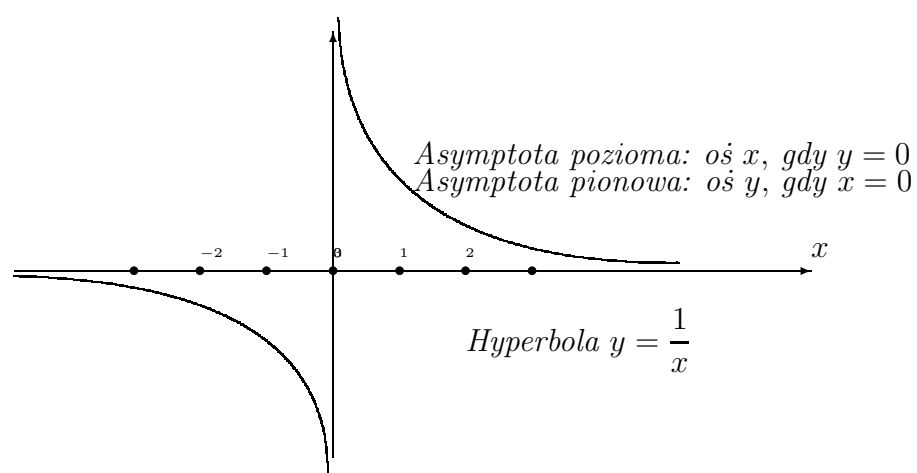


SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16



Funkcje wymierne ¹

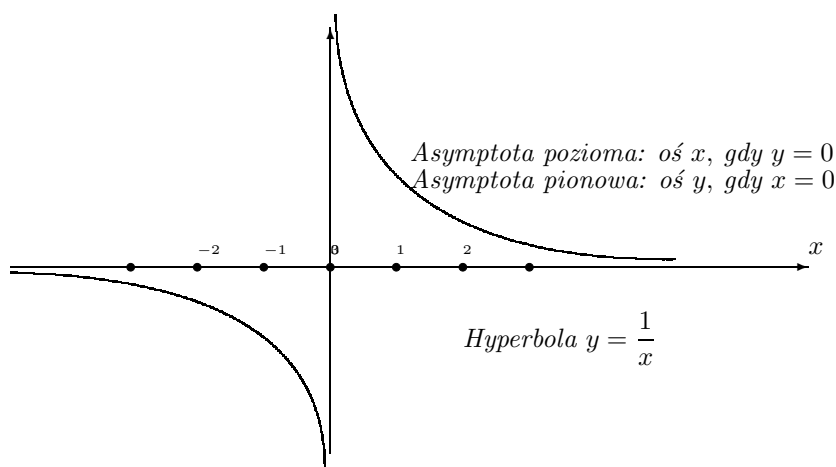
Tadeusz STYŚ

WARSZAWA 2020

¹Rozdział 11. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.

Chapter 1

Funkcje wymierne



1.1 Określenie funkcji wymiernej

Naturalnym rozszerzeniem pojęcia wielomianów są funkcje wymierne. Mianowicie, iloraz wielomianów

$$w(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}, \quad q_m(x) \neq 0 \quad (1.1)$$

stopni n i m jest funkcją wymierną.

Zauważmy, że jeżeli mianownik $q_m(x) = \text{constant} \neq 0$ jest liczbą różną od zera, to funkcja wymierna jest wielomianem stopnia n .

Zatem dziedziną funkcji wymiernych $w(x)$ jest zbiór tych liczb rzeczywistych

$$x \in R = (-\infty, \infty),$$

dla których mianownik $q_m(x) \neq 0$ jest różny od zera, piszemy

$$\text{Dziedzina } w(x): \quad D = \{x \in (-\infty, \infty) : \text{takich ze } q_m(x) \neq 0\}$$

1.2 Przykłady funkcji wymiernych

Niżej rozpatrzemy kilka przykładów standardowych funkcji wymiernych.

1.2.1 Hyperbola

Najprostrzą funkcją wymierną jest hyperbola w położeniu kanonicznym na płaszczyźnie kartezjańskiej w układzie współrzędnych x, y

$$h(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

Podamy następujące własności hyperboli $h(x)$:

1. dziedzinę,
2. zbiór wartości,
3. asymptoty hyperboli $y = h(x)$,
4. wykres hyperboli $y = h(x)$.

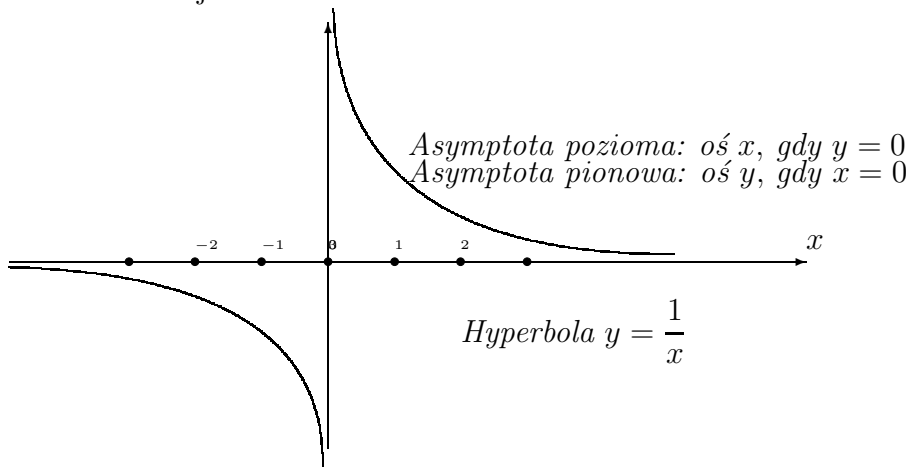
Dziedziną funkcji wymiernej $h(x)$ jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera.

$$\text{Dziedzina funkcji } h(x) : D = \{x \in (-\infty, \infty) : x \neq 0.\}$$

Zbiorem wartości funkcji wymiernej $h(x)$ jest również zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera bez punktu $x = 0$, gdyż $\frac{1}{x} \neq 0$ jest określona dla $x \neq 0$.

$$\text{Zbiór wartości funkcji } y = h(x) : \{y \in (-\infty, \infty), \text{ takich że } x \neq 0 \text{ i } y \neq 0.\}$$

Zatem funkcja $h(x)$ nie osiąga wartości zero, $h(x) \neq 0$ dla wszystkich wartości argumentu $x \neq 0$ dla których jest określona. Wykres Hyperboli w postaci kanonicznej



Zauważmy, że ta hyperbola ma dwie asymptoty poziomą oś x i pionową oś y .

Istotnie, gdy argument x dąży do dodatniej lub ujemnej nieskończoności, piszemy

$$x \rightarrow \pm\infty$$

to wartości hyperboli dążą do zera

$$h(x) = \frac{1}{x} \rightarrow 0, \quad \text{gdy } x \rightarrow \pm\infty$$

Przykład 1.1 Rozpatrzmy funkcje wymierną

$$w(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad x \neq -1.$$

Dla funkcji wymiernej $w(x)$ znajdziemy

1. dziedzinę,
2. zbiór wartości,
3. rozłóż funkcję $y = w(x)$ na ułamki proste,
4. asymptoty asymptoty funkcji $y = w(x)$,
5. wykres funkcji $y = w(x)$.

Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych dla których mianownik

$$x + 1 \neq 0$$

jest różny od zera.

Jasne, że mianownik jest różny od zera dla $x \neq -1$. Zatem, ziozem określoności funkcji wymiernej $w(x)$ jest zbiór zwany dziedziną

$$\text{Dziedzina } w(x) : D = \{x \in (-\infty, \infty) \text{ takich, że } x \neq -1.\}$$

Funkcję wymierną $w(x)$ łatwo zapiszmy w postaci ułamków prostych. Mi-anowicie, dodając i oddejmując w liczniku liczbę 2, sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{x-1}{x+1} \\ &= \frac{x-1+2-2}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)-2}{x+1} \\ &= 1 - \frac{2}{x+1}, \quad x \neq -1. \end{aligned}$$

Zbiorem wartości funkcji

$$w(x) = 1 - \frac{2}{x+1} \neq 1, \quad x \neq -1.$$

jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od 1.

$$\text{Zbiór wartosci funkcji } w(x) = \{w \in (-\infty, \infty), \text{ takich, że } w \neq 1\}$$

Ponadto funkcja wymierna $w(x)$ osiąga wszystkie wartości rzeczywiste różne od 1.

Asymptoty funkcji $w(x)$:

Asymptotą poziomą jest prosta równoległa do osi x

$$w(x) = 1 \quad \text{dla wszystkich rzeczywistych } x \neq -1.$$

Jeżeli x dąży do nieskończoności dodatniej lub ujemnej to wartości funkcji $w(x)$ dążą do 1.

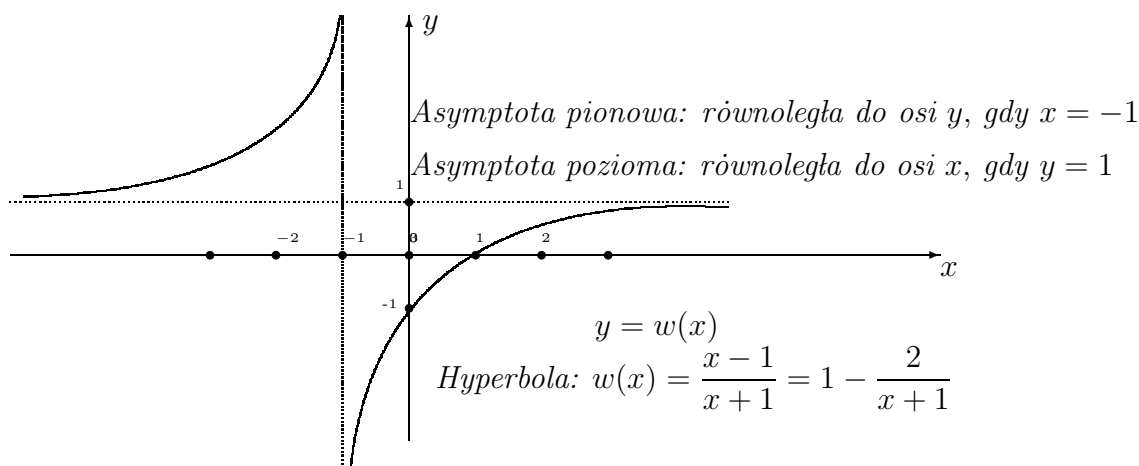
$$\text{Jeżeli } x \rightarrow \pm\infty, \text{ to } w(x) = 1 - \frac{2}{x+1} \rightarrow 1.$$

Asymptotą pionową jest prosta równoległa do osi y przechodząca przez punkt osobliwy $x = -1$.

Jeżeli x dąży do -1 z lewej lub z prawej strony punktu $x = -1$, to wartości funkcji $w(x)$ dążą do plus nieskończoności lub minus nieskończoności.

$$x \rightarrow -1, \quad \text{to } w(x) = w(x) = 1 - \frac{2}{x+1} \rightarrow \pm\infty.$$

Wykresem tej funkcji wymiernej jest hyperbola



Zauważmy, że ta hyperbola ma dwie asymptoty poziomą $y = 1$ dla każdej rzeczywistej wartości zmiennej $x \in (-\infty, \infty)$ i pionową przechodzącą przez punkt $x = -1$, to jest punkt w którym funkcja jest nieokreślona.

Przykład 1.2 Rozpatrzmy funkcje wymierną

$$w(x) = \frac{1}{16x^2 + 1}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Dla funkcji wymiernej $y = w(x)$ znajdziemy

1. dziedzinę,
2. zbiór wartości,
3. asymptoty funkcji $y = w(x)$,
4. wykres funkcji $y = w(x)$.

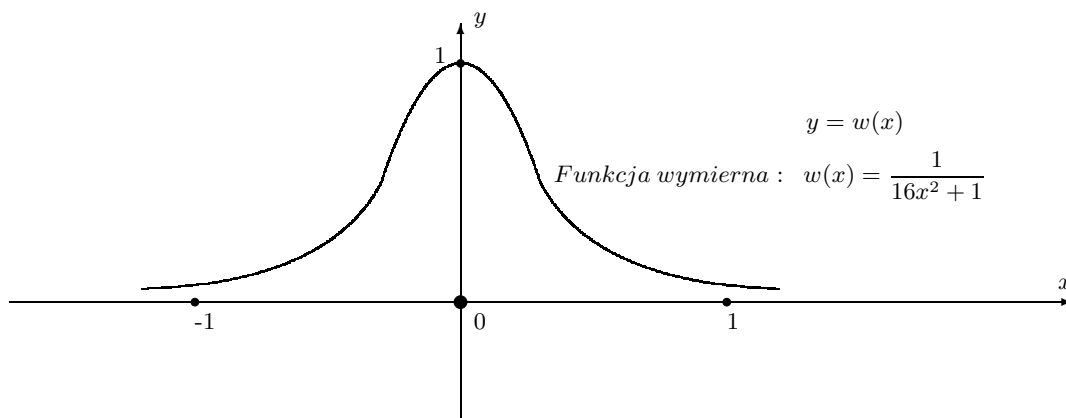
Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych.

$$\text{Dziedzina funkcji } w(x) : D = (-\infty < x < \infty).$$

Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $[1, \infty)$ liczb rzeczywistych większych lub równych od 1. Istotnie, zauważamy, że wartości tej funkcji spełniają nierówność

$$\frac{1}{16x^2 + 1} \geq 1, \text{ dla } -\infty < x < \infty.$$

Wykresem tej funkcji wymiernej jest krzywa



Funkcja wymierna

$$w(x) = \frac{1}{16x^2 + 1}$$

ma jedną asymptotę poziomą oś x , gdy $y = 0$.

Przykład 1.3 Rozpatrzmy funkcje wymierne

$$w(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Dla funkcji $w(x)$ znajdziemy

1. dziedzinę,
2. zbiór wartości,
3. asymptoty funkcji $y = w(x)$,
4. wykres funkcji $y = w(x)$.

Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, gdyż mianownik $x^2 + 1 > 1$ jest dodatni dla każdego rzeczywistego

$$x \in (-\infty, \infty).$$

Zbiorem wartości funkcji jest przedział $[-1, 1)$ liczb rzeczywistych. Mianowicie, łatwo sprawdzamy nierówność:

$$-1 \leq \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < 1. \quad (1.2)$$

Istotnie, funkcję $w(x)$ można napisać w postaci różnicy

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

Dodatnia wartość wyrażenia

$$0 < \frac{2}{x^2 + 1} \leq 2$$

jest mniejsza od 2, równa 2 dla $x = 0$.

Ponadto

$$0 < \frac{2}{x^2 + 1} \rightarrow 0, \quad \text{gdy } x \rightarrow \pm\infty,$$

dąży do zera, jeżeli $x \rightarrow \pm\infty$.

Skąd otrzymujemy nierówność (1.2) przez następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} &= 1 - \frac{2}{x^2 + 1} \\ &< 1, \quad \text{gdy } x \rightarrow \pm\infty, \end{aligned}$$

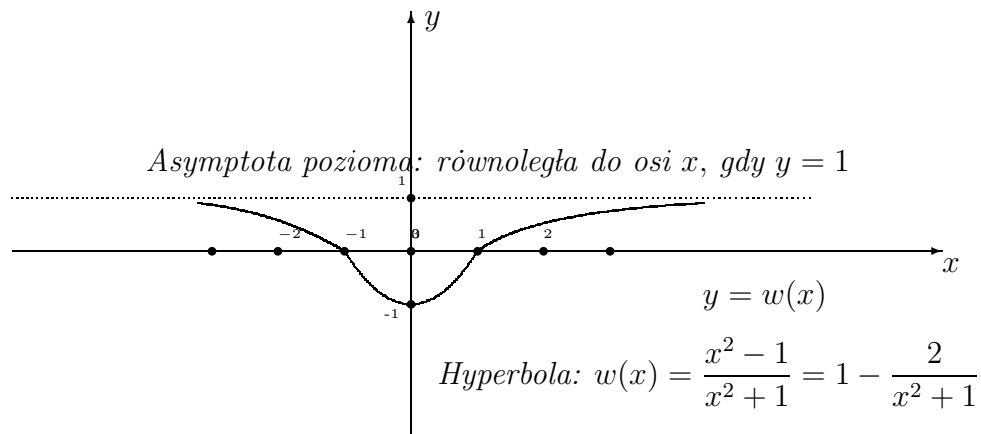
oraz

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} &= 1 - \frac{2}{x^2 + 1}, \\ &\geq -1, \quad \text{gdy } x = 0. \end{aligned}$$

Wykresem funkcji wymiernej

$$w(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

jest następująca krzywa:



1.2.2 Rozkład funkcji wymiernych na ułamki proste

Ułamkiem prostym nazywamy jedną z następujących funkcji wymiernych:

$$\frac{A}{x - a}, \quad \frac{A}{(x - a)^k}, \quad \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}, \quad \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}, \quad \Delta = p^2 - 4q < 0.$$

dla danej liczby naturalnej k , współczynników A, B, p, q i o wyróżniku $\Delta < 0$ ujemnym.

Przykład 1.4 Rozłóż funkcję wymierną na ułamki proste

$$w(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 1}$$

Dla funkcji $w(x)$ podaj

1. dziedzinę,
2. zbiór wartości,
3. postać ułamka prostego funkcji $y = w(x)$,
4. asymptoty funkcji $y = w(x)$,
5. wykres funkcji $y = w(x)$.

Rozwiązanie. Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych dla których mianownik jest różny od zera. To znaczy

$$\begin{aligned} D &= \{x \in (-\infty, \infty) : x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \neq 0\} \\ &= \{x \in (-\infty, \infty) : (x \neq 1) \cap (x \neq -1)\}. \end{aligned}$$

Rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste szukamy metodą współczynników nieoznaczonych. Mianowicie, znajdziemy A i B takie, że następująca równość zachodzi

$$w(x) = \frac{2x-1}{x^2-1} = \frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

dla każdego $x \in D$ z dziedziny funkcji $w(x)$, to znaczy dla każdego $x \neq -1$ i $x \neq 1$.

Zatem, współczynniki A i B wyznaczamy z tożsamości

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

która jest spełniona dla każdego $x \neq -1$ i $x \neq 1$.

Napiżemy tą tożsamość o wspólnym mianowniku

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{(x-1)(x+1)}$$

Porównując współczynniki przy x i wyrazy wolne w liczniku, otrzymamy równania na niewiadome A i B

$$A+B=2, \quad A-B=-1.$$

Obliczamy

$$A=B-1, \quad (B-1)+B=2, \quad 2B=3.$$

Skąd znajdujemy

$$B = \frac{3}{2}, \quad A = B - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Rozkład funkcji wymiernej $w(x)$ na ułamki proste

$$w(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}.$$

1.3 Zadania

Zadanie 1.1 Dla danej funkcji wymiernej

$$w(x) = \frac{2}{x+2}, \quad x \neq -2.$$

podaj

1. dziedzinę funkcji $w(x)$,
2. zbiór wartości funkcji $w(x)$,
3. postać ułamka prostego funkcji $w(x)$,
4. asymptoty funkcji $w(x)$,
5. Naszkicuj wykres funkcji $y = w(x)$.

Zadanie 1.2 Dla następującej funkcji wymiernej:

$$(i) \quad w(x) = \frac{2x - 1}{x - 2},$$

$$(ii) \quad w(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4},$$

podaj

1. dziedzinę funkcji $w(x)$,
2. zbiór wartości funkcji $w(x)$,
3. asymptoty funkcji $w(x)$,
4. Rozłóż na ułamki proste funkcję $w(x)$,
5. Naszkicuj wykres funkcji $y = w(x)$.

Zadanie 1.3 Rozłóż funkcje wymierną na ułamki proste

$$w(x) = \frac{x^2 - 9}{(x - 3)(x^2 + 4)}$$

podaj

1. dziedzinę funkcji $w(x)$,
2. zbiór wartości funkcji $w(x)$,
3. asymptoty funkcji $w(x)$,
4. Naszkicuj wykres funkcji $y = w(x)$.