SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

Silnia liczb naturalnych $n! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * ...n$

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 1 * 2 = 2$
$3! = 1 * 2 * 3 = 6$
$4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$
$5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$
$6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$
$7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040$
....
....
$(n-1)! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * \cdots * (n-1)$
$n! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1) * n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Kombinatoryka [1]

Tadeusz STYŠ

WARSZAWA 2020

[1] Rozdział 15. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.

Contents

Chapter 1

Kombinatoryka

Kombinatoryka obejmuje takie pojęcia jak silnia liczby naturalnej n, permutacje, wariacje bez powtòrzeń i wariacje z powtòrzeniami.
Niżej podany jest opis tych pojęć z licznymi przykładami i ćwiczeniami.

1.0.1 Silnia liczby naturalnej $n!$

Iloczyn kolejnych liczb naturalnych aż do liczby n włącznie nazywamy silną liczby n i oznaczmy symbolem $n!$. Zatem mamy

$$n! = 1 * 2 * 3 * \cdots * (n-1) * n$$

Przyjmujmy że $0! = 1$
Wypiszmy kilka silni liczb naturalnych

$$\begin{aligned}
&0! = 1\\
&1! = 1\\
&2! = 1 * 2 = 2\\
&3! = 1 * 2 * 3 = 6\\
&4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24\\
&5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120\\
&6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720\\
&7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(n-1)! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * \cdots * (n-1)\\
&n! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1) * n
\end{aligned}$$

1.0.2 Przykłady

Obliczanie silni wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 1.1 *Oblicz wartość ułamka*

$$\frac{5! \; * \; 7!}{4! \; * \; 6!}$$

Rozwiązanie:
Łatwo uprościmy ten ułamek pisząc

$$5! = 4! * 5, \quad 7! = 6! * 7$$

$$\frac{5! \ * \ 7!}{4! \ * \ 6!} = \frac{4! * 5 \ * \ 6! * 7}{4! \ * \ 6!} = 5 * 7 = 42$$

Przykład 1.2 *Oblicz i uprość ułamek*

$$\frac{n!}{(n-1)}!$$

Rozwiązanie:
Łatwo uprościmy ten ułamek pisząc

$$\begin{aligned} (n-1)! &= 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1) \\ n! &= 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1) * n \\ \frac{n!}{(n-1)!} &= \frac{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1) * n}{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1)} = n \end{aligned}$$

Zadanied 1.1 *Oblicz wartość ułamka*

$$\frac{3! \ * \ 5! \ * \ 7! \ * 9!}{2! \ * \ 4! \ * \ 6! \ * 8!}$$

Zadanied 1.2 *Uprość ułamek*

$$\frac{2n!}{(2n-3)!}$$

1.0.3 Permutacje

Permutacją elementów zbioru nazywamy ich ustawienie w pewnej kolejności. Dwie permutacje składające się z tych samych elementów są różne, jeżeli różnią się kolejnością elementów.

Na przykład:

Permutacje cyfr liczby dwucyfrowej 23 składają się z tych samych cyfr 2 i 3 tworzą dwie różne permutacje

$$23 \quad 32 \qquad ilosc\, permutacji \quad 2! = 2$$

Zauważmy, że innych permutacji cyfr 2 i 3 nie ma.

Podobnie wypiszmy wszystkie permutacje cyfr liczby trzycyfrowej 257

$$\begin{matrix} 257 & 275 \\ 527 & 572 \\ 725 & 752 \end{matrix} \qquad ilosc\, permutacji \quad 3! = 6$$

Przykład 1.3 *Wypisz wszystkie permutacje zbioru dwu-elementowego ab*

$$ab \quad ba \qquad ilosc\, permutacji \quad 2! = 2$$

Zauważmy, że innych permutacji liter a i b nie ma.

Podobnie wypiszmy wszystkie permutacje zbioru trzy-elementowego abc

$$\begin{array}{ll} abc & acb \\ bac & bca \\ cab & cba \end{array} \qquad ilosc\ permutacji \quad 3! = 6$$

Ogólnie, ilość permutacji n-elementowego zbioru równa jest $n!$

Zadanied 1.3 *Wypisz wszystkie permutacje cyfr liczby trzy-cyfrowej* 391

Zadanied 1.4 *Wypisz wszystkie permutacje elementów zbioru cztero-elementowego* $ABCD$

1.0.4 Wariacje

Wariacją k-elementową ze zbioru n-elomentowego ($n \geq k$) nazywamy ciąg k elementów wybranych ze zbioru n-elementowego. Ciąg k-elementowy jest wariacją z powtórzeniami, jeżeli w tym ciągu mogą powtarzać się elementu zbioru z którego tworzone są wariacje. Natomiast k-elementową wariacją bez powtórzeń jest ciąg w którym nie ma powtórzeń elementów zbioru n-elementowego. W wariacjach bez powtórzeń i w wariacjach z powtórzeniami kolejność elementów jest ważne, to znaczy dwie wariacje są różne, jeżeli składają się z tych samych elementów ale różnią sią kolejnością elementów.

1.0.5 Wariacje z powtórzeniami.

Pojęcie wariacji bez powtórzeń lub z powtórzeniami dobrze illustruje proces losowania ze zbioru n-elementowego, który zawiera tylko elementu różne.

Mianowicie, wariacje z powtórzeniami tworzymy w ten sposób, że wylosowany element wrzucamy spowrotem do urny przed losowaniem następnego elementu. Losujemy tak długo aż wylosujemy k-elementów. W ten sposób otrzymamy ciąg k-elementów w którym może być wylosowany ten sam element co najwyżej k-razy.

Podobnie tworzymy k-elementowe wariacje bez powtórzeń z tą różnicą, że wylosowanego elementu nie wrzucamy spowrotem do urny przed losowaniem następnych elementów. W ten sposób otrzymujemy k-elementową wariacje w której wszystkie elementy są różne, to znaczy nie ma elemetów powtórzonych.

Ilość możliwych k- elementowych wariacji z powtórzeniami utworzynych ze zbioru n-elementowego obliczamy ze wzoru

$$V_n^k = n^k$$

1.0.6 Przykłady

Pojęcie wariacji z powtórzaniemi i obliczanie ilości k-elementowych wariacji z powtórzaniami wybranymi ze zbioru n-elementowgo illustrujemy i wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 1.4 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe z powtórzeniami ze zbioru też 2-elementowego. Łatwo znajdujemy

$$\begin{matrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{matrix}$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych utworzonych cyfra 1 i 2 to ilość wariacji z powtórzeniami $V_2^2 = 2^2 = 4$

Przykład 1.5 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe z powtórzeniami ze zbioru 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

$$\begin{matrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{matrix}$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych utworzonych cyfra $1,\ 2,\ 3$ to ilość wariacji z powtórzeniami $V_3^2 = 3^2 = 9$

Przykład 1.6 *Wypisz wszystkie liczby trzycyfrowe utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby trzycyfrowe to są wariacje 3-elementowe z powtórzeniami ze zbioru też 3-elementowego. Łatwo znajdujemy liczby trzycyfrowe

$$\begin{matrix} 111 & 122 & 113 \\ 121 & 122 & 123 \\ 131 & 132 & 133 \\ 211 & 212 & 213 \\ 221 & 122 & 123 \\ 231 & 132 & 233 \\ 311 & 312 & 313 \\ 321 & 322 & 323 \\ 331 & 332 & 333 \end{matrix}$$

Odpowiedź: Ilość liczb trzycyfrowych utworzonych cyfra $1,\ 2,\ 3$ to ilość wariacji z powtórzeniami $V_3^3 = 3^3 = 27$

Zadanied 1.5 *Wypisz wszystkie wariacje 2-elementowe z powtórzeniami utworzone ze zbioru 3-elementowego* $\{a,\ b,\ c\}$.

Zadanied 1.6 *Wypisz wszystkie wariacje 3-elementowe z powtórzeniami utworzone ze zbioru 3-elementowego* $\{a,\ b,\ c\}$.

Zadanied 1.7 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr* $\{2,\ 5,\ 7,\ 9\}$.

1.0.7 Wariacje bez powtòrzeń

Wariacja k-elementowa bez powtòrzeń to ciąg elementòw ròżnych wybranych ze zbioru n-elementowego ($1 \leq k \leq n$). Jeżeli $k = n$ to wariacja bez powtòrzeń nazywa się permutacją. Liczba wszystkich k-elementowych wariacji bez powtòrzeń wybranych ze zbioru n-elementowego określona jest wzorem:

$$W_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1) * (n-k+2) * \cdots * (n-1) * n$$

lub pisząc ilozyn w odwrotnej kolejności jego czynnikòw mamy wzòr

$$W_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n * (n-1) * \cdots * (n-k) * (n-k+1).$$

1.0.8 Przykłady

Pojęcie wariacji bez powtòrzeń i obliczanie ilości k-elementowych wariacji bez powtòrzeń wybranych ze zbioru n-elementowgo illustrujemy i wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 1.7 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o ròżnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe bez powtòrzeń wybrane ze zbioru też 2-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

$$12 \quad 21$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych o ròżnych cyfrach utworzonych z cyfr 1 i 2 to ilość wariacji bez powtòrzeń. W tym przypadku ròwna jest ilości permutacji $W_2^2 = 2! = 2$

Przykład 1.8 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o ròżnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe bez powtòrzeń wybrane ze zbioru 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

$$\begin{array}{cc} 12 & 13 \\ 21 & 23 \\ 31 & 32 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych o ròżnych cyfrach utworzonych cyfr 1, 2, 3 to ilość wariacji bez powtòrzeń

$$W_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6.$$

Przykład 1.9 *Wypisz wszystkie liczby trzycyfrowe o ròżnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby trzycyfrowe to są wariacje 3-elementowe bez powtòrzeń wybrane ze ze zbioru też 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby trzycyfrowe o ròżnych cyfrach

$$\begin{array}{cc} 123 & 132 \\ 213 & 231 \\ 312 & 321 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr $1,\ 2,\ 3$ to ilość wariacji bez powtórzeń. W tym przykładzie to jest ilość permutacji $W_3^3 = 3! = 6$

Zadanied 1.8 *Wypisz wszystkie wariacje 2-elementowe bez powtórzeń utworzone ze zbioru 3-elementowego* $\{a,\ b,\ c\}$.

Zadanied 1.9 *Wypisz wszystkie wariacje 3-elementowe bez powtórzeń utworzone ze zbioru 3-elementowego* $\{a,\ b,\ c\}$.

Zadanied 1.10 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr* $\{2,\ 5,\ 7,\ 9\}$.

Zadanied 1.11 *Wypisz wszystkie wariacje bez powtórzeń 2-elementowe wybrane ze zbioru 4-elementowego* $\{a,\ b,\ c,\ d\}$.

1.0.9 Kombinacje

Kombinacją k-elementową wybraną ze zbioru n-elementowego nazywamy k-elementowy podzbiór zbioru n-elementowego. Zatem w kombinacji kolejność elementów jest nie ważna. To znaczy, że dwie kombinacje są różne tylko wtedy gdy różnią się co namniej jednym elementem.

Ilość kombinacji k-elementowych wybrach ze zbioru n-elementowego obliczmy ze wzoru

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

lub stosując symbol Newtona piszemy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zatem ilość kombinacji k-elementowych wybranych ze zbioru n-elementowego równa jest ilości k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego.

1.0.10 Przykłady

Pojęcie kombinacji i obliczanie ilości k-elementowych kombinacji wybranych ze zbioru n-elementowgo illustrujemy i wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 1.10 *Ile można utworzyć par do gry w szachy w klasie liczącej 20 uczniów, żeby każdy uczeń grał tylko raz z każdym wybranym uczniem?*

Rozwiązanie:
Ilość par utworzonych z 20 uczniów równa jest ilości kombinacji 2-elementowych ze zbioru 20-elementowego, gdyż dwie pary są różne tylko wtedy gdy różnią się co najmniej jednym elementem, czyli każda para jest 2-elementowym podzbiorem.
Każdy uczeń może dobrać partmera do gry w szachy na $20 - 1 = 19$ sposobów. Zatem ilość par różnych równa się $\frac{19 * 20}{2} = 190$.
Ilość kombinacji 2-elementowych ze zbioru 20-elementowego obliczamy również ze wzoru

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{19 * 20}{2} = 190$$

Przykład 1.11 *W klasie jest 15 uczniów. Na ile sposobów można wybrać* *(i) trzech przedstawicieli*

(ii) czterech przedstawicieli

Rozwiązanie (i):
Dwie trójki są różne, jeżeli różnią się co namniej jednym uczniem, kolejność wyboru uczniów do trójki jest nie ważna. Zatem pytanie jest ile można utworzyć 3-elementowych kombinacji ze zbioru 15-elementowego lub ile można utworzyć 3-elementowych podzbiorów ze zbiroru 15-elementowego ?
Obliczamy ze wzoru:

$$C_{15}^{3} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{13*14*15}{6} = 13*7*5 = 455$$

Odpowiedź: Ilość możliwych przedstawicieli uczniów w grupach po 3 równa jest 455 trójek
Podobne jest rozwiązanie *(ii)*

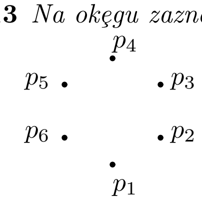
Przykład 1.12 *Ile jest możliwych wyników w grze "Duży Lotek", jeżeli wybieramy* 6 *liczby z* 49 *liczb ?*

Rozwiązanie:
Ilość możliwych wyników równa jest ilości kombinacji 6-elementowych wybranych ze zbioru 49-elementowego.
Zatem obliczamy stosując wzór

$$C_{49}^{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{43*44*45*46*47*48*49}{1*2*3*4*5*6} = 13983816$$

Odpowiedź: W "Dużym Lotku" ilość możliwych wyników równa jest 13983816

Przykład 1.13 *Na okęgu zaznaczono sześć punktów* $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$



Wielokąty o wierzchołkach na okęgu

Ile można narysować różnych wielokątów w tym

(a) trójkątów

(b) czworokątów

(c) pięciokątów

(d) sześciokątów

o wierzchołkach na okręgu w punktach $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$

Rozwiązanie:
Dwa wielokąty są różne, jeżeli różnią się co najmniej jednym wierzchołkiem. Podobnie dwie kombinacje są różne, jeżeli różnią się co najmniej jednym elementem.
Zatem ilość trójkątów równa jest ilości 3-elemntowych komabinacji wybranych ze zbioru

6-elementowego. Ilość możliwych trójkątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{1*2*3*4*5*6}{1*2*3*1*2*3} = \frac{4*5*6}{1*2*3} = 4*5 = 20.$$

Podobnie ilość czworokątów równa jest ilości 4-elemntowych komabinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych czworokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{1*2*3*4*5*6}{1*2**3*4*1*2} = \frac{5*6}{1*2} = 15.$$

Ilość pięciokątów równa jest ilości 5-elemntowych komabinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych pięciokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^5 = \frac{6!}{5!(6-5)!} = \frac{1*2*3*4*5*6}{1*2*3*4*5*1} = \frac{6}{1} = 6.$$

Ilość sześciokątów równa jest ilości 6-elemntowych komabinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych sześciokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^6 = \frac{6!}{6!(6-6)!} = \frac{1*2*3*4*5*6}{1*2*3*4*5*6*0!} = 1, \quad gdyz \quad 0! = 1.$$