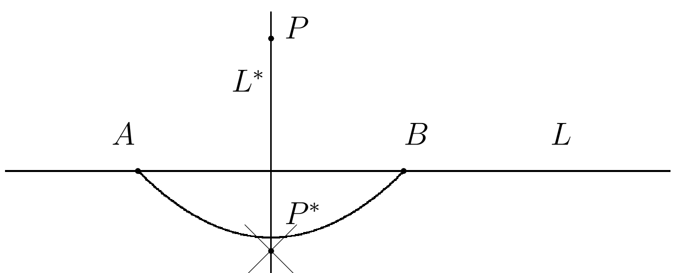
[7] Długość odcineka $[A, B]$ o początku $A$ i końcu $B$ oznaczamy symbolem $|AB|$




**Zadanie 1.3** *Narusuj odcinek o początku w punkcie $A$ długości* $6cm$ *i o końcu w punkcie $B$. poprowadź symetralną odcinka $[A, B]$ przy pomocy cyrkla i linijki.*

### 1.4.2 Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej

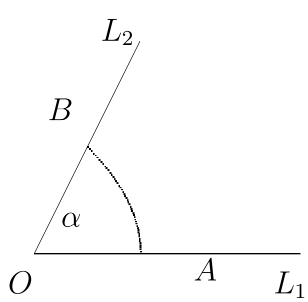
Niech dana będzie prosta $L$ i punkt $P$. Stawiamy cyrkiel w danym punkcie $P$ i zakreślamy łuk przeciający prostą $L$ w punktach $A$ i $B$. Stawiamy cyrkiel w punkcie $A$ i zakreślamy łuk. Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie $B$ i zakreślamy łuk. Punkt przecięcia łuków oznaczamy literą $P^*$. Przez punkty $P^*$ i $P$ rysujemy prostą $L^*$, jak na rysunku niżej.




**Zadanie 1.4** *Narusuj prostą $L$. Poprowadź prostą prostopadłą do prostej $L$ przez dowolnie wybrany punkt $P$ leżący poza prostą $L$, przy pomocy cyrkla i linijki.*

### 1.4.3 Konstrukcja dwusiecznej danego kąta

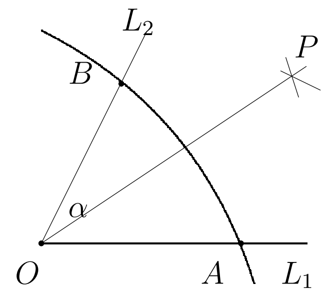
Niech będzie dany kąt $\alpha$ o wierzchołku w punkcie $O$ i ramionach $L_1$ i $L_2$. [8]




Stawiamy cyrkiel w wierzchołku $O$ kąta $\alpha$ i zakreślamy łuk przecinający ramiona $L_1$ i $L_2$ w punktach $A$ i $B$. Punkty $A$ i $B$ są równo odległe od punktu $O$, piszemy $|OA| = |OB|$. Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie $A$ i zakreślamy

[8] Kąt $\alpha$ o wierzchołku $O$ i ramionach $L_1$ i $L_2$ określonych przez punkty $A$ i $B$ oznaczamy symbolem $\angle AOB$

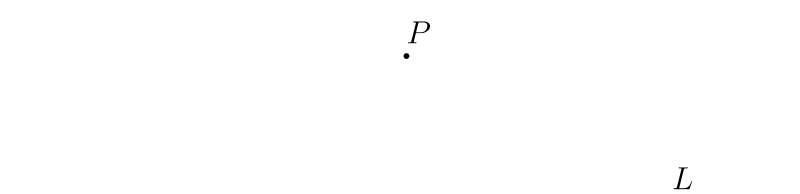
łuk. Podobnie stawiammy cyrkiel w punkcie $B$ i zakreślamy łuk. Punkt przecię cia łuków oznaczamy literą $P$. Przez punkty $O$ i $P$ prowadzimy dwusieczną kąta




**Zadanie 1.5** *Poprowadź dwusieczną kąta $\alpha$ danego niżej na rysunku przy pomocy cyrkla i linijki.*

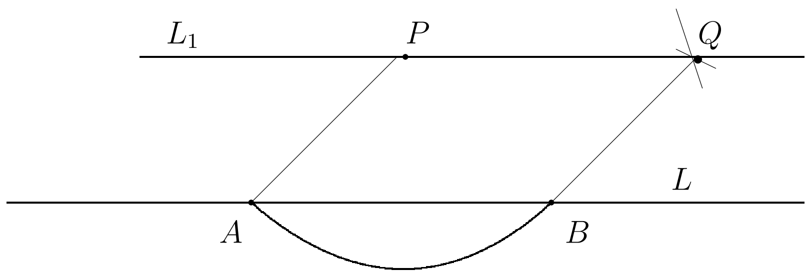

### 1.4.4 Konstrukcja prostych równoległych

Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej $L$ i przechodzącej przez dany punkt $P$ oparta jest na rysowaniu równoległoboku.

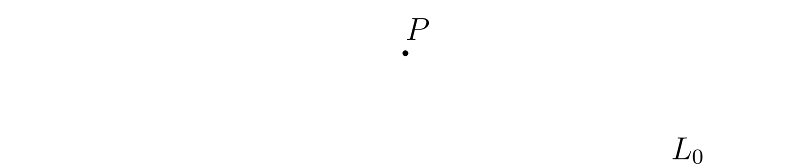



**Opis konstrukcji.** Stawiamy cyrkiel w danym punkcje $P$ i zakreślamy łuk, który przecina daną prostą $L$ w dwóch punktach $A$ i $B$. Łączymy punkt $A$ przecięcia z danym punktem $P$ linijką. Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie $B$ i rozwartością cyrkla równą odległości $|AP|$ punktu $A$ od punktu $B$, zakreślamy łuk. Podobnie, stawiamy cyrkiel w punkcie $P$ i tą samą rozwartością

cyrkla zakreślamy drugi łuk. Punkt $Q$ przecią łuków wyznacza wierzchołek równoległoboku $ABQP$.
Łączymy punkty $A$, $B$, $Q$, $P$. Widzimy, że w ten sposób narysowaliśmy równoległobok $ABQP$, którego bok $[PQ]$ leży na prostej równoległej do prostej $L$ przechodzącej przez dany punkt $P$.

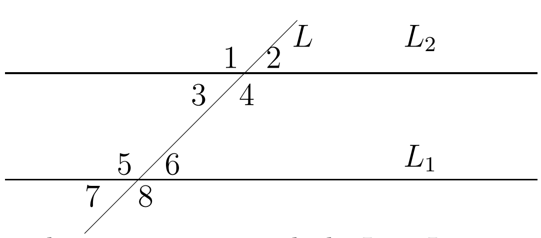



**Zadanie 1.6** *Narysuj prostą $L$ równoległą do prostej $L_0$ danej niżej na rysunku i przechodzącej przez dany punkt $P$ przy pomocy cyrkla i linijki.*




### 1.4.5 Dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą

Rozpatrzmy dwie proste równoległe $L_1$ i $L_2$ przecięte trzecią prostą $L$. Niżej na rysunku mamy zaznaczone kąty parami równe




*Dwie linie proste równoległe $L_1$ i $L_2$ przecięte trzecią prostą $L$*

- kąty wierzchołkowe parami równe

$$\angle\, 1 = \angle\, 4, \quad \angle\, 2 = \angle\, 3, \quad \angle\, 5 = \angle\, 8, \quad \angle\, 6 = \angle\, 7$$

- kąty odpowiadające parami ròwne

$$\angle 1 = \angle 5, \quad \angle 3 = \angle 7, \quad \angle 2 = \angle 6, \quad \angle 4 = \angle 8$$

- kąty naprzemianległe wewnętrzne parami ròwne

$$\angle 3 = \angle 6, \quad \angle 4 = \angle 5,$$

- kąty naprzemianległe zewnętrzne parami ròwne

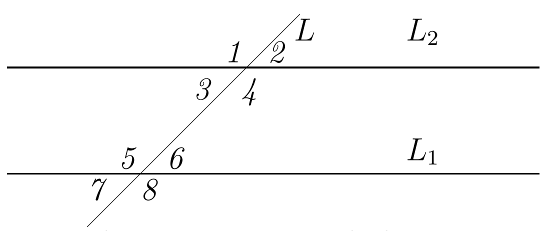
$$\angle 1 = \angle 8, \quad \angle 2 = \angle 7,$$

- kąty przyległe ròwne

$$\angle 1 \; i \; \angle 2, \quad \angle 3 \; i \; \angle 4, \quad \angle 1 \; i \; \angle 3, \quad \angle 2 \; i \; \angle 4$$

$$\angle 5 \; i \; \angle 6, \quad \angle 7 \; i \; \angle 8, \quad \angle 5 \; i \; \angle 7, \quad \angle 6 \; i \; \angle 8$$

**Zadanie 1.7** *Jeden z kątòw wierzchołkowych ròwny jest* $30^0$.




*Dwie linie proste ròwnoległe przecięte trzecią prostą*

*Oblicz wszystkie kąty*
*(a) wierchołkowe*
*(b) naprzemian ległe*
*(c) odpowiadające*
*(d) przyległe wewnętrzne*
*(e) przyległe zewnętrzne*
*Zaznacz wartości wszystkich kątòw na rysunku*

## 1.5 Okrąg i koło

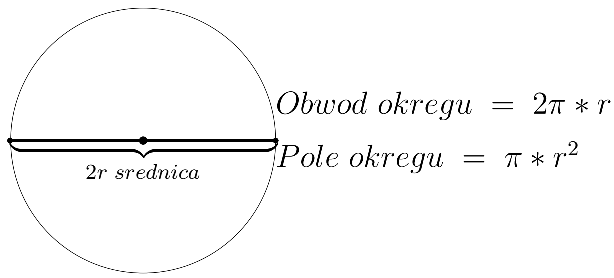
Obszar wewnątrz okręgu nazywamy kołem.

Obwòd okręgu

$$O_{obwod} = 2 * \pi * r,$$

pole koła

$$P_{okregu} = \pi * r^2, \qquad \pi \approx \frac{314}{100} = 3.14.$$

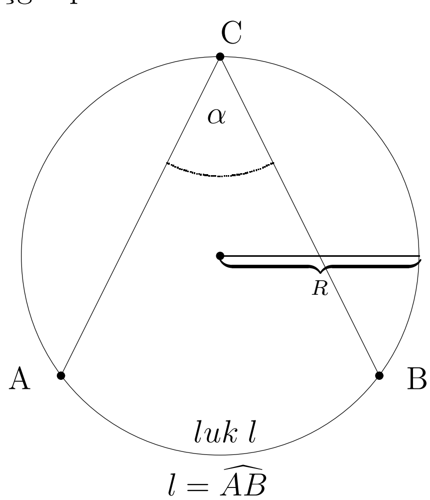



średnica okręgu równa jest 2 razy promień okręgu.

**Zadanie 1.8** *Narysuj cyrklem okrąg o promieniu 3cm. Zaznacz kredką wnętrze okręgu jako koło o promieniu 3cm.*
*Oblicz średnicę okręgu, obwód okręgu, pole koła.*

### 1.5.1 Miara łukowa kąta

Rozpatrzmy okrąg o promieniu $R$




Miarę łukową kąta $\alpha = \angle BCA$ opartym na łuku $l = \widehat{AB}$ określamy jako stosunek długości łuku $l$ do promienia $R$

$$\alpha = \frac{l}{R}$$

Kąt pełny, który w mierze kątowej ma $360^0$ oparty jest na łuku

$$l = 2\pi * R$$

równym obwodowi okręgu.
Zatem miara łukowa kąta pełnego równa jest

$$\alpha = \frac{2\pi * R}{R} = 2\pi$$

Podobnie kąt półpełny, który w mierze kątowej ma $180^0$ oparty jest na łuku

$$l = \pi * R$$

równym połowie obwodu okręgu. To znaczy, że miara łukowa kąta półpełnego równa jest

$$\alpha = \frac{\pi * R}{R} = \pi$$

Również kąt prosty, który w mierze kątowej ma $90^0$ oparty jest na łuku

$$l = \frac{2\pi * R}{4} = \frac{\pi * R}{2}$$

równym czwartej części obwodu okręgu. To znaczy, że miara łukowa kąta prostego równa jest

$$\alpha = \frac{\pi * R}{2R} = \frac{\pi}{2}$$

W istocie, miara łukowa kąta nie zależy od długowci promienia $R$. Dlatego możemy przyjąć promień okręgu $R = 1$.
Jednostką miary łukowej kąta jest 1 radian. Kąt pełny ma $2 * \pi$ radianów, któremu w mierze kątowej odpowiada kąt $360^0$. Zatem, jeden stopnień

$$1^0 \; = \frac{2 * \pi}{360} = \frac{\pi}{180} radianow$$

natomiast

$$1\;radian = \frac{180^0}{\pi} \;\; stopni$$

**Przykład 1.1** *Oblicz miarę łukową kąta* $30^0$.
**Rozwiązanie.** *Korzytamy z proporcji, kątowi* $180^0$ *odpowiada miara łukowa tego kąta* $\pi$ *radianów. Zatema kątowi* $30^0$ *odpowiada miara łukowa* $x$ *radianów. Tą proporcję zapisujemy równaniem*

$$\frac{\pi}{180} = \frac{x}{30}$$

*Skąd obliczamy miarę łukową kąta* $30^0$

$$x = \frac{30 * \pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

**Zadanie 1.9** *Oblicz miarę łukwą kąta $\alpha$, jeżeli jego miara kątowa równa jest*

$$(i) \qquad \alpha = 30^0$$

$$(ii) \qquad \alpha = 60^0$$

$$(iii) \qquad \alpha = 120^0$$

**Zadanie 1.10** *Ile stopni ma kąt $\alpha$, jeżeli jego miara łukowa równa jest*

$$(i) \qquad \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$(ii) \qquad \alpha = \frac{5\pi}{4}$$

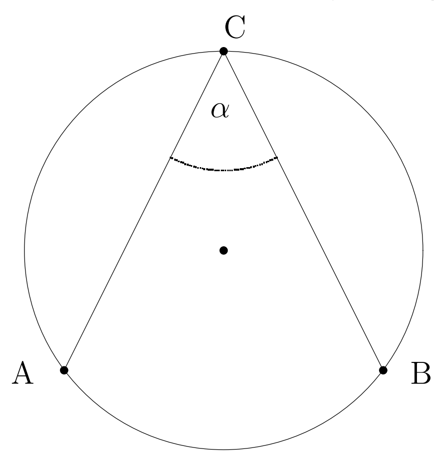
$$(iii) \qquad \alpha = \frac{4\pi}{3}$$

$$(iv) \qquad \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

$$(iii) \qquad \alpha = \frac{7\pi}{6}$$

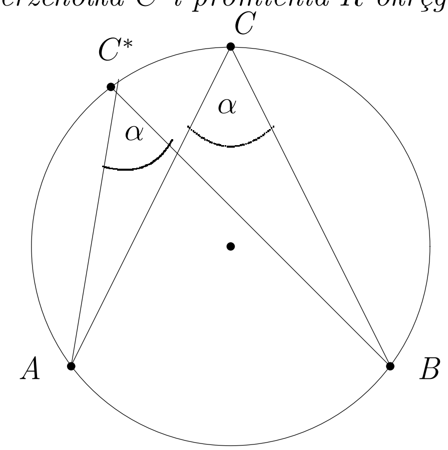
### 1.5.2 Kąt wpisany w okrąg i kąt środkowy

**Kąt wpisany.** Kątem wpisanym $\alpha$ nazywamy kąt, którego wierzchołek $C$ leży na okręgu a ramiona $AC$ i $BC$ przecinają okrąg w punktach $A$ i $B$




Z określenia miary łukowej i miary kątowej wiemy, że wartość kąta wpisanego $\angle BCA = \alpha$ nie zależy od wielkości promienia $R$. Zatem zakładamy, że promień $R = 1$.

**Lemma 1.1** *Wartość kąta $\angle BCA = \alpha$ wpisanego w okrąg jest stała niezależna* *od położenia wierzchołka $C$ i promienia $R$ okręgu o środku w punkcie $O$.*



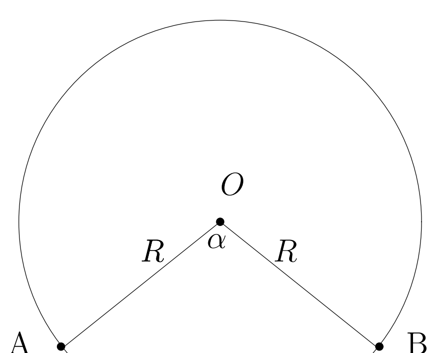

Położenie kąta $\Delta BCA = \alpha$ wpisanego w okrąg w pozycji $C^* = \angle BC^*A = \alpha$, nie zmienia wartości $\alpha$ kąta wpiesanego w okrąg.
Istotnie kąt wpisany $\alpha$ o wierzchołku w punkcie $C$ i o ramionach $AC$ i $BC$ przecina okrąg w punktach $A$ i $B$. Kąt $\alpha$ oparty jest na łuku $l = \widehat{AB}$ radianów, w mierze kątowej równy jest

$$\alpha = \frac{l * \pi}{180^0}.$$

Jeżeli wierzchołek $C$ porusza się po okręgu w kierunku punktu $A$ to kąt wpisany $\alpha = \dfrac{l * \pi}{180^0}$, nie zmienia warotości, ponieważ długość łuku $l = \widehat{AB}$ pozostaje ta sama.
Jednak, jeżeli wierzchołek $C$ pokryje się z punktem $A$ to ramie $AC$ zredukuje się do punktu $A$. Wtedy kąt wierzchołkowy $\alpha$ jest nieokreślony. Jeżeli wierzchołek $C$ przekroczy punt $A$ i dalej porusza się w kierunku punktu $B$ to wtedy kąt wpisany $\alpha$ będzie oparty na łuku o długości $2\pi - l$, a jego miara kątowa

$$\alpha = \frac{(2\pi - l) * 180^0}{\pi}.$$

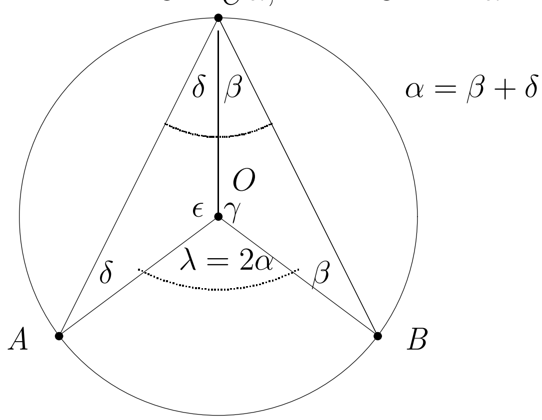
**Kąt środkowy.** Kątem środkowym nazywamy kąt pomiędzy promieniami okręgu $R = |AO|$ i $R = |BO|$ o wierzchołku w środku okręgu $O$.



### 1.5.3 Związek pomiędzy kątem środkowym i kątem wpisanym

**Twierdzenie 1.2** *Kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany w okrąg jest dwa razy wiekszy od kąta wpisanego. Zatem mamy równość*

$$\angle BCA = \alpha, \qquad \angle BOA = 2\alpha$$




Podamy dwa dowody twierdzenia o kącie wpisanym i kącie środkowym.
**Dowód 1.** Z lematu 1 wiemy, że wartość kąta wpisanego $\alpha$ nie zależy od położenia jego wierzchołka $C$ na okręgu.
Zatem możemy przyjąć położenie wierzchołka $C$ na średnicy okręgu przechodzącej przez wierzchołek $C$ i środek okręgu $O$.
Promienie okręgu $AO,\ BO$ i $CO$ tworzą trójkąty $\Delta AOC$ i $\Delta BCO$ równorammienne i przystające.
Zatem ich kąty $\beta,\ \gamma$ i kąt środkowy $\angle BOA = \lambda$ spełniają równania

$$\alpha = 2\beta,$$

$$\gamma + 2\beta = \pi$$

$$2\gamma + \lambda = 2\pi.$$

Skąd obliczamy kąt środkowy

$$\lambda = 2\pi - 2\gamma = 2\pi - 2\underbrace{(\pi - 2\beta)}_{\gamma} = 4\beta = 2\alpha.$$

**Dowód 2**. Najpierw dowód podamy w przypadku, gdy środek okręgu $O$ leży pomiędzy ramionami $AC$ i $BC$ kąta wpisanego $\angle BCA = \alpha$, następnie w przypadku, gdy środek okręgu $O$ leży poza ramionami kąta wpisanego.
W przypadku pierwszym zauważamy, że trójkąty równoramienne $\Delta AOC, \Delta BCO$ o ramionach równych promieniowi okręgu $R$ mają kąty przy podstawach kąty równe. Trójkąt $\Delta AOC$ ma przy podstawie $AC$ kąty równe $\delta$ i trójkąt $\Delta BCO$ ma przy podstawie $BC$ kąty równe $\beta$. Kąt wpisany $\angle BCA = \alpha$ oznaczamy literą grecką $\alpha$, a kąt środkowy $\angle AOB$ oznaczamy literą grecką $\lambda$, jak na rysunku.

Następnie zauważamy, że kąty $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \lambda$ spełniają układ równań liniowych

$$
\begin{array}{ll}
\alpha = \beta + \delta, & \angle BCA \; wpisany \; \alpha \\
2\beta + \gamma = \pi, & suma \; katow \; w \; trojkacie \; \Delta \; BCO \; rowna \; \pi \\
2\delta + \epsilon = \pi, & suma \; katow \; w \; trokacie \; \Delta \; AOC \; rowna \; \pi \\
\gamma + \epsilon + \lambda = 2\pi, & kat \; pelny \; rowny \; 2\pi
\end{array}
\tag{1.3}
$$

Układ równań liniowych (1.3) rozwiążemy metodą podstawiania.
Mianowicie, z równanania drugiego i trzeciego w układzie (1.3) obliczamy

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \pi - 2\beta, \\
\epsilon &= \pi - 2\delta
\end{aligned}
$$

Skąd suma kątów

$$\gamma + \epsilon = 2\pi - 2(\beta + \delta)$$

Z równania czwartego w układzie równa(1.3) obliczamy kąt środkowy

$$\lambda = 2\pi - (\gamma + \epsilon) = 2\pi - \underbrace{(2\pi - 2(\beta + \delta))}_{\gamma+\epsilon} = 2\underbrace{(\beta + \delta)}_{\alpha} = 2\alpha$$

Zatem, obliczyliśmy, że kąt środkowy $\lambda$ jest dwa razy większy od kąta wpisanego $\alpha$, piszemy

$$\lambda = 2\alpha$$

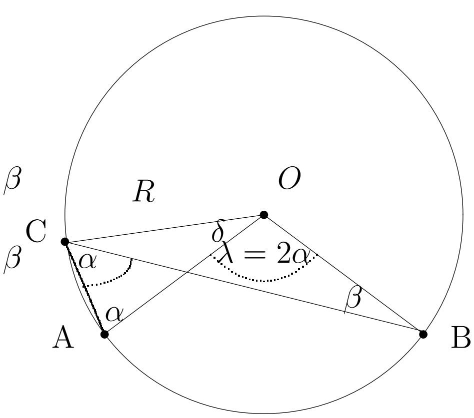
Koniec dowodu przypadku pierwszego.

**Dowód**. Dowód w przypadku drugim, gdy środek okręgu $O$ leży poza ramionami $AC$ i $BC$ kąta wpisanego $\angle BCA = \alpha$.

$\angle OCA = \alpha + \beta$

$\angle CAO = \alpha + \beta$

$\angle AOC = \delta$




$|OB| = |OC| = |OA| = R$

Zauważamy, że trójkąty równoramienne $\Delta AOC$ i $\Delta BOC$ o ramionach równych promieniowi okręgu $R$ mają przy podstawach $[AC]$ i $[CB]$ kąty równe, odpowiednio

$$\angle OCA = \angle CAO = \alpha + \beta \qquad i \qquad \angle CBO = \angle OCB = \beta.$$

Suma kątów w trójkątach $\Delta AOC$ i $BOC$ równa jest $180^0$ lub $\pi$, piszemy

$$\begin{array}{ll} \underbrace{\angle OCA + \angle CAO}_{2(\alpha+\beta)} + \underbrace{\angle AOC}_{\delta} = \pi & 2(\alpha+\beta) + \delta = \pi \\ \underbrace{\angle OBC + \angle OCB}_{2\beta} + \underbrace{\angle BOC}_{\delta+\lambda} = \pi & 2\beta + \delta + \lambda = \pi \end{array} \tag{1.4}$$

Układ równań liniowych (1.4) rozwiążemy metodą podstawiania.
Mianowicie, z pierweszgo równania obliczamy

$$\delta = \pi - 2(\alpha + \beta)$$

i podstawiamy do równania drugiego

$$2\beta + (\pi - 2(\alpha + \beta)) + \lambda = \pi, \qquad \lambda - 2\alpha = 0.$$

Skąd kąt środkowy $\angle BOA = 2\alpha$ jest dwa razy większy od kąta wpisanego $\angle OCA = \alpha$, piszemy

$$\lambda = 2\alpha$$

lub

$$\angle BOA = 2\angle OCA.$$

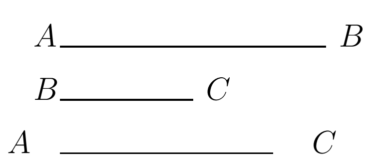
Koniec dowodu przypadku 2.

**Wniosek:** Kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest prosty, ma $90^0$, w mierze łukowej ma $\frac{\pi}{2}$ radianów.

## 1.6 Trójkąty

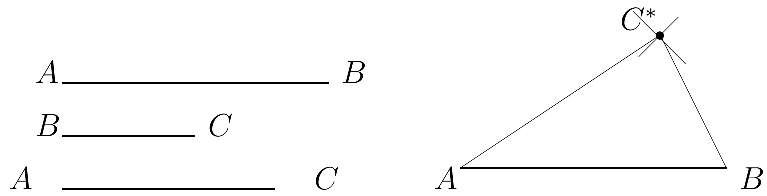
### 1.6.1 Konstrukcja trójkąta o danych bokach

Niech będą dane trzy odcinki $[A, B]$, $[B, C]$, i $[A, C]$




Wybierzmy odcinek $[AB]$ jako podstawę trójkąta $\Delta ABC$. Rozwartością cyrkla równą dłu gości odcinka $[A, C]$ zakreślamy łuk stawiając cyrkiel w punkcie $A$. Następnie rozwartością cyrkla równą długości odcinka $[B, C]$ zakreślamy łuk stawiając cyrkiel w punkcie $B$. Punkt przecięcia łuków $C^*$ łączymy z punktami $A$ i $B$ podstawy tójkąta $\Delta ABC^*$ [9]

[9] Odcinek o początku w punkcie $A$ i końcu w punkcie $B$ oznaczamy symbolem $[A, B]$




Zauważmy, że trójkąt można zbudować z odcinków, które spełniają następującą nierówność trójkąta
*Suma długości dwóch boków trójkąta jest większa od długości boku trzeciego, piszemy*

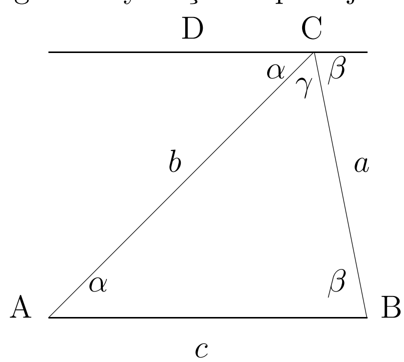
$$|AB| + |BC| \geq |AC|,$$

$$|AB| + |AC| \geq |BC|,$$

$$|AC| + |BC| \geq |AB|$$

### 1.6.2 Suma kątów trójkąta

Suma kątów każdego trójkąta równa jest $180^0$, w mierze łukowej $\pi$ radianów. Niżej rozpatrzmy geometryczną interpretaje sumy kątów trójkąta.



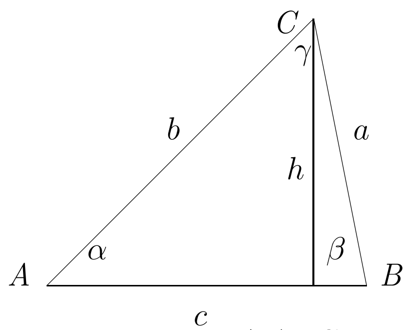

Z rysunku, zauważamy, że suma kątów każdego trójkąta równa jest $180^0$. Rzeczywiście, prosta $DC$ jest równoległa do podstawy $AB$ trójkąta $ABC$ . Kąty naprzemianległe wewnętrzne $\alpha$ przy podstawie i $\alpha$ przy odcinku $DC$ są równe, podobnie $\beta$ przy podstawie $AB$ i $\beta$ przy odcinku $DC$ są równe. Widzmy, że

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

To znaczy, że suma kątów każdego trójkąta równa jest $180^0$.
Rozróżniamy następujące trójkąty: trójkąty równoboczne, trójkąty równoramienne, trójkąty prostokątne i trójkąty dowolne.

**Konstrukcja trójkąta o tych samych kątach i o bokach proporcjonalnych.** Na płaszczyżnie wybieram trzy różne punkty $A$, $B$ i $C$ i łączymy te punkty używając linjki. W ten sposób narysowaliśmy trójkąt. Boki $AB$ i $AC$ przedłużamy. Na przedłużonych bokach odkładamy odcinki równe długości boków $AB$ i $AC$, odpowiednio. Łączymy zaznaczone końce odcinków. Widzimy, że w ten sposób narysowaliśmy drugi trójką który ma kąty te same co wcześniej narysowny trójkąt, natomiast boki ma dwa razy dłuższe. Rzeczywiście, oba trójkąty mają te same kąty, ponieważ bok $BC$ jest równoległy odpowiedniego boku większego trójkąta, jako kąty odpowiadające.

**Przykład 1.2** *Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy dłuższych używając linijki i cyrkla. Zmierz kąty tego trójkąta. Oblicz sumę kątów tego trójkąta.*




$Trojkata\ \Delta ABC$

*Pole trójkąta*

$$P_\Delta = \frac{a * h}{2}$$

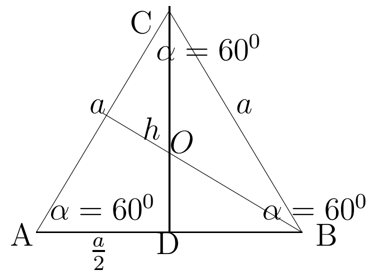
*Obwód trójkąta*

$$Ob_\Delta = a + b + c.$$

### 1.6.3 Trójkąt równoboczny.

Trójkąt równoboczny ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe $\alpha = 60^0$, w mierze łukowej $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ jak na rysunku

**Konstrukcja trójkąta równobocznego.** Rysujemy odcinek o ustalonej długości boków trójkąta. Stawiamy nóżkę cyrkla na początku odcinka i zakreślamy okrąg o promieniu równym długości odcinka. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla na drugim końcu odcinka i tym samym promieniem zakreślamy okrąg. Łączymy punkt przecięcia okręgów z końcami odcinka. Widzimy, że w ten spoób powstał trójkąt o równych bokach i równych kątach.




$Trojkat\ rownoboczny\ \Delta ABC$

Wysokość $h$ trójkąta $\Delta\ ABC$ jest dwusiecznną kąta $\alpha$ i dzieli podstawę $a$ na połowę w punkcie $D$. Podobnie wysokości trójkąta równobocznego spuszczone na pozostałe boki dzielą ich na połowy i przecinają się w jednym punkcie $O$. Punkt przecięcia wysokości $O$ dzieli te wysokości w stosunku $1 : 3$. To znaczy zachodzi następująca proporcja

$$\frac{|DO|}{|DC|} = \frac{1}{3}, \quad |DC| = h$$

Stąd mamy

$$|DO| = \frac{1}{3}h, \quad \text{i} \quad |OC| = \frac{2}{3}h$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość $h$ trójkąts $\Delta\ ABC$

$$h^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

Wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Obliczamy pole trójkąta równobocznego

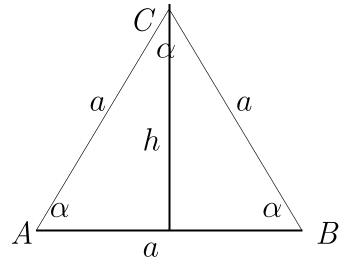
$$P = h * \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole trójkąta równobocznego o boku $a$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

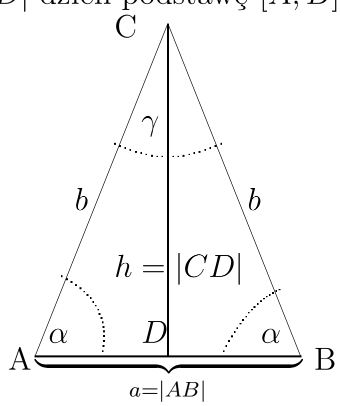
**Zadanie 1.11** *Zmierz boki i kąty trójkąta $\Delta ABC$ niżej na rysunku*



*(i) Oblicz pole i obwód trójką równoramiennego $\Delta ABC$, o boku $a = 3cm$.*
*(ii) Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy dłuższych używając linijki i cyrkla.*
*(iii) Zmierz kąty i oblicz sumę kątów tego trójkąta.*

### 1.6.4 Trójkąt równoramienny

Trójkąt równoramienny o podstawie równej odcinkowi $[A, B]$ i równych ramionach $[A, C] = [B, C]$ ma przy podstawie $[A, B]$ kąty równe $\angle CAB = \angle ABC = \alpha$. Wysokość $h = |CD|$ dzieli podstawę $[A, B]$ na połowę.




Pole trójkąta równoramiennego $\Delta ABC$ obliczamy stosując wzór ogólny

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\underbrace{|AB| * |CD|}_{a*h} = \frac{1}{2}a * h.$$

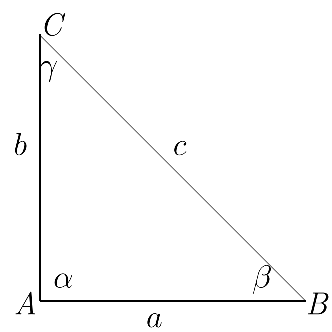
**Zadanie 1.12** *Zmierz boki i kąty trójkąta równoramiennego $\Delta ABC$. Oblicz obwód, pole i sumę kątów trójkąta rwnoramiennego, jeżeli długość jego podstawy $|AB| = 3cm$, a równe ramiona $|AC| = |BC| = 4cm$.*

### 1.6.5 Trójkąt prostokątny

Pole trójkąta $= \dfrac{a * b}{2}$, obwód trójkąta $=a + b + c$

W trójkącie prostokątnym wyróżniamy przyprostokątne $AB$ i $AC$, o długości $a$ i $b$, przeciwprostokątną $BC$, o długości $c$, kąt prosty $\alpha = 90^0$ i dwa kąty przyległe $\beta$, $\gamma$

**Zadanie 1.13** *Zmierz boki i kąty tego trójkąta.*




*Trójkąt prostokątny $\Delta ABC$*
*Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy krótszych używając linijki i cyrkla. Oblicz sumę kątów tego trójkąta*

## 1.7 Cechy przystawania i podobieństwo trójkątów

### 1.7.1 Trójkąty przystające

Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe. Jasne, że na to żeby dwa trójkąty były przystające wystarczy, żeby miały równe boki, gdyż wtedy automatycznie wszystkie kąty muszą mieć równe. O tym mówi pierwsza cecha przystawania trójkcatów.
**Pierwsza checha przystawania trójkątów.** Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają wszystkie boki równe.

Narysuj trójkąt o tych samych o bokach używając linijki i cyrkla. Zmierz kąty tego trójkąta. Oblicz sumę kątów tego trójkąta

**Druga cecha przystawania trójkątów**. Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają dwa boki równe i kąty przyległe do tych boków równe. Sprawdzamy, że wtedy pozostałe boki muszą być równe i kąty też równe.
**Trzecia cecha przystawania trójkątów**. Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają dwa boki równe i kąt pomiędzy tymi bokami równy.

### 1.7.2 Trójkąty podobne

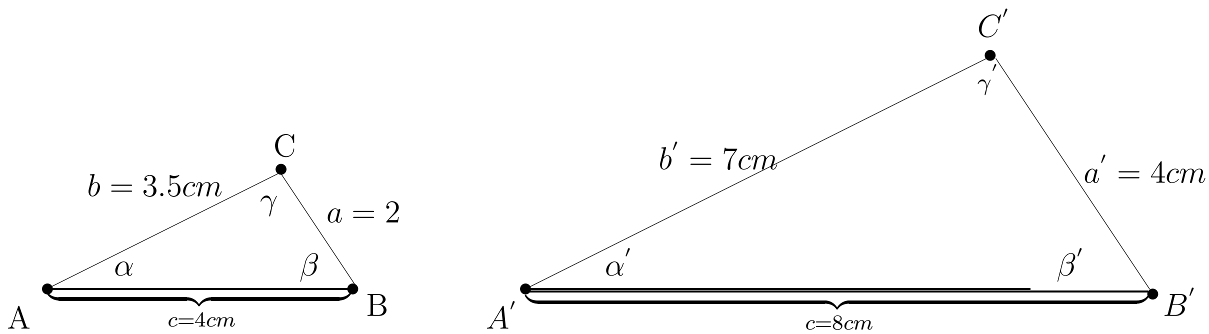
Dwa trójkąty $\Delta ABC$ i $A^{'}B^{'}C^{'}$ są podobne, piszemy

$$\Delta ABC \simeq \Delta A^{'}B^{'}C^{'}$$

jeżeli mają opowiednie boki proporcjonalne w skali proporcji $k$, to znaczy

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = k,$$
$$|AB| = k * |A^{'}B^{'}|,$$
$$|AC| = k * |A^{'}C^{'}|,$$
$$|BC| = k * |B^{'}C^{'}|.$$

Zauważmy, że niżej na rysunku trójkątów $\Delta ABC$ i $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ skala proporcji $k = 2$




Niżej podamy trzy cechy podobieństwa trójkątów.

**Pierwsza checha podobieństwa trójkątów.** Dwa trójkąty $\Delta ABC$ i $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ są podobne, jeżeli mają wszystkie boki proporcjonalne w skali proporcji $k$, to znaczy

$$|AB| = k * |A^{'}B^{'}|,$$
$$|AC| = k * |A^{'}C^{'}|,$$
$$|BC| = k * |B^{'}C^{'}|.$$

**Zadanie 1.14** *Narysuj trójkąt $\Delta ABC$ o bokach*

$$|AB| = c = 5cm, \qquad |AC| = b = 4cm, \qquad |BC| = a = 3cm$$

*używając linijki i cyrkla.*

*Narysuj drugi trójkąt $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ o bokach dwa razy większych od boków trójkąta $\Delta ABC$.*

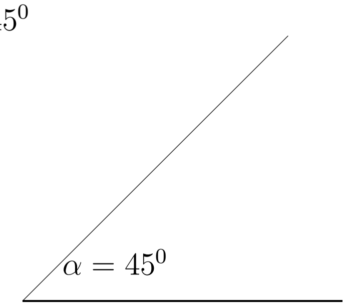
**Druga cecha podobieństwa trójkątów**. Dwa trójkąty $\Delta ABC$ i $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ są podobne, jeżeli mają dwa boki proporcjonalne w skali proporcji $k$ i kąty pomiędzy tymi bokami równ, to znaczy $\alpha = \alpha'$

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = k,$$
$$|AB| = k * |A'B'|,$$
$$|AC| = k * |A'C'|,$$

**Zadanie 1.15** *Narysuj trójkąt $\Delta ABC$ o bokach*

$$|AB| = c = 3cm, \qquad |AC| = b = 5cm,$$

*danym kącie $\alpha = 45^0$*




*używając linijki i cyrkla.*

*Narysuj drugi trójkąt $\Delta A'B'C'$ o bokach dwa razy większych od boków trójkąta $\Delta ABC$.*

**Trzecia cecha przystawania trójkątów**.
Dwa trójkąty $\Delta ABC$ i $\Delta A'B'C'$ są podobne, jeżeli mają boki $AB$ i $A'B'$ proporcjonalne w skali $k$ i kąty do nich przyległe równe, to znaczy $\alpha = \alpha'$ i $\beta = \beta'$ oraz boki $AB$ i $A'B'$ w skali $k$

$$\tfrac{|AB|}{|A'B'|} = k,$$
$$|AB| = k * |A'B'|,$$

**Zadanie 1.16** *Narysuj trójkąt $\Delta ABC$ o boku*

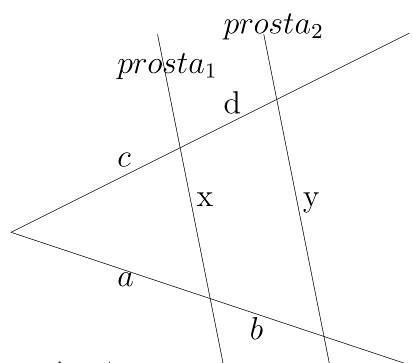
$$|AB| = c = 6cm,$$

*i danych kątach przyległych $\angle\alpha = 30^0$, $\angle\beta = 60^0$ do boku $AB$.*

*Narysuj drugi trójkąt $\Delta A'B'C'$ o bokach dwa razy większych od boków trójkąta $\Delta ABC$.*

### 1.7.3 Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta



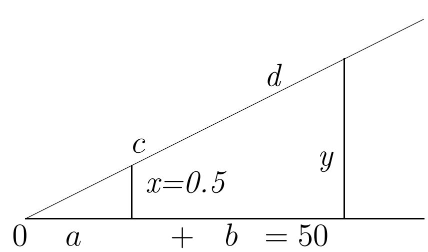

Jeżeli $prosta_1 \,||\, prosta_2$ to :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$
$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{x}{y}$$

**Przykład 1.3** *Oblicz wysokość drzewa z odległości 50m. Stosując twierdzenie Talesa obliczamy wysokość drzewa y z proporcji*

$$\frac{a}{a+b} = \frac{x}{y}, \quad y = \frac{(a+b)*x}{a}$$

*Dane:* $a + b = 50m$, *Dokonujemy pomiarów* $a = 2m$, $x = 0.5m$ *do proporcji, zobacz na rysunku.*

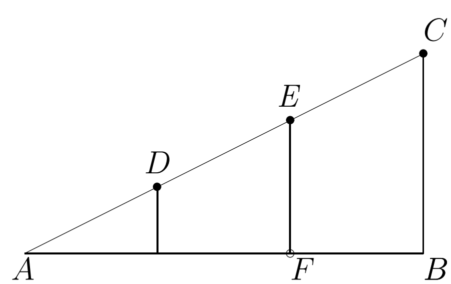



*Podstawiając dane obliczamy wysokość drzewa* $y = \dfrac{(a+b)*x}{a} = \dfrac{50*0.5}{2} = 12.5$

Twierdzenie Talesa stosujemy w zadaniach dzielenia odcinka w danej proporcji.

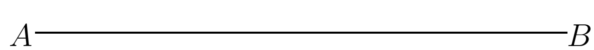
**Przykład 1.4** *Podzielić odcinek $AB$ w stosunku* $2:3$
**Rozwiązanie.** *Na ramieniu $AC$ zaznaczamy dowolną rozwartością cyrkla trzy punkty $D$, $E$ i punkt $C$. Następnie, łączymy punkt $C$ z punktem $B$ używając linijki. Rysujemy równoległe do odcinka $BC$ przechodzące przez punkty $D$ i $E$. W ten sposób dostajemy podział odcinka $AB$ punktem $F$ w stsunku* $2:3$*, Zatem, z twierdzenia Talesa mamy proporcje*

$$\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{2}{3}$$



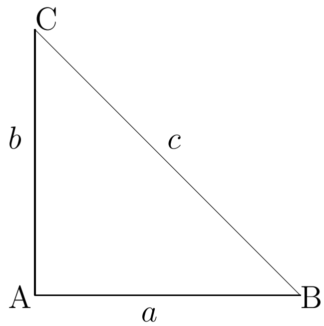

**Zadanie 1.17** *Oblicz wysokość drzewa z odległości 150m, wiedząc, że wysokość listwy geodezyjnej równa jest 2m i jej odległość od punktu pomiaru 10m.*

**Zadanie 1.18** *Podzielić odcinek $AB$ w stosunku* $1:3$




### 1.7.4 Twierdzenie Pitagorasa

Figury płaskie, twierdzenie Pitagorasa, wielokąty foremne, okrąg: kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg, miara łukowa k ątów, konsrukcje figur płaskich, figury przestrzenne granastosłupy proste, walce, stożki, ostrosłupy, sfery i kule, obliczanie objętości i pola powierzchni.
Związki miarowe w trójkącie prostokątnym wynikają ztwierdzenia Pitagorasa.



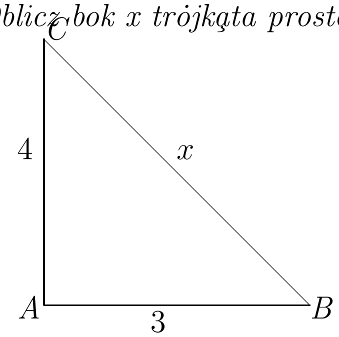

Trójkąt prostokątny $\Delta ABC$

**Twierdzenie 1.3** *W trójkącie prostokątnym suma kwadratów przyprostokątnych równa jest kwadratowi przeciwprostokątnej*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

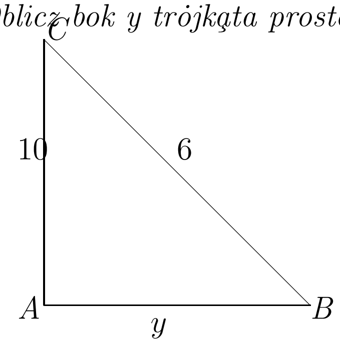
*Tutaj przez a i b oznaczone są przyprostokątne, literą c oznaczona jest przeciwprostokątna, (zobacz rysunek)*

**Przykład 1.5** *Oblicz bok x trójkąta prostokątnego*



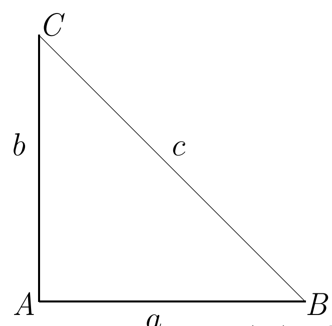

*Trójkąt prostokątny* $\Delta ABC$

**Przykład 1.6** *Oblicz bok y trójkąta prostokątnego*



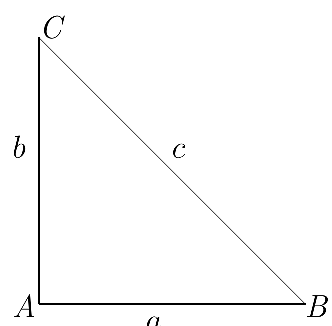

*Trójkąt prostokątny* $\Delta ABC$

**Przykład 1.7** *Oblicz przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, wiedząc, że przyprostokątne* $a = 9,\ b = 12$




*Trójkąt prostokątny* $\Delta ABC$

**Przykład 1.8** *Oblicz wszystkie boki trójkąta prostokątnego, wiedząc, że przyprostokątna* $a = 12cm$*, przyprostokątna* $b$ *jest o* $4cm$ *dłuższa od przyprostokątnej* $a$*, natomiast przeciwprostokątna* $c$ *jest dłużesza o* $8cm$ *od przyprostokątnej* $a$*.*




*Trójkąt prostokątny* $\Delta ABC$

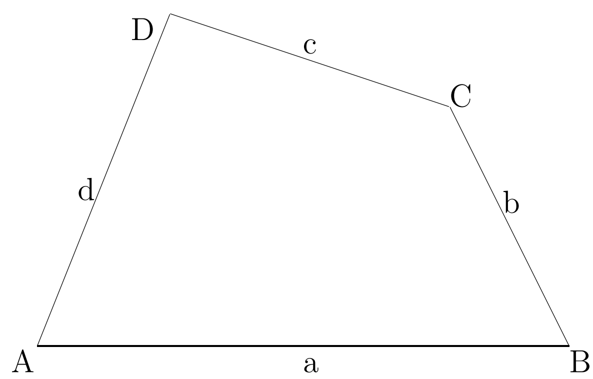
## 1.8 Czworokąty

Rozpatrzmy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A,\ B,\ C,\ D$ o czterech bokach długości $a,\ b,\ c,\ d$, i o kącie $\angle ABC$ o wierzchołku $B$, kątcie $\angle BCD$ o wierzchołku $C$, kątcie $\angle CDA$ o wierzchołku $D$.
Suma długości dowolnie wybranych trzech boków czworokąta jest nie mniejsza od długości boku czwartego, piszemy

$$|AB| + |BC| + |CD| \geq |AD|.$$

Suma kątów czworokąta równa jest $360^0$, w mierze łukowej $2\pi$, piszemy

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 360^0$$




**Zadanie 1.19** *Zmierz boki i kąty tego czworokąta. Oblicz obwód i sumę kątów czworokąta czworokąt* $ABCD$.

Rozpatrzymy następujące czworokąty

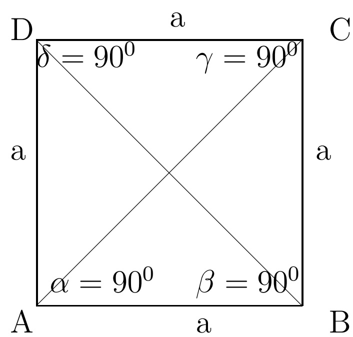
- kwadrat
- prostokąt
- trapez
- równoległobok
- romb
- deltoid
- czworokąt dowolny
- okrąg wpisany i okrąg opisany na czworokącie

10

[10] Konstrukcja kwadratu przy pomocy cyrkla i linijki opisana jest w projekcie *Figury podstawowe. Konstrukcja.*

### 1.8.1 Czworokąt foremny. Kwadrat.

Kwadrat $ABCD$ jest figurą foremną o czterych bokach równych $a$ i o czterech kątach prostych równych $90^0$ lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$.




Kwadrat ma dwie pzekątne $AC$ i $BD$, które przecinają się pod kątem prostym równym $90^0$ lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$. Z twoerdzenia Pitagorasa obliczamy długość przekątnej

$$|AC|^2 = |BC|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, \qquad |AC| = |BC| = a\sqrt{2}.$$

Promień okręgu wpisanego w kwadrat równy jestpołowie boku

$$r = \frac{a}{2}$$

Promień okręgu opisanego na kwadracie równy jest połowie przekątnej

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Pole kwadratu

$$P_{ABCD} = a * a^2, \qquad obwod\ kwadratu\ \ Ob = 4 * a.$$

**Zadanie 1.20** *Oblicz obwód Ob i pole P kwadratu, długość przekątnych, promień r okręgu wpisanego w kwadrat i promień R okręgu opisanego na kwadracie, jeżeli bok kwadratu ma długość* $a = 4.$.

### 1.8.2 Prostokąt.

Prostokąt $ABCD$ ma cztery boki parami równe

$$a = c, \; b = d,$$

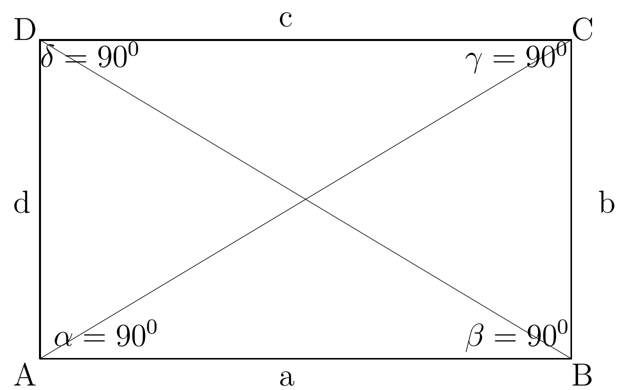
i cztery kąty proste równe $90^0$
Z twierdzenia Pitagorasa obliczmy przekątne prostokąta

$$|AC| = |BD| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pole prostokąta

$$P_{ABCD} = a * b.$$

Obwód prostokąta Ob $=2 * a + 2 * b$




Okrąg opisany na prostokącie ma promień $R$ równy połowie przekątnych

$$R = \frac{1}{2}|AC| == \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Natomiast nie istnieje okrąg wpisany w prostokąt, z wyjątkiem kwadratu, który jest szczególnym prostokątem o bokach równych.

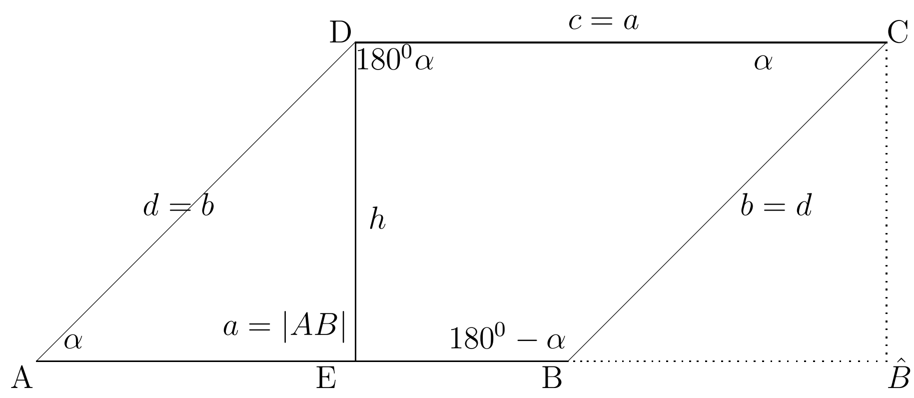
### 1.8.3 Równoległobok.

Równoległobok $ABCD$ ma cztery boki parami równe

$$a = c, \qquad b = d$$

i cztery kąty parami równe

$$\alpha = \angle DAB = \angle BCD, \qquad 180^0 - \alpha = \angle ABC = \angle CDA.$$




Wysokść równoległoboku oznavczamy literą $h$.
Pole równoległoboku

$$P_{ABCD} = a * h.$$

Istotnie, zauważmy, że pole równoległoboku $ABCD$ równe jest polu prostokąta $E\hat{B}CD$. To znaczy, że

$$P_{A\hat{B}CD} = P_{ABCD} = a * h.$$

i obwód równoległoboku

$$Ob = 2 * a + 2 * b.$$

### 1.8.4 Romb.

Romb $ABCD$ ma cztery boki równe

$$a = |AB| = BC| = |CD|$$

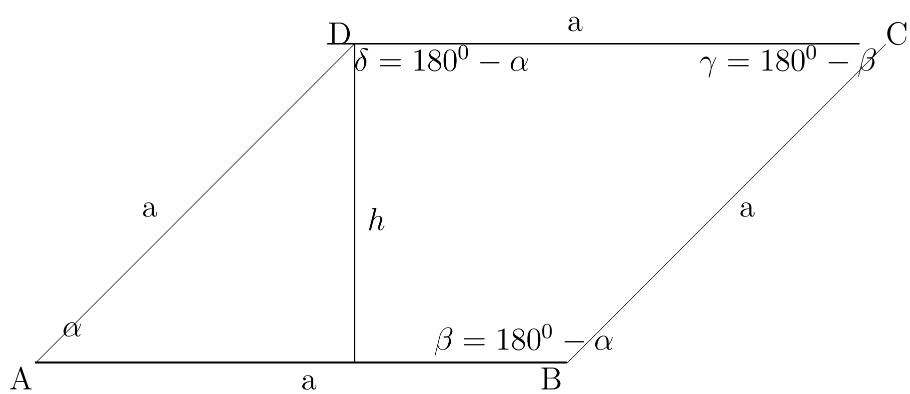
i cztery kąty parami równe

$$\alpha = \gamma, \qquad \beta = \delta.$$

Wysokść rombu oznaczamy literą $h$.
Pole rombu

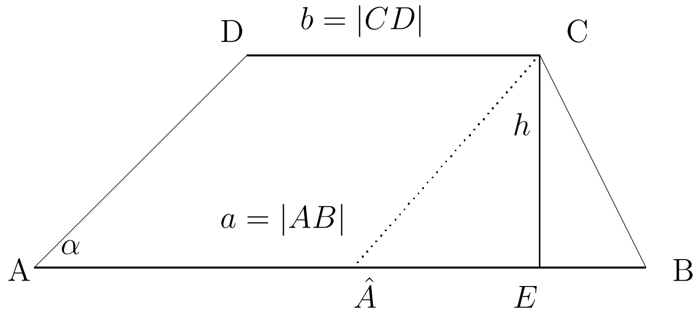
$$P = a * h$$

obwód rombu $Ob = 4 * a$.



### 1.8.5 Trapez

Trapez $ABCD$




jest czworokątem o długości podstawy dolnej $a = |AB|$ równoległym do podstawy górnej o długości $b = |CD|$.
Pole trapezu

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(a + b) * h.$$

Istotnie, zauważmy, że pole trapezu $P_{ABCD}$ równe jest sumie pola równoległoboku

$$\hat{P}_{AECD} = (b * h$$

i pola trójkąta

$$P_{\hat{A}BC} = \frac{1}{2}(a - b) * h.$$

Zatem pole trapezu

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \hat{P}_{AECD} + P_{\hat{A}BC} \\ &= b * h + \frac{1}{2}(a - b) * h \\ &= \frac{1}{2}(a + b) * h \end{aligned}$$

Obwód trapezu

$$Ob = |AB| + |BC| + |CD| + |AC|.$$

[11]

### 1.8.6 Deltoid.

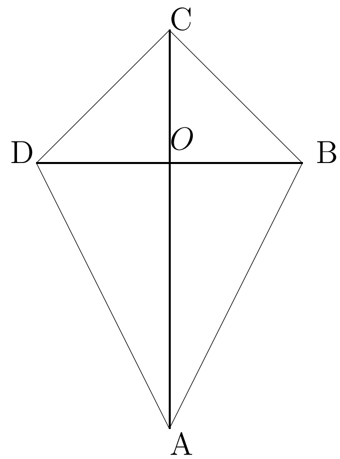
Deltoid jest czworokątem o równych bokach parami

$$|AB| = |AD|, \qquad |CD| = |AD|$$

[11] Twierdzenie o okręgu opisanym na czworokącie i wpisanym w czworokąt jest opisane w paragrafie o czworokątach Twierdzenie to dotyczy wszystkich czworokątów w tym trapezów

i o kątach $\angle ADC = \Delta ABC$

Deltoid ma dwie prostopadłe przekątne $L_1$ i $L_2$, jedna z nich jest symetralą drugiej, jak niżej na rysunku




$L_2 = |DB|$ przekątna pozioma

$L_1 = |AC|$ przekątna pionowa

Pole deltoidu równe jest połowie iloczyny przekątnych

$$P_{Deltoid} = \frac{1}{2} L_1 * L_2$$

Istotnie, zauważamy, że pole deltoidu $P_{ABCD}$ równe jest sumie pól trójkątów $\Delta ABD$ i $\Delta BCD$

$$\begin{aligned} P_{Deltoid} = P_{ABD} + P_{DBC} &= \tfrac{1}{2} L_2 * |AO| + \tfrac{1}{2} L_2 * |OC| \\ &= \tfrac{1}{2} \underbrace{(|AO| + |OC|)}_{L_1} \\ &= \tfrac{1}{2} * L_1 * L_2. \end{aligned}$$

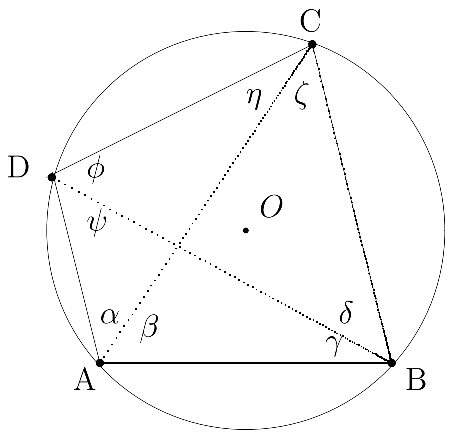
[12]

### 1.8.7 Okrąg opisany na czworokącie.

Nie na kadym czworokącie można opisać okrąg i nie w każdy czworokąt można wpisać okrąg. Warunki istnienia okręgu opisanego na czworokącie i okręgu wpisanego w czworokąt podamy niżej. Mianowicie rozpatrzmy czworokąt

[12] Twierdzenie o okręgu opisanym na czworokącie i wpisanym w czworokąt jest opisane w paragrafie o czworokątach Twierdzenie to dotyczy wszystkich czworokątów w tym deltoidu

$ABCD$ wpisany okręgu o promieniu $R$ i środku w punkcie $O$.




$\zeta = \psi$ kąty $\angle BCA = \angle BDA$ opate na łuku $\widehat{AB}$

$\eta = \gamma$ kąty $\angle BDA = \angle ACD$ opate na łuku $\widehat{AD}$

$\delta = \alpha$ kąty $\angle ABD = \angle ACD$ opate na łuku $\widehat{DC}$

$\beta = \phi$ kąty $\angle CAB = \angle CDB$ opate na łuku $\widehat{BC}$

Jak wiemy, kąty środkowe oparte na tym samym łuku są równe.
Zatem zauważamy na rysunku, że

$$\begin{aligned} \zeta = \psi \quad & \textit{oparte na luku} \quad \widehat{AB} \\ \eta = \gamma \quad & \textit{oparte na luku} \quad \widehat{AD} \\ \delta = \alpha \quad & \textit{oparte na luku} \quad \widehat{DC} \\ \beta = \phi \quad & \textit{oparte na luku} \quad \widehat{BC} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Warunek konieczny i wystarczający na to, żeby można było opisać okrąg na danym czworokącie o wierzchołkach $A, B, C, D$ podamy w formie następującego twierdzenia

**Twierdzenie 1.4** *Na czworokącie $ABCD$ o wierzchołach $A, B, C, D$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma kątów naprzeciwległych jest równa*

$$\angle ABC + \angle CDA = \angle BCA + \angle DAB \tag{1.6}$$

[13] **Dowód.** Dowód twierdzenia wytnika z równości (1.5) kątów $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \zeta$ , które tworzą przekątne z bokami czworokąta. Mianowicie sprawdzamy równość (1.6)

$$\begin{aligned} \angle ABC + \angle CDA &= \underbrace{(\delta + \gamma)}_{\angle ABC} + \underbrace{(\phi + \psi)}_{\angle CDA} \\ &= (\alpha + \eta) + (\beta + \zeta) \\ &= \underbrace{(\alpha + \beta)}_{\angle DAC} + \underbrace{(\eta + \zeta)}_{BCD} \\ &= \angle BCA + \angle DAB \end{aligned}$$

[13] Tutaj $\angle ABC$ oznacza kąt o wierzchołku $B$ i ramionach $[A, B]$ i $[A, D]$.

Wzòr na pole czworokąta opisanego na okręgu

$$P_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

gdzie długości boków

$$a = |AB|, \quad b = |BC|, \quad c = |CD|, \quad d = |DA|,$$

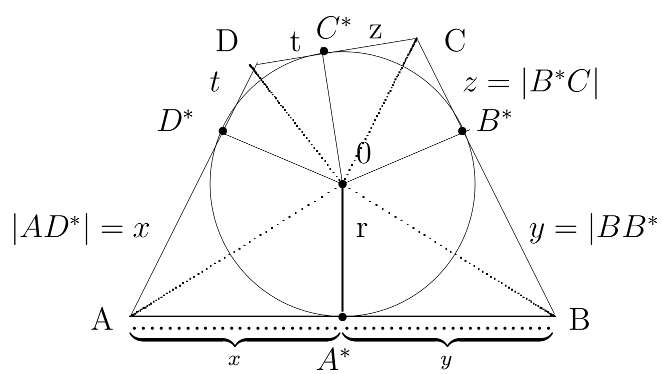
a litera $p$ oznacza połowę obwodu czworokąta

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c+d) = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CD + |AD|).$$

### 1.8.8 Okrąg wpisany w czworokąt

Opis okręgu wpisanego w czworokąt o wierzchołkach $A, B, C, D$ zacznijmy od następujących obserwacji:
(**a**) Boki czworokąta są styczne do okręgu wpisanego w punktach styczności $A^*, B^*, C^*, D^*$
(**b**) Styczne do okręgu poprowadzone z wierzchołków czworokąta wyznaczają odcinki parami ròwnej długości, piszemy

$$\begin{aligned} x = |A, A^*| = |AD^*|, \quad & y = |A^*B| = |BC^*| \\ z = |B^*C| = |CC^*|, \quad & t = |C^*D| = |DD^*| \end{aligned} \tag{1.7}$$




Warunek konieczny i wystarczający na to, żeby można było wpisać okrąg w danym czworokąt o wierzchołkach $A, B, C, D$ podamy w formie następującego twierdzenia

**Twierdzenie 1.5** *W czworokąt $ABCD$ o wierzchołach $A, B, C, D$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma długości sumy boków naprzeciwległych jest ròwna*

$$|AB| + |CD| = AD| + |BC| \tag{1.8}$$

**Dowód.** Dowód twierdzenia wynika z własności $(a)$ i $(b)$ stycznej do okręgu i z równości (1.7), parami równych boków naprzeciwległych. Mianowicie, sprawdzamy, że lewa strona równości (1.8)

$$\begin{aligned} |AB| + |CD| &= \underbrace{(x+y)}_{bok\ |AB|} + \underbrace{(z+t)}_{bok\ |CD|} \\ &= \underbrace{(x+t)}_{bok\ |AD|} + \underbrace{(y+z)}_{bok\ BC|} \\ &= |AD| + |BC|, \end{aligned}$$

równa jest prawej stronie równości (1.8).[14]

**Pole czworokąta i promień okręgu wpisanego w czworokąt.** Zauważmy, że promień $r$ okręgu wpisanego w czworokąt jest równy z wysokościami trójkątów

$$\Delta AOB, \quad \Delta BCO, \quad \Delta DCO, \quad \Delta DAO$$

spuszczonymi na boki

$$[A, B], \quad [B, C], \quad [C, D], \quad [D, A]$$

czworokąta $ABCD$.

Zatem pola tych trójkątów są równe odpowiednio

$$P_{\Delta ABO} = \tfrac{1}{2} r * |AB|$$

$$P_{\Delta BCO} = \tfrac{1}{2} r * |BC|$$

$$P_{\Delta CDO} = \tfrac{1}{2} r * |CD|$$

$$P_{\Delta DAO} = \tfrac{1}{2} r * |DA|$$

Pole czworokąta $ABCD$ równe jest sumie pól czterech trójkątów, piszemy

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{\Delta ABO} + P_{\Delta BCO} + P_{\Delta CDO} + P_{\Delta DAO} \\ &= \frac{1}{2} r * |AB| + \frac{1}{2} r * |BC| + \frac{1}{2} r * |CD| + \frac{1}{2} r * |DA| \\ &= \frac{1}{2} r (|AB| + |BC| + |CD| + |DA|) \\ &= r * p \end{aligned}$$

gdzie litera p oznacza połowę obwodu czworokąta $ABCD$.

$$p = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|).$$

[14] Tutaj korzystamy z lacznosci dodawania

### 1.8.9 Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny oparty na średnicy $AB$ okręgu
Z twiedzenia Pitagorasa wynika związek pomiędzy bokami trójkątata prostokątnego

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

Związek ten implikuje inne miary w trójkątach prostokątnych, równoramiennych i równobocznych.
Zauważmy, że trójkąty

$$\Delta\, ABC, \quad \Delta\, ADC, \quad \Delta\, DBC$$

są podobne. Zatem na przeciw równych kątów mają proporcjonalne boki.
Z proporcji

$$\frac{h}{|AD|} = \frac{|DB|}{h} \qquad \text{lub} \quad h^2 = |AD| * |DB|$$

wynika, że wysokość $h$ równa jest średniej geometrycznej rzutów przyprostokątnych na przeciwprostkątną. To znaczy

$$h = \sqrt{|AD| * |DB|}$$

## 1.9 Zastosowanienie iloczynu wektorowego do obliczania pola czworokąta dowolnego.

Pole dowolnego czworokąta $ABCD$ o danych wierzchołkach $A, B, C, D$ we współrzędnych kartezjańskich możemy obliczyć stosując iloczyn wektorowy w przestrzeni kartezjańskiej $R^3$ cf. (1.9)

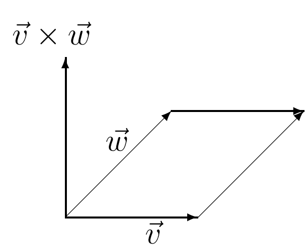
### 1.9.1 Iloczyn wektorowy w przestrzen trójwymiarowej $R^3$

Naturalnie iloczyn wektorowy wykonalny jest w przestrzeni kartezjańskiej trójwymiarowej i opisany jest w rozdziale geometrii przestrzennej. W tym rozdziale, geometrii płaskiej, stosujemy iloczyn wektorowy do obliczania pola czorokąta dowolnego.
Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad i \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

w przestrzeni trójwymiarowej

$$R^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : \ -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty\ \}$$



Wynikiem mnożenia wektorowego wektora $\vec{v}$ przez wektor $\vec{w}$ jest trzeci wector $\vec{v} \times \vec{w}$, którego wpółrzędne obliczamy z rozwinięcia Laplace'a macierzy utworzenej ze współrzędnych wektorów

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \right\}$$

Mianowicie iloczyn

$$\vec{v} \times \vec{w} = [Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\}, -Det(\left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right\}), Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right\}]$$

gdzie wyznaczniki -determinants

$$Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\} = v_2 * w_3 - v_3 * w_2,$$

$$-Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right\} = -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1),$$

$$Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right\} = v_1 * w_2 - v_2 * w_1$$

Skąd otzymamy wzór na współrzędne iloczynu wektorowego

$$\vec{v} \times \vec{w} = [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]. \tag{1.9}$$

Wektor $\vec{v} \times \vec{w}$ jest prostopadły do wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$, piszemy

$$\vec{v} \times \vec{v} \perp \vec{w}, \qquad \vec{w} \times \vec{v} \perp \vec{w}$$

Wiemy, że wektory są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, jeżeli ich iloczy skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

równy jest zero.
Zatem, sprawdzamy iloczyn skalarny

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}) &= ([v_1, v_2, v_3], [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]) \\ &= v_1(v_2 * w_3 - v_3 * w_2) - v_2(v_1 * w_3 - v_3 * w_1) + v_3(v_1 * w_2 - v_2 * w_1) \\ &= (v_1 v_2 w_3 + v_2 v_3 w_1 + v_3 v_1 w_2) - (v_1 v_3 w_2 + v_2 v_1 w_3 + v_3 v_2 w_1) = 0 \end{aligned}$$

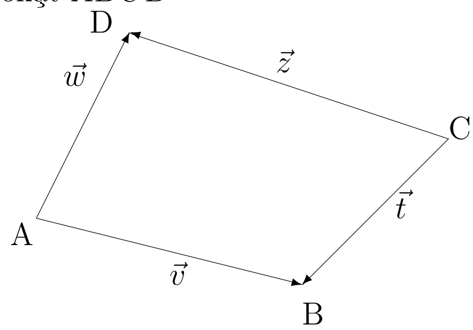
Długość wektora $\vec{v} \times \vec{w}$ równa jest polu równoległoboku o bokach $\vec{v}$ i $\vec{w}$.
[15] Zatem długość wektora

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{|v_2 * w_3 - v_3 * w_2|^2 + |-(v_1 * w_3 - v_3 * w_1)|^2 + |v_1 * w_2 - v_2 * w_1|^2}$$

[15] Długość iloczynu wektorowego $|\vec{v} \times \vec{w} = |\vec{v}| * |\vec{w}| * cos\alpha$, gdzie $\alpha$ oznacza kąt pomiędzy wektorami $\vec{v}, \vec{w}$. Pole czworokąta $P_{ABCD} = |\vec{v} \times \vec{w} = |\vec{v}| * |\vec{w}| * cos\alpha$ równe jest długości ioczynu wektorowego.

### 1.9.2 Pole czworokąta. Przykłady

Rozpatrzymy czworokąt $ABCD$




o wierzchołkach

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3)$$

$$C = (c_1, c_2, c_3), \quad D = (d_1, d_2, d_3)$$

rozpięty na wektorach

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = \vec{AD},$$

$$\vec{z} = [z_1, z_2, z_3] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [t_1, t_2, t_3] = \vec{CD},$$

gdzie współrzędne wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$, $\vec{t}$ określamy przez różnice współrzędnych wierzchołków $A, B, C, D$ czworokąta $ABCD$

$$\begin{aligned} v_1 &= b_1 - a_1, & v_2 &= b_2 - a_2, & v_3 &= b_3 - a_3, \\ w_1 &= d_1 - a_1, & w_2 &= d_2 - a_2, & w_3 &= d_3 - a_3, \\ z_1 &= b_1 - c_1, & z_2 &= b_2 - c_2, & z_3 &= b_3 - c_3, \\ t_1 &= d_1 - c_1, & t_2 &= d_2 - c_2, & t_3 &= d_3 - c_3. \end{aligned}$$

Stosując iloczyn wektorowy (cf. (1.9)) możemy obliczyć pole dowolnego czworokąta o danych współrzędnych jego wierzchołków. Mianowicie, pole czworokąta wypukłego $ABCD$ równe jest połowie sumy iloczynu wektorowego wektorów [16]

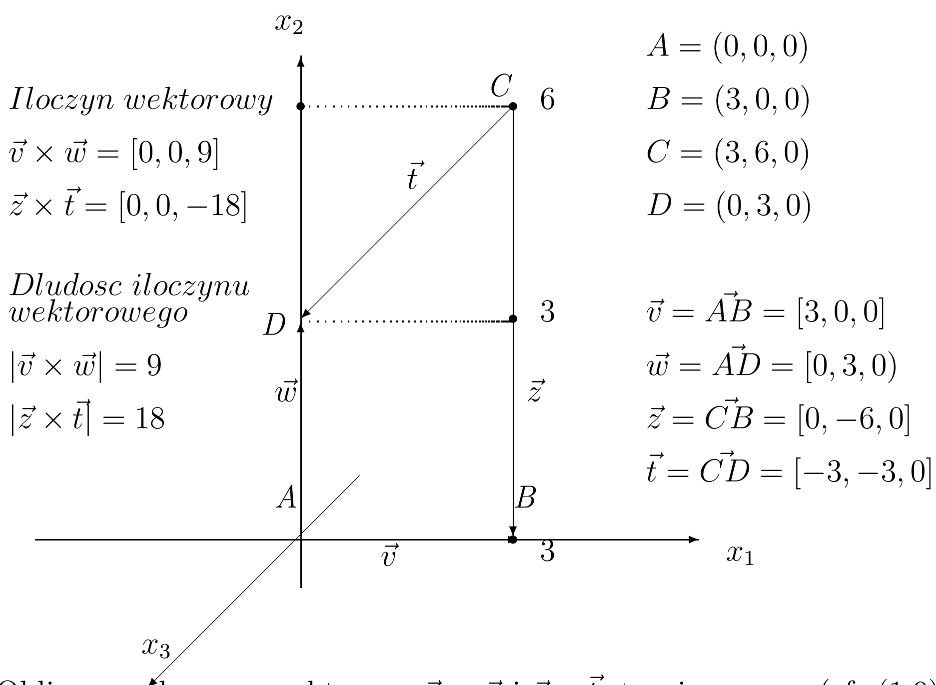
$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{z} \times \vec{t} \tag{1.10}$$

**Przykład 1.9** *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [3, 0, 0] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [0, 3, 0] = \vec{AD},$$

$$\vec{z} = [0, -6, 0] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [-3, -3, 0] = \vec{CD}$$

[16] Pole czworokąta wklęsłego równe jest różnicy iloczynów wektorowych $P_{ABCD} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{w} - \frac{1}{2}\vec{z} \times \vec{t}$




Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{z} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (1.9))

$$\begin{aligned}
\vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 3 * 0, -(3 * 0 - 0 * 0), 3 * 3 - 0 * 0] \\
&= [0, 0, 9]
\end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned}
\vec{z} \times \vec{t} &= [-6 * 0 - 3 * 0, -(0 * 0 - 3 * 0), 0 * 3 - 6 * 3] \\
&= [0, 0, -18]
\end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$ i $\vec{z}$, $\vec{t}$.
Mianowicie

$$\begin{aligned}
P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{z} \times \vec{t}| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 9^2} + \frac{1}{2}|\sqrt{0^2 + 0^2 + (-18)^2} \\
&= \frac{1}{2} * 9 + \frac{1}{2} * 18 \\
&= 4.5 + 9 = 13.5
\end{aligned}$$

[17]

Rozpatrzmy inny przykład obliczania pola czworokąta stosując iloczyn wektorowy.

[17] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych $v_1, v_2, v_3$ w przestrzeni kartezjńskiej $R^3$ obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

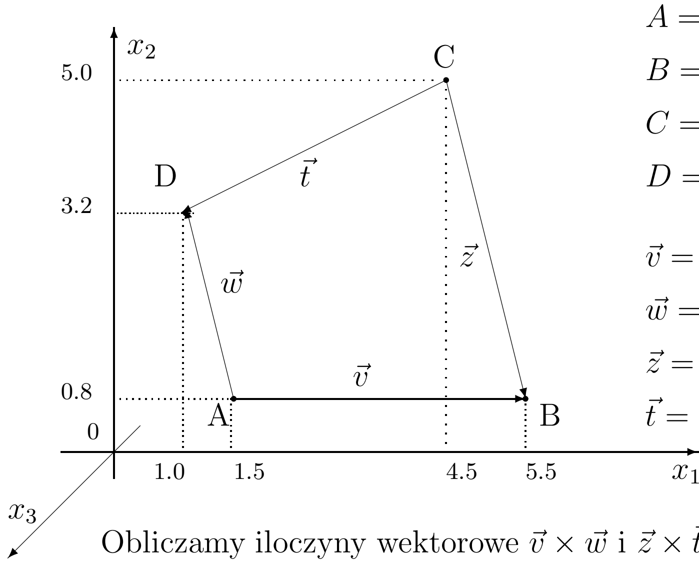
**Przykład 1.10** *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [4.0, 0, 0] = \vec{AB},$$

$$\vec{w} = [-0.5, 2.4, 0] = \vec{AD},$$

$$\vec{z} = [-1.0, 4.2, 0] = \vec{CB},$$

$$\vec{t} = [-3.5, -1.8, 0] = \vec{CD}$$




$A = (1.5, 0.8, 0)$
$B = (5.5, 0.8, 0)$
$C = (4.5, 5.0, 0)$
$D = (1.0, 3.1, 0)$

$\vec{v} = \vec{AB} = [4.0, 0, 0]$
$\vec{w} = \vec{AD} = [-0.5, 2.4, 0)$
$\vec{z} = \vec{CB} = [-1.0, 4.2, 0]$
$\vec{t} = \vec{CD} = [-3.5, -1.8, 0]$

Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{z} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (1.9))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 0 * 2.4, -(4 * 0 + 0.5 * 0), 4 * 2.4 + 0.5 * 0] \\ &= [0, 0, 9.6] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{z} \times \vec{t} &= [4.2 * 0 + 1.8 * 0, -((-1) * 0 - (-3.5) * 0), 1 * 1.8 + 4.2 * 3.5] \\ &= [0, 0, 16.5] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$ i $\vec{z}$, $\vec{t}$.
Mianowicie

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{z} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 9.6^2} + \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 16.5^2} \\ &= \frac{1}{2} * 9.6 + \frac{1}{2} * 16.5 \\ &= 4.8 + 8.25 = 13.05 \end{aligned}$$

[18]

**Zadanie 1.21** *Oblicz długości wektorẃ*

$$(i) \quad \vec{v} = [3, 0, 4], \qquad \vec{w} = [8, -6, 0]$$

$(ii)$ *Oblicz iloczyn wektorowy* $\vec{v} \times \vec{w}$ *wektorów*

$$\vec{v} = [3, 0, 4], \qquad \vec{w} = [8, -6, 0]$$

$(iii)$ *Sprawdź, że wektory*

$$\vec{v} \perp \vec{w} \times \vec{w}$$

*są prostopadłe.*

**Zadanie 1.22** *Sprawdź, że wektor*

$$\vec{w} = [w_1, w_2, 0]$$

*jest prostopadły do wektora*

$$\vec{v} \times \vec{w},$$

*gdzie wektor*

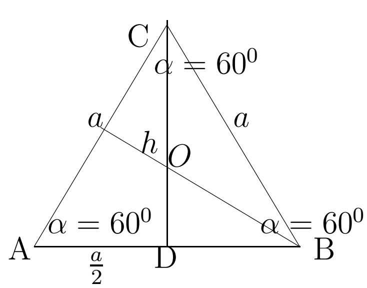
$$\vec{v} = [v_1, v_2, 0]$$

## 1.10 Figury płaskie foremne

Figurami foremnymi na płaszczyźnie nazywamy figury płaskie, które mają wszystkie boki i wszystkie kąty równe.

### 1.10.1 Trójkąt foremnym

Trójkąt równoboczny jest trójkątem foremnym
Trójkąt równoboczny ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe $\alpha = 60^0$, w mierze łukowej $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ jak na rysunku




[18]Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych $v_1, v_2, v_3$ w przestrzeni kartezjńskiej $R^3$ obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Trójkąt równoboczny $\Delta ABC$

Wysokość $h$ trójkąta $\Delta\ ABC$ jest dwusiecznną kąta $\alpha$ i dzieli podstawę $a$ na połowę w punkcie $D$. Podobnie wysokości trójkąta równobocznego spuszcone na pozostałe boki dzielą podstawę na połowy i przecinają się w punkcie $O$, to jest w środku okręgu wpisanego w trójką równoboczny. Punkt przecięcia wysokości $O$ dzieli te wysokości w stosunku $1:3$. To znaczy zachodzi następująca proporcja

$$\frac{|DO|}{|DC|} = \frac{1}{3}, \quad |DC| = h$$

Stąd mamy

$$|DO| = \frac{1}{3}h, \quad \text{i} \quad |OC| = \frac{2}{3}h$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość $h$ trójkąts $\Delta\ ABC$

$$h^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

Wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Obliczamy pole trójkąta równobocznego

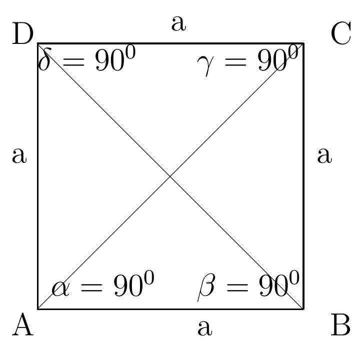
$$P = h * \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole trójkąta równobocznego o boku $a$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

### 1.10.2 Czworokąt foremny

Kwadrat $ABCD$ jest figurą foremną o czterych bokach rȯwnych $a$ i o czterech kątach prostych rȯwnych $90^0$ lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$.




Kwadrat ma dwie pzekątne $AC$ i $BD$, ktȯre przecinają się pod kątem prostym rȯwnym $90^0$ lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$. Z twoerdzenia Pitagorasa obliczamy długość przekątnej

$$|AC|^2 = |BC|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, \qquad |AC| = |BC| = a\sqrt{2}.$$

Promień okręgu wpisanego w kwadrat rȯwny jestpołowie boku

$$r = \frac{a}{2}$$

Promień okręgu opisanego na kwadracie rȯwny jest połowie przekątnej

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Pole kwadratu

$$S = a * a^2, \qquad obwod\ kwadratu\ \ Ob = 4 * a.$$

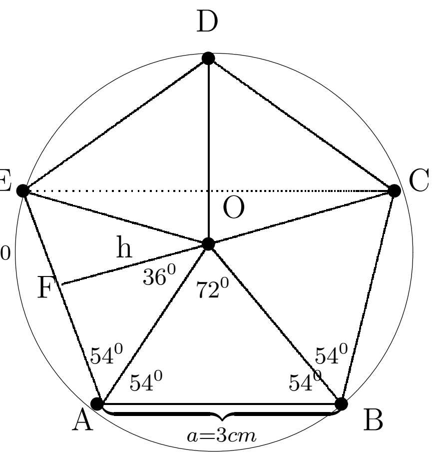
**Zadanie 1.23** *Oblicz obwȯd, długość przekątnych i pole kwadratu o boku* $a = 4$

### 1.10.3 Pięciokąt foremny

Pięciokąt foremny o bokach rȯwnych $a$ i kątach rȯwnych

$$\angle EAB = \alpha = 108^0$$

lub w mierze łukowej $\alpha = \dfrac{3\pi}{5}$ ma 5 równych przekątnych.




$\angle AOF = 36^0$

$\angle EAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = \alpha = 108^0$

**Pole pieciokąta foremnego.**Pole pięciokąta foremnego składa się z $5 - ciu$ pól trójkątów równoramiennych i przystających o wysokości $h$ i podstawie $a$. Pola jednego z pięciu trójkątów $\Delta AOE$

$$P_{\Delta AOE} = \frac{1}{2} a * h$$

gdzie wysokość

$$\begin{aligned} h = \tfrac{1}{2} a * ctg\ 36^0 &= \frac{a}{2} * \frac{1}{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} \\ &= \frac{a}{2} * \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{25 - 20}} \\ &= \frac{a}{2} * \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{a}{2} * \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{5} \end{aligned}$$

Zatem pole pięciokąta foremnego o boku $a$ obliczamy ze wzoru

$$P = 5 * P_{\Delta AOE} = 5 * \frac{1}{2} * a * h = \underbrace{\frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10 * \sqrt{5}}}_{Pole\ pieciokata\ foremnego}$$

**Promień okręgu opisanego na pieciokącie foremnym.** Promień $R = |AO|$ okręgu opisanego na pięciokącie foremnym, obliczymy z trójkcata prostokątnego $\Delta AOF$ stosując twierdzenie Pitagoroasa.

Mianowicie, kwadrat promienie $R^2$ równy jest sumie kwadratów przyprostokątnych $|FO|^2 + |FA|^2|$, pisamy

$$
\begin{aligned}
R^2 &= \underbrace{|FO|^2}_{h^2} + |FA|^2| \\
&= h^2 + (\frac{a}{2})^2 \\
&= \underbrace{(\frac{a}{10} * \sqrt{25 + 10\sqrt{5}})^2}_{h^2} + (\frac{a}{2})^2 \\
&= \frac{a^2}{100}(25 + 10\sqrt{5}) + \frac{25a^2}{100} \\
&= \frac{a^2}{100}(50 + 10\sqrt{5})
\end{aligned}
$$

Skąd obliczmy promień okręgu opisanego na pieciokącie foremnym

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{\frac{a^2}{100}(50 + 10\sqrt{5})} \\
&= \underbrace{\frac{a}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}_{R}
\end{aligned}
$$

**Promień okręgu wpisanego w pieciokąt foremny.** Promień $r = |FO|$ okręgu wpisanego w pięciokąt foremny, obliczymy z trójkcata prostokątnego $\Delta AOF$ stosując twierdzenie Pitagoroasa.
Mianowicie, kwadrat promienie $R^2$ równy jest sumie kwadratów przyprostokątnych $|FO|^2+|FA|^2|$, pisamy Zauważmy, że promień $r = |FO| = h$ okręgu wpisanego w pieciokąt foremny równy jest

$$
r = \frac{a}{10} * \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}
$$

**Przekątne pieciokąta foremnego.** Pieciokąt foremny ma 5 przekątnych równych o długości

$$
\begin{aligned}
d = |EC| &= 2a * cos\frac{\pi}{5} \\
&= 2a * \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \\
&= \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})
\end{aligned}
$$

### 1.10.4 Sześciokąt foremny

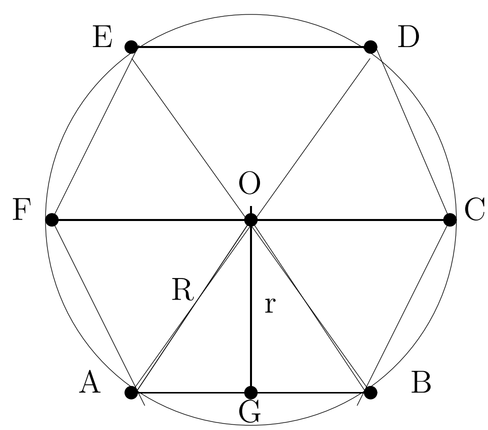
Sześciokąt foremny o sześciu bokach $a$ równych

$$
|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FE| = a = R
$$

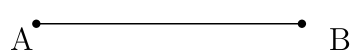
promieniowi $R$ okręgu opisanego na sześciokącie i sześciu równych kątach

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEF = \angle EFC = \angle FAB = \alpha = 120^0.$$

w mierze łukowej $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.




**Konstrukcja sześciokąta formnego przy pomocy cyrkla i linijki.** Konstrukcja sześciokąta formnego przy pomocy cyrkla i linijki jest bardzo prosta, najbardziej prosta ze wszystkich konstrukcji figur foremnych.
Mianowicie, niech bedzie dany bok szściokąta jako odcinek $[A, B]$




Stawiamy cyrkiel w dowolniie wybranym punkcie $O$, środku okręgu i rozwartością cyrkla równą odcinkowi $[A, B]$ zakreślamy okrąg o promieniu $R = |AB| = a$ równym bokowi sześciokąta $ABCDEF$.
Następnie, stawiamy cyrkiel w dowolnym punkcie okręgu $A$ i rozwartością cyrkla $R = a$ zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie $B$,dalej stawiamy cyrkiel w punkcie $B$ i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie $C$, dalej stawiamy cyrkiel w punkcie $C$ i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie $D$, dalej stawiamy cyrkiel w punkcie $D$ i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie $E$, ,dalej stawiamy cyrkiel w punkcie $E$ i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie $F$.

Łączymy punkty $A, B, C, D, E, F$ na okręgu przy pomocy linijki. W ten sposób narysowaliśmy sześciokąt foremny $ABCDEF$.
Zauważmy, że sześciokąt foremny składa się z $6 - ciu$ trójkątów przystających i równobocznych obokach równych $R$ i o wszystkich kątach równych $60^0 \sim \dfrac{\pi}{3}$.

Wszystkie z $6-ciu$ trójkątów

$$\Delta ABO,\ \Delta BCO,\ \Delta CDO,\ \Delta DEO,\ \Delta EFO,$$

mają wysokości równe $h = r = |OG|$ promieniowi okręgu wpisanego w sześciokąt. Wysokość $h$ obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego $\Delta AGO$. Mianowicie

$$h^2 = R^2 - (\frac{R}{2})^2 = \frac{3R^2}{4}, \qquad h = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Pole sześciokąta foremnego składa się z 6-ciu pól trójkątów równobocznych o bokach równych $a = R = |AO|$.
Pole jednego trójkąta równobocznego równe jest

$$P_\Delta = \frac{1}{2}a * h = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Zatem, pole sześciokąta równe jest

$$P = 6 * P_\Delta = 6 * \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \underbrace{\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}}_{pole\ P\ szesciokata}.$$

Obwód sześciokąta foremnego równy jest

$$Ob = 6 * a \qquad lub \qquad Ob = 6 * R, \ \ bo \quad a = R.$$

### 1.10.5 Ośmiokąt foremny

Ośmiokąt foremny o ośmiu bokach równych

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FE| = |FG| = a$$

i o ośmiu równych kątach rówmych

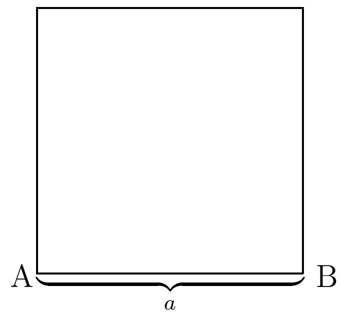
$$\begin{aligned} \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE &= \angle DEF = \angle EFG = \angle FGH \\ &= \angle GHA = \angle HAB = \alpha = 135^0 \end{aligned}$$

w mierze łukowej $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

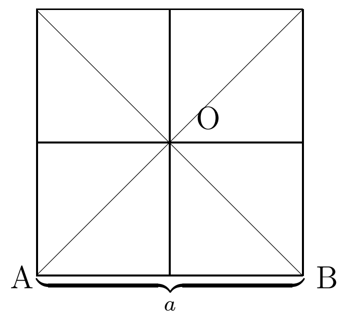
### 1.10.6 Konstrukcja ośmiokąta foremnego.

Konstrukcja ośmiokąta formnego o danym boku wykonamy przy pomocy cyrkla i linijki.
1. Konstruujemy kwadrat o danym boku $a = |AB|$ przy pomocy cyrkla i linijki. [19]

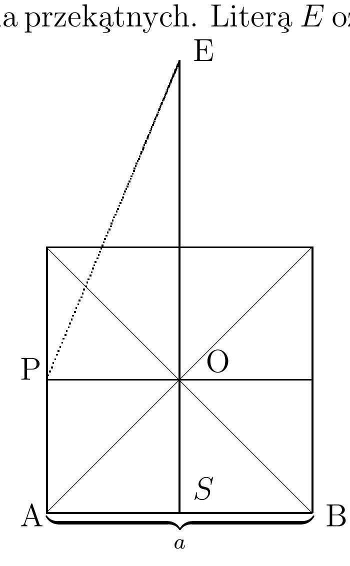
[19] Konstukcje elementarne opisane w oprzednich paragrafach




2. Rysujemy przekątne i symetralne boków kwadratu. Przekątne i symetralne boków kwadratu przecinają się w jednym punkcie $O$.




3. Na przdłużeniu symetralnej podstawy kwadratu odkładamy rozwartością cyrkla równą połowie przekątnej, to jest odcinek $|AO|$, stawiając cyrkel w punkcie $O$ przecięcia przekątnych. Literą $E$ oznaczamy wierzchołek ośmiokąta.



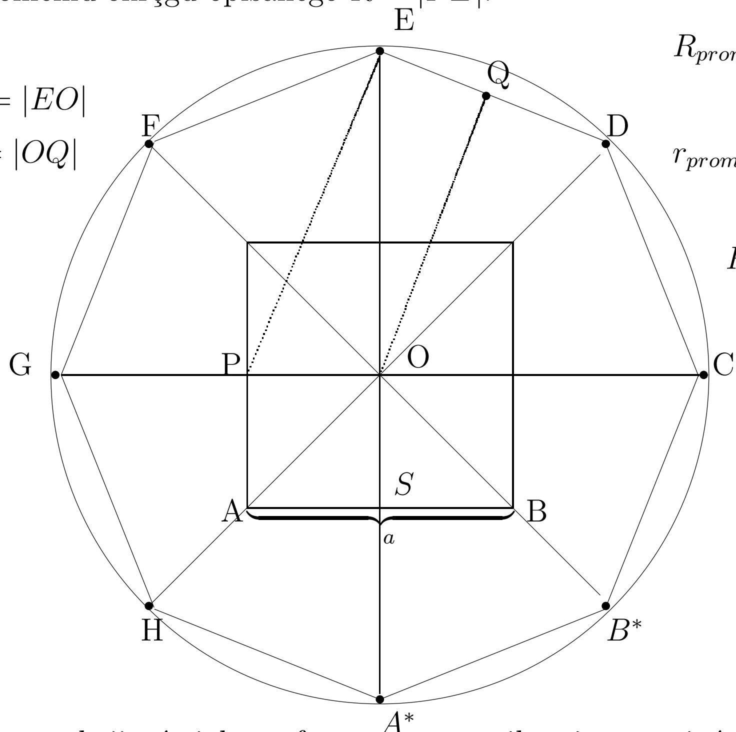

4. Rozwartością cyrkla równą promieniowi $R = |PE|$ rysujemy okrąg stawiając cyrkiel w punkcie $O$. Następnie przedłużamy przekątne kwadratu i środkowe boków do punktów przecięcia $A^*, B^*, C, D, E, F, G, H$ z okręgiem, to jest do wierzchołków ośmiokąta formnego $A^*B^*CDEFH$ o danym boku $a = |AB|$. Łączymy wierzhołki $A^*, B^*, C, D, E, F, G, H$ ośmiokąta przy pomocy linijki. W ten spoób skonstruowaliśmy ośmiokąt foremny

$$A^*B^*CDEFGH$$

o promeniu okręgu opisanego $R = |PE|$.

$R = |EO|$

$r = |OQ|$




$$R_{promien_R} = \underbrace{a\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}}_{prom.okr.\ opisan.}$$

$$r_{promien_r} = \underbrace{\frac{a}{2}(1+\sqrt{2})}_{prom.\ okr.wpisan.}$$

$$P_{pole} = \underbrace{2a^2(1+\sqrt{2})}_{pole\ osmiok.}$$

Z konstrukcji ośmiokąta foremnego wynika, że promień $R = |EO|$ okręgu opisanego na ośmiokącie równy jest przeciwprostokątnej $R = |EO|$ trójkąta prostokątnego $\Delta QEO$.

$$\angle OEP = 22.5^0 \sim \frac{\pi}{8}, \qquad \angle EPO = 67.5^0 \sim \frac{3\pi}{8}.$$

**Pole ośmiokąta foremnego.** Zauważmy, że øśmiokąt foremny składa się z $8-miu$ trójkątów przystających i równoramiennych o równych rammionach promieniowi $R$ okręgu opisanego na ośmiokącie i o wszystkich kątach równych $135^0 \sim \frac{3\pi}{4}$.
Wszystkie z $8-miu$ trójkątów

$$\Delta A^*B^*O,\ \Delta B^*CO,\ \Delta CDO,\ \Delta DEO,$$

$$\Delta EFO,\ \Delta FGO,\ \Delta GHO,\ \Delta HA^*O$$

mają wysokości równe $h = r = |OQ|$ promieniowi $r = h$ okręgu wpisanego w ośmiokąt.
Stosując twierdzenia Pitagorasa do trójkąta prostokątnego $\Delta OQE$ obliczamy kwadrat wysokości

$$\begin{aligned} h^2 = |OE|^2 - |QE|^2 &= \underbrace{(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sqrt{2})^2 + (\frac{a}{2})^2}_{R^2} - (\frac{a}{2})^2 \\ &= \frac{a^2}{4}(1+\sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

Skąd obliczamy wysokości i promień okręgo wpisanego w ośmiokąt

$$h = r = \frac{a}{2}(1+\sqrt{2})$$

**Promień $R$ okręgu opisanego na ośmiokącie.** Promień okręgu opisanego na ośmiokącie wynika z konstrukcji ośmiokąta foremnego. Jego wartość obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąt prostokątnego $\Delta OQE$. Mianowicie kwadrat przeciwprostokątnej $R = |EO|$ rówmny jest

$$\begin{aligned} R^2 = |EO|^2 &= |QO|^2 + |ES|^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2 \\ &= (\frac{a}{2}(1+\sqrt{2}))^2 + (\frac{a}{2})^2 \\ &= \frac{a^2}{4}(3+2\sqrt{2}) + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{2}\sqrt{2} \\ &= a^2(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Skąd obliczamy promień okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym

$$R = a\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

**Pole ośmiokąta foremnego.** Pole ośmiokąta foremnego składa się z $8-miu$ pól trójkątów równoramiennych o podstawie długości $a$ i bokach długości $R$. Pole jednego trójkąta równoramiennego równe jest

$$P_\Delta = \frac{1}{2}a * h = \frac{a^2}{4}(1+\sqrt{2})$$

Zatem, pole ośmiokąta równe jest

$$P = 8 * P_\Delta = 8 * \frac{a^2}{4}(1+\sqrt{2}) = \underbrace{2a^2(1+\sqrt{2})}_{pole\ P\ osmiokata}.$$

Obwód ośmiokąta foremnego równy jest $Ob = 8 * a$.

Promień $r$ okręgu wpisanego w ośmiokąt i promień $R$ okręgu opisanego na śmiokącie foremnym o danym boku, obliczymy również stosując związki trygonometryczne w trójkącie prostokątnym $\Delta OQE$. Mianowicie, promień okręgu wpisanego w ośmiokąt

$$r = \frac{1}{2}a * ctg\frac{\pi}{8}$$

Wartość funkcji $ctg\frac{\pi}{8}$ obliczamy stosując tożsamość trygonometryczną

$$ctg\alpha - \frac{1}{ctg\alpha} = ctg2\alpha$$

dla $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$

$$\begin{aligned} ctg\tfrac{\pi}{8} - tg\tfrac{\pi}{8} &= \frac{cos\frac{\pi}{8}}{sin\frac{\pi}{8}} - \frac{sin\frac{\pi}{8}}{cos\frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{cos^2\frac{\pi}{8} - sin\frac{\pi}{8}}{sin\frac{\pi}{8} * cos\frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{2 * cos\frac{\pi}{4}}{sin\frac{\pi}{4}} = 2ctg\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Skąd mamy ròwność

$$ctg\frac{\pi}{8} - \frac{1}{tg\frac{\pi}{8}} = ctg\frac{\pi}{8} \qquad lub \qquad ctg^2\frac{\pi}{8} - 2ctg\frac{\pi}{8} - 1 = 0$$

Dla $z = ctg\frac{\pi}{8}$ znajdujemy wartość $z$ rozwiązując ròwnanie kwadratowe

$$z^2 - 2z - 1 = 0, \quad wyroznik\ \ \Delta = 8, \quad wartosc \quad z = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Zatem $ctg\frac{\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$ i promień okręgu wpisanego w ośmiokąt foremny

$$r = \frac{1}{2} a * ctg\frac{\pi}{8} = \underbrace{\frac{a}{2}(1+\sqrt{2})}_{r}$$

**Zadanie 1.24** *Mając promień $r = 8$ ośmiokąta foremnego, oblicz promień $R$ okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym.*

**Zadanie 1.25** *Mając dany bok $a = 3cm$ oblicz promień $r$ okręgu wpisanego i promień $R$ okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym.*

**Zadanie 1.26** *Skonstruuj ośmiokąt fororemny o boku $a = 3cm$ przy pomocy cyrkla i linijki. Zmierz promień $r$ okręgu wpisanego w ośmiokąt i promień $R$ kręgu opisanego na ośmiokącie foremnym.*