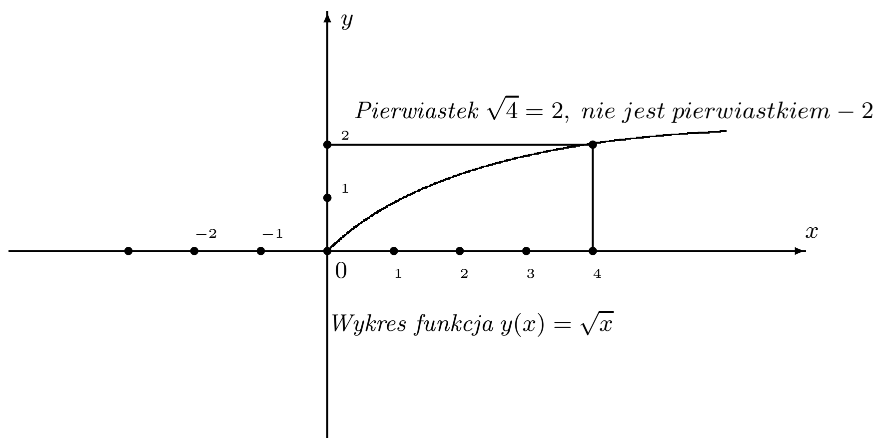
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16



Funkcja pierwiastek arytmetyczny [1]

Tadeusz STYŠ

WARSZAWA 2020

[1] Rozdział 12. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.

Chapter 1

Pierwiastki arytmetyczne $\sqrt[n]{a}$

Operacja wyciąganie pierwiastka stopnia n z liczby a jest odwrotną operacją do potęgowania, jeżeli operacja odwrotna jest wykonalna w liczbach rzeczywistych.

Zacznijmy od określenia pierwiastka arytmetycznego, to znaczy pierwiastka kwadratowego.

Definition 1.1 *Pierwiestkiem kwadratowym z liczby nieujemnej $a \geq 0$ nazywamy liczbę nieujemną $b \geq 0$, która spełnia równość*

$$b^2 = a.$$

Pierwiastek kwadratowy z liczby $a \geq 0$ oznaczamy symbolem

$$b = \sqrt{a}.$$

Przykład 1.1 *Pierwiastekiem kwadratowym z liczby $a = 4$ jest liczba $b = 2$, ponieważ liczba jest dodatnia 2 i spełnia równość*

$$2^2 = 4.$$

Piszemy

$$\sqrt{4} = 2.$$

Również liczba ujemna liczba -2 spełnia równość

$$(-2)^2 = 4,$$

Jednak liczba -2 nie jest pierwiastkiem arytmetycznym, kwadratowym z liczby 4, z definicji.

Ogólnie, rzeczywiste pierwiastki stopni parzystych

$$n = 2k, \ k = 1, 2, 3, ... :$$

nie istnieją z liczb ujemnych. W szczególności, pierwiastek kwadratowy z liczb ujemnych nie istnieje w zbiorze liczb rzczywistych.

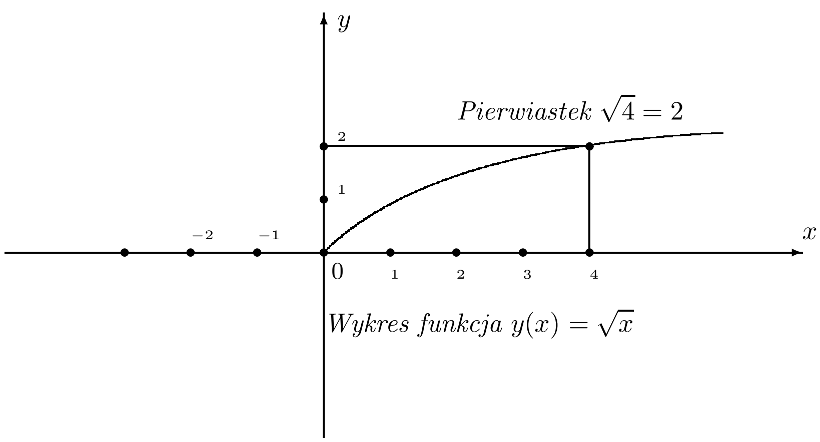
1.1 Funkcja pierwiastek kwadratowy

Podobnie określamy funkcję pierwiastek kwadratowy.

Definition 1.2 *Wartość nieujemna $y \geq 0$ funkcji pierwiastek kwadratowy*

$$y = \sqrt{x},$$

równa jest pierwiastkowi kwadratowemu z liczby nieujemnej $x \geq 0$.
Zatem funkcja piewrwiastek kwadratowy jest dobrze określona dla argumentu $x \in [0, \infty)$ i wartości $y \in [0, \infty)$ należących do półprostej $[0, \infty)$.



Przykład 1.2 *Uprość wyrażenie przez rozkład liczby pod pierwiastkiem na czynniki pierwsze*

$$(i) \quad \sqrt{200}, \qquad (ii) \quad \sqrt{144}$$

Rozwiązanie.
(i)

$$\sqrt{200} = \sqrt{2 * 100} = \sqrt{2 * 10^2} = 10\sqrt{2}$$

(ii)

$$\sqrt{432} = \sqrt{3 * 144} = \sqrt{3 * 12^2} = 12\sqrt{3}$$

Przykład 1.3 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\begin{aligned} \frac{(10 - \sqrt{10})(10 + \sqrt{10})}{\sqrt{10}} &= \frac{100 - 10}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{90}{\sqrt{10}} \quad | * \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{90\sqrt{10}}{10} \\ &= 9\sqrt{10} \end{aligned}$$

Przykład 1.4 *Uprość wyrażenie przez rozkład na czynniki pierwsze liczby pod pierwiastekiem*

$$\sqrt{432} - \sqrt{48}$$

Rozwiązanie.
Rozkład liczb 432 *i* 48 na czynniki pierwsze

$$\begin{array}{r|l} 432 & 2 \\ 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Skąd otrzymujemy rozkład liczb na czynniki piewrwsze

$$432 = 2^4 * 3^3, \quad 48 = 2^4 * 3$$

Uproszczenie wyrażenia

$$\begin{aligned} \sqrt{432} - \sqrt{48} &= \sqrt{2^4 * 3^3} - \sqrt{2^4 * 3} \\ &= 3\sqrt{16 * 3} - \sqrt{16 * 3} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Przykład 1.5 *Uprość wyrażenie*

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{90} - \sqrt{40}}{\sqrt{10}} &= \frac{\sqrt{9 * 10} - \sqrt{4 * 10}}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{\sqrt{3^2 * 10} - \sqrt{2^2 * 10}}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{3\sqrt{10} - 2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1 \end{aligned}$$

1.2 Algorytm cyfra po cyfrze obliczania pierwiastka kwadratowego

Zacznijmy opis algorytmu od przykładów.

Przykład 1.6 *oblicz przybliżoną wartość pierwiastaka* $\sqrt{2}$ *z dokładnością* 4 *znaki po przecinku.*

Schemat algorytmu obliczania pierwiastaka kwadratowego z liczby $a = 2.0 > 0$ dodatniej jest podobny do schemtu dzielenia liczb całkowitych.

1. W pierwszym kroku, cyfry liczby $a = 2,0$ uzupełniamy zerami i dzielimy na grupy po dwie w lewo od przecinka i w prawo od przecinka, jak niżej

$$\sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00}$$

2. Znajdujemy największą liczbę p taką, że p^2 jest mniejszy od liczby o dwóch pierszych cyfrach liczby a. W tym przykładzie

$$p^2 \leq a = 2.$$

Jasne, że dla $a = 2$ liczba $p = 1$, ponieważ $p^2 = 1^2 < 2$.
Natomiast liczba $p = 2$ już jest za duża, $p^2 = 2^2 = 4$ jest większa od $p = 2$.
Zatem, liczbę $p = 1$ piszemy nad kreską, jak niżej

$$\begin{array}{lcc}
\quad 1. & & cyfry \\
\sqrt{02,00\,00\,00\,00} & | & 1
\end{array}$$

Iloczyn $p * 1 = 1 * 1 = 1$ odejmujemy od liczby 02, jak w pisemnym dzieleniu

$$\begin{array}{llll}
\quad 1. & & & cyfry\ \sqrt{a} \\
\sqrt{02,00\,00\,00\,00} & & & | \\
01 & | & & | \\
--- & | & r_1 = 100 & |\ 1 \\
0100 & | & & |
\end{array}$$

3. Następną cyfrę liczby $\sqrt{2}$ znajdujemy dopisując do liczby $2 * p = 2 * 1$ cyfrę jedności x dla której iloczyn

$$y = (20p + x) * x \leq r_1 = 100. \tag{1.1}$$

W ten sposób cyfry liczby p zwiększamy o jedną cyfrę x, którą obliczamy, w tym przykładzie, przez podstawienie $p = 4$ do równania (1.1)

$$y = (20 * 4 + 4) * 4 = 96.$$

Cyfrę 4 dopisujemy do cyfry 1. nad kreską po przecinku, dalej wykonujemy operacje odejmowania jak w dzieleniu pisemnym

$$\begin{array}{llll}
\quad 1.4 & & & cyfry\ \sqrt{a} \\
\sqrt{02,00\,00\,00\,00} & & & | \\
01 & | & & | \\
--- & | & r_1 = 100 & |\ x = 1 \\
\;100 & | & & | \\
\;096 & | & r_2 = 20 * 4 + 4 = 96 & |\ x = 4 \\
\;--- & | & & \\
\;000400 & | & &
\end{array}$$

4. Następną cyfrę liczby $p = 1.4$ znajdujemy w podobny sposób.
Mianowicie, liczbę $p = 14$ mnożymy przez 2 i dopisujemy do iloczynu cyfrę x dla której wartość wyrażenia

$$(20p + x) * x = (20 * 14 + 1) * 1 = 281 \leq 400$$

jest największa, a mniejsza od 400. Łatwo sprawdzimy, że $x = 1$.

Cyfrę $x = 1$ dopisujemy do liczby $p = 1.4$ nad kreską. Dalej wykonujemy operacje odejmowania jak w dzieleniu pisemnym

$$\begin{array}{llll}
\ \ 1.41 & & & cyfry\ \sqrt{a} \\
\sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00} & & & | \\
01 & | & & | \\
--- & | & r_1 = 100 & |\ x = 1 \\
\ \ 100 & | & & | \\
\ \ \ \ 96 & | & r_2 = 20*4+4 = 96 & |\ x = 4 \\
--- & | & & | \\
\ \ \ \ 400 & | & & | \\
\ \ \ \ 281 & | & r_3 = (20*14+1)*1 = 281 & |\ x = 1 \\
--- & | & & | \\
\ \ \ \ 191 & | & & |
\end{array}$$

Cyfrę 4 dopisujemy do cyfry 1. nad kreską po przecinku, dalej wykonujemy operacje odejmowania jak w dzieleniu pisemnym

$$\begin{array}{llll}
\ \ 1.4 & & & cyfry\ \sqrt{a} \\
\sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00} & & & | \\
01 & | & & | \\
--- & | & r_1 = 100 & |\ x = 1 \\
100 & | & & | \\
096 & | & r-2 = 20*4+4 = 96 & |\ x = 4 \\
--- & | & & \\
000400 & | & &
\end{array}$$

5. Następną cyfrę liczby $p = 1.41$ znajdujemy w podobny sposòb.
Mianowicie, liczbę $p = 141$ mnożymy przez 2 i dopisujemy do iloczynu cyfrę x dla ktòrej wartość wyrażenia

$$(20p + x) * x = (20 * 141 + 4) * 4 = 11256 \leq 11900$$

jest największa, a mniejsza od 11900. Łatwo sprawdzimy, że $x = 4$.
Cyfrę $x = 4$ dopisujemy do liczby $p = 1.41$ nad kreską. Dalej wykonujemy operacje odejmowania jak w dzieleniu pisemnym

$$\begin{array}{llll}
\ \ 1.414 & & & cyfry\ \sqrt{a} \\
\sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00} & & & | \\
01 & | & & | \\
--- & | & r_1 = 100 & |\ x = 1 \\
\ \ 100 & | & & | \\
\ \ \ \ 96 & | & r_2 = 20*4+4 = 96 & |\ x = 4 \\
--- & | & & | \\
\ \ \ \ 400 & | & & | \\
\ \ \ \ 281 & | & r_3 = (20*14+1)*1 = 281 & |\ x = 1 \\
--- & | & & | \\
\ \ \ \ 11900 & | & & | \\
\ \ \ \ 11296 & | & r_3 = (20*14+1)*1 = 281 & |\ x = 4 \\
--- & | & & | \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 604 & | & & |
\end{array}$$

6. Następną cyfrę liczby $p = 1.414$ znajdujemy w podobny sposòb.
Mianowicie, liczbę $p = 1414$ mnożymy przez 2 i dopisujemy do iloczynu cyfrę x dla ktòrej

wartość wyrażenia

$$(20p + x) * x = (20 * 1414 + 2) * 2 = 56564 \leq 60400$$

jest największa, a mniejsza od 60400. Łatwo sprawdzimy, że $x = 2$.

Cyfrę $x = 2$ dopisujemy do liczby $p = 1.414$ nad kreską. Dalej wykonujemy operacje odejmowania jak w dzieleniu pisemnym

1.4142		$cyfry\ \sqrt{a}$
$\sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00}$		
01		
$---$	$r_1 = 100$	$x = 1$
100		
96	$r_2 = 20 * 4 + 4 = 96$	$x = 4$
$---$		
400		
281	$r_3 = (20 * 14 + 1) * 1 = 281$	$x = 1$
$---$		
11900		
11296	$r_3 = (20 * 141 + 1) * 1 = 281$	$x = 4$
$---$		
60400		
56564	$r_3 = (20 * 1414 + 2) * 2 = 56564$	$x = 2$
$---$		
3836		

Kończąc obliczenia z dokładnością 4 cyfry po przecinku, otrzymujemy przybliżoną wartość pierwiastka $\sqrt{2} \approx 1.4142$.
Jasne, że możemy kontynuować ten proces obliczenia $\sqrt{2}$, żeby otrzymać większą dokładność niż 4.

1.2.1 Równaia z wyrażeniem $\sqrt{x}$

Rozwiązywanie równań z wyrażeniem $\sqrt{x}$ wyjaśniamy w następujących przykładach:

Przykład 1.7 *Rozwiąż równanie:*

$$x = \sqrt{x}, \qquad x \geq 0.$$

Rozwiązanie. Naturalnie rozwiązania szukamy w dziedzinie tego równania, to jest w przedziale $[0, \infty)$ liczb nieujemnych. Podnosząc stronami do kwadratu to równanie, otrzymamy równanie nie równoważne

$$x^2 = x, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{1.2}$$

które ma sens liczbowy dla wszystkich liczb rzeczywistych włączając liczby ujemne.
Łatwo znajdujemy rozwiązanie

$$\begin{aligned} & x - x^2 = 0, \quad x(x-1) = 0, \qquad x = 0, \\ & \text{lub} \\ & x - 1 = 0, \qquad x = 1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Sprawdzmy, że oba pierwiastki $x = 0$ lub $x = 1$ należą do dziedziny $[0, \infty)$. Zatem to równanie ma dwa rozwiązania $x = 0,\ x = 1$.

Przykład 1.8 *Rozwiąż równanie*

$$\sqrt{2x} = \sqrt{x-1} \tag{1.4}$$

Rozwiązanie.
Zauważamy, że równanie (1.4) jest określone dla wyrażenia pod pierwiastkiem $2x \geq 0$, gdy $x \geq 0$ oraz dla wyrażenia po prawej stronie $x - 1 \geq 0$, gdy $x \geq 1$.
Zatem dziedziną tego równania jest półprosta $[1, \infty)$.
Podnosząc stronami równanie (1.4) do kwadratu otrzymamy równanie nie równoważne

$$2x = x - 1,$$

którego rozwiązanie

$$x = -1$$

nie należy do dziedziny równania (1.4), piszemy $x = -1 \notin [1, \infty)$.
Odpowiedź: Równanie (1.4) nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych.

Przykład 1.9 *Rozwiąż równanie:*

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1, \qquad x \geq 1. \tag{1.5}$$

Rozwiązanie. Naturalnie rozwiązania szukamy w dziedzinie tego równania, to jest w przedziale $(1, \infty)$, gdy $x + 1 \geq 0$ i $x - 1 \geq 0$.

Podnosząc stronami do kwadratu to równanie, otrzymamy równanie nie równoważne

$$\begin{aligned} &(x+1) - 2\sqrt{(x+1)(x-1)} + (x-1) = 1 \\ &\text{lub} \\ &2x - 2\sqrt{x^2-1} = 1 \end{aligned} \tag{1.6}$$

które ma sens liczbowy dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \leq -1$ lub $x \geq 1$ włączając liczby ujemne mniejsze od -1. Zatem równanie (1.5) ma różną dziedzinę od dziedziny równań (1.6).
Równanie (1.6) napiszmy w postaci

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2} - x, \qquad x \geq 1.$$

Dalej, podnosząc jeszcze raz ostatnie równanie stronami do kwadratu, otrzymamy równanie również nie równoważne

$$\begin{aligned} &x^2 - 1 = (\frac{1}{2} - x)^2, \\ &\text{lub} \\ &x^2 - 1 = \frac{1}{4} - x + x^2, \\ &\text{lub,} \\ &x - \frac{5}{4} = 0, \end{aligned}$$

które ma sens liczbowy dla wszystkich liczb rzeczywistych.
Rozwiązaniem ostatniego równania jest liczba $x = \frac{5}{4} > 1$, która należy do dziedzny równania.
Sprawdzamy, że $x = \frac{5}{4}$ jest rozwiązaniem ròwnania (1.5)

$$\sqrt{\frac{5}{4}+1} - \sqrt{\frac{5}{4}-1} = 1, \quad \sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

1.3 Pierwiastek kubiczny $\sqrt[3]{a}$

W odròżnieniu od pierwiastkòw stopni parzystych, istnieją rzeczywiste ujmne pierwiastki stopni nieparzystych

$$n = 2k+1,\ k = 1, 2, 3, ...,$$

z liczb ujemnych.

Mianowicie, rozpatrzmy pierwiastek kubiczny, gdy $n = 3$.

Definition 1.3 *Pierwiastekiem kubicznym ($n = 3$) z liczby a dodatnie lub ujemnej jest liczba*

$$b = \sqrt[3]{a} \quad lub \quad b = a^{\frac{1}{3}}$$

ktòra spełnia ròwność

$$b^3 = a$$

Na przykład dla $a = 8$ lub $a = -8$ pierwiastek kubiczny

$$b = \sqrt[3]{8} = 2, \qquad bo \qquad b^3 = 2^3 = 8,$$

$$b = \sqrt[3]{-8} = -2 \qquad bo \qquad b^3 = (-2)^3 = -8$$

Niżej w tabeli podane są pierwiastki kubiczne niektòrych liczb

a	-125	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64	125
$y = \sqrt[3]{a}$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

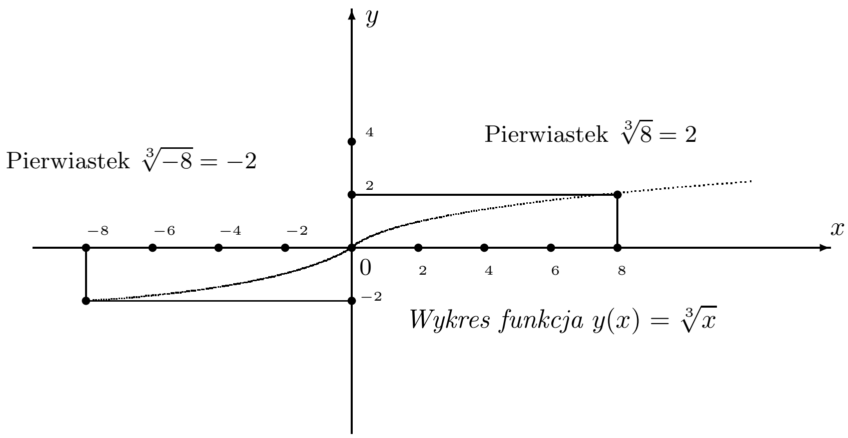
1.4 Funkcja pierwiastek kubiczny $y = \sqrt[3]{x}$

Podobnie jak funkcję pierwiastek kwadratowy, określamy funkcję pierwiastek kubiczny.

Definition 1.4 *Wartość y funkcji pierwiastek kubiczny*

$$y = \sqrt[3]{x},$$

równa jest pierwiastkowi kubicznemu z liczby $x \in (-\infty, \infty)$.
Zatem funkcja piewrwiastek kubicznywy jest dobrze określona dla argumentu $x \in [-\infty, \infty)$ i wartości $y \in [-\infty, \infty)$ należących do prostej $(-infty, \infty)$.



1.5 Przykłady wyrażeń z pierwiastakami stopnia $n = 3$

Przykład 1.10 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{64}}$$

Rozwiązanie.
Zauważamy, że $81 = 3^3 \;\; i \;\; 64 = 2^6$.
Obliczamy

$$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{3}{4}.$$

Przykład 1.11 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{3} - 4}$$

Rozawiązanie.
Wiadomo, że

$$81 = 3^4, \quad 64 = 2^6$$

Zatem wartość wyrażenia

$$\frac{\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{64}}{3\sqrt[3]{3} - 4} = \frac{\sqrt[3]{3^3} - \sqrt[3]{2^6}}{3\sqrt[3]{3} - 4} = \frac{3\sqrt[3]{3} - 4}{3\sqrt[3]{3} - 4} = 1$$

Przykład 1.12 *Uprość wyrażenie przez rozkład liczby pod pierwiastkiem na czynniki pierwsze*

$$(i) \quad \sqrt[3]{192}, \quad (ii) \quad \sqrt[3]{648}$$

Rozwiązanie.
(i)

$$\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{3 * 64} = \sqrt[3]{3 * 2^6} = \sqrt[3]{3 * 4^3} = 4\sqrt[3]{3}$$

(ii)

$$\sqrt[3]{648} = \sqrt[3]{8 * 81} = \sqrt[3]{2^3 * 3^4} = 2\sqrt[3]{3^3 * 3} = 2 * 3\sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3}$$

Przykład 1.13 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{(100-\sqrt[3]{1000})(100+\sqrt[3]{1000})}{\sqrt[3]{1000}}$$

Rozwiązanie.
Zauważamy, że $\sqrt[3]{1000} = 10$ oraz stosujemy wzór na rżnię kwadratów

$$\begin{aligned}\frac{(100-\sqrt[3]{1000})(100+\sqrt[3]{1000})}{\sqrt[3]{1000}} &= \frac{(100-\sqrt[3]{10^3})(100+\sqrt[3]{10^3})}{10}\\ &= \frac{(100-10)(100+10)}{10}\\ &= \frac{100^2-10^2}{10} = \frac{10000-100}{10} = 990\end{aligned}$$

1.6 Pierwiastek arytmetyczny stopnia n

Ogólnie, pierwiastek arytmetyczny stopnia n określamy jako operację odwrotną do operacji potęgowania określoną dla liczb rzeczywistych nieujemnych.

Definition 1.5 *Pierwiestkiem arytmetycznym n-tego stopnia z liczby nieujemnej $a \geq 0$ nazywamy liczbę nieujemną $b \geq 0$, która spełnia równość*

$$b^n = a, \qquad n = 2, 3, 4, ...;$$

Pierwiastek arytmetyczny z liczby $a \geq 0$ oznaczamy symbolem

$$b = \sqrt[n]{a}.$$

Niżej podajemey pierwiastki arytmetyczne z niektórych liczb nieujemnych.

Przykład 1.14

$$\begin{array}{lllll} \textit{Dla } n=2, & a=256, & \sqrt{256}=16, & b=16, & 16^2=256,\\ \textit{Dla } n=3, & a=512, & \sqrt[3]{512}=8, & b=8, & 8^3=512,\\ \textit{Dla } n=4, & a=256, & \sqrt[4]{256}=4, & b=4, & 4^4=256,\\ \textit{Dla } n=5, & a=1024, & \sqrt[5]{1024}=4, & b=4, & 4^5=1024,\end{array}$$

1.7 Działania na pierwiastkach

Niżej w tabeli podane są wzory operacji na pierwiastkach

$\sqrt[n]{a^n} = a$	$a \geq 0$	$a^{\frac{n}{n}} = a$
$\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$	$a \geq 0$	$b \geq 0$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$a \geq 0$	$b > 0$
$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$	$a \geq 0$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Na przykład

$\sqrt[n]{2^n} = 2$	$a = 2 \geq 0$	$2^{\frac{n}{n}} = 2^1 = 2$
$\sqrt[2]{4 * 9} = \sqrt[2]{4} * \sqrt[2]{9} = 2 * 3 = 6$	$a = 4 \geq 0$	$b = 9 \geq 0$
$\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{5}{4}$	$a = 125 \geq 0$	$b = 64 > 0$
$\sqrt[4]{3^8} = (\sqrt[4]{3})^8$	$a = 3 \geq 0$	$\sqrt[4]{3^8} = 3^{\frac{8}{4}} = 3^2 = 9$

Przykład 1.15 *Obliczamy wartość wyrażenia*

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{4096}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{2^{12}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{12}{2}}} = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2 = 4$$

1.8 Zadania

Zadanie 1.1 *Oblicz wartość wyrażenia przez rozkład liczby pod pierwiastkiem na czynniki pierwsze*

$$(i) \quad \sqrt{300}, \quad (ii) \quad \sqrt{169}$$

Zadanie 1.2 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{(20 - \sqrt{10})(20 + \sqrt{10})}{\sqrt{3}}$$

Zadanie 1.3 *Oblicz wartość wyrażenia przez rozkład na czynniki pierwsze liczby pod pierwiastekiem*

$$\sqrt{3072}$$

Zadanie 1.4 *Uprość wyrażenie*

$$\frac{\sqrt{160} - \sqrt{90}}{\sqrt{10}}$$

Zadanie 1.5 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{512}}$$

Zadanie 1.6 *Oblicz wartość wyrażenia przez rozkład liczby pod pierwiastkiem na czynniki pierwsze*

$$(i) \quad \sqrt[3]{384}, \quad (ii) \quad \sqrt[3]{1296}$$

Zadanie 1.7 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{(20 - \sqrt[3]{1000})(20 + \sqrt[3]{1000})}{\sqrt[3]{1000}}$$

Zadanie 1.8 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3^6}}}{\sqrt[3]{\sqrt{2^6}}}$$

Zadanie 1.9 *Rozwiąż równanie*

$$\sqrt{x+1} = x$$

Zadanie 1.10 *Rozwiąż równanie*

$$\sqrt{2x-1} = 1$$

Zadanie 1.11 *Rozwiąż równanie*

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = 2$$