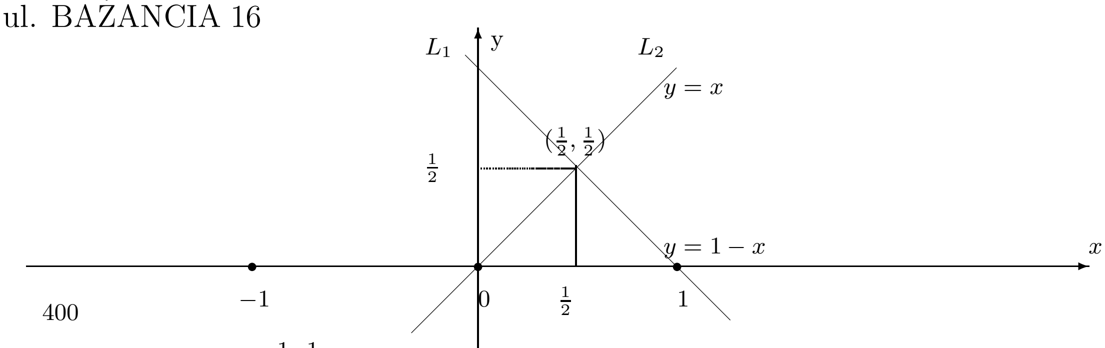
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16



Punkt przecięcia $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *prostych prostopadłych:* $L_1: \ y = 1 - x, \ L_2: \ y = x$

Funkcje liniowe [1]

Tadeusz STYŠ

WARSZAWA 2020

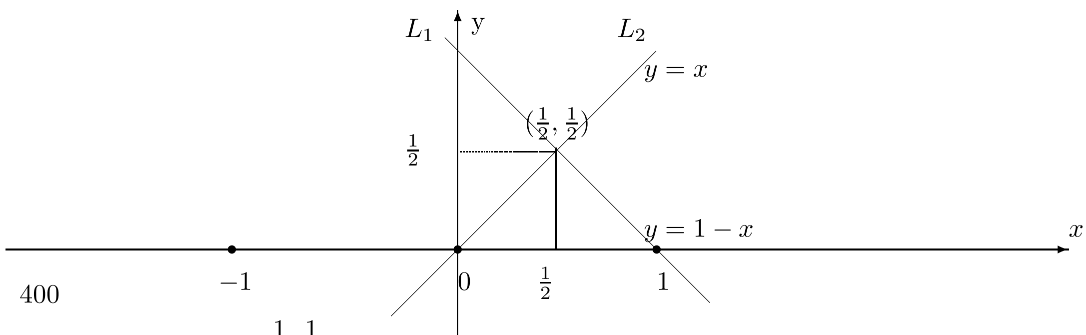
[1] Rozdział 10. Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego.

Contents

Chapter 1

Funkcje liniowe

1.1 Proste na płaszczyźnie



Punkt przecięcia $(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$ *prostych prostopadłych:* $L_1 : \; y = 1 - x, \; L_2 : \; y = x$

Położenie figur geometrycznych i ich kształt, w tym położenie prostych, na płaszczyźnie kartezjańskiej są wyznaczane we współrzędnych x, y.
Proste na płaszczyźnie kartezjańskiej określamy przez równania liniowe, które ustalają zależność współrzędnej y od współrzędnej x punktów leżących na prostych.
Rozpatrzymy następujące cztery formy równań prostych:
• Równanie prostej w postaci funkcji liniowej
• Równanie prostej przechodzęj przez dwa punkty
• Równanie ogólne prostej.
• Równianie parametryczne prostej

1.2 Funkcja liniowa.

Zależność liniową

$$y(x) = a\,x + b, \tag{1.1}$$

współrzęnej y *od współrzędnej* x *nazywamy funkcją liniową o współczynnikach* a *i* b *oraz zmiennej* x.
Funkcją $y(x) = a\;x + b$ *jest liniowa, gdyż jej wykresem jest linia prosta o współczynniku kierunkowym* a *i wyrazie wolnym* b.
Równania prostej określonej przez funkcje liniową

$$y(x) = ax + b$$

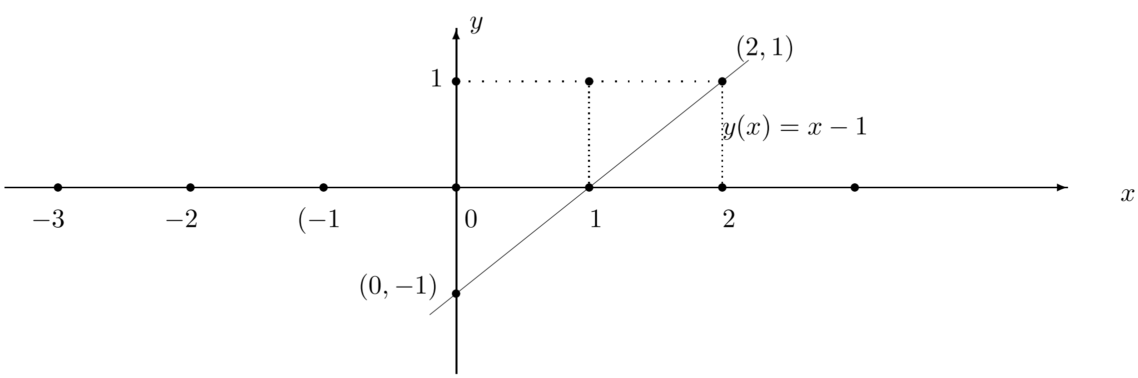
nie obejmuje prostych równoległych do osi y.

Przykład 1.1 .
(i) *Narysuj linię prostą na płaszczyźnie, w układzie współrzędnych* x, y, *przechodzącą przez dwa punkty* $(0,-1)$ *i* $(2,1)$
(ii) *Oblicz współczynniki funkcji liniowej*

$$y(x) = ax + b,$$

przechodzącej przez punkty $(0,-1)$ *i* $(2,1)$

Rozwiązanie (i)



Wykres funkcji liniowej $y(x) = x - 1$, *w układzie wspołrzędnydnych* x, y

Rozwiązanie (ii)
Wykres funkcji $y(x) = ax + b$ przechodzi przez punkty $(0,-1)$, $(2,1)$, jeżeli

$$y(0) = -1, \quad y(2) = 1.$$

Wtedy współrzędne tych punktów spełniają równania

$$\begin{aligned} & y(0) = a * 0 + b = -1, && b = -1, \\ & y(2) = a * 2 + b = 1, && a * 2 - 1 = 1, \\ & 2 * a = 2, && a = 1 \end{aligned}$$

Skąd otrzymujemy równanie prostej

$$y(x) = x - 1$$

w formie funkcji liniowej o współczynnimach $a = 1$, $b = -1$, na której leżą dane punkty $(0,-1)$ i $(2,1)$.

Przykład 1.2 .
(i) *Sprawdź, które z punktów*

$$P_1 = (0,0), \qquad P_2 = (1,1),$$

$$P_3 = (0,1), \qquad P_4 = (1,0)$$

leżą na prostych L_1 lub L_2 o równaniach

$$L_1: \quad y_1(x) = x, \qquad L_2: \quad y_2(x) = 1 - x. \tag{1.2}$$

(ii) Znajdź punkt przecięcia prostych L_1, L_2. Podaj wykres tych prostych.

Rozwiązanie (i). Punkty $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,1)$ leżą na prostej L_1, ponieważ ich współrzędne spełniają równanie prostej $L_1: \ y = x$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

Punkty $P_3 = (0,1)$, $P_2 = (1,0)$ leżą na prostej L_2 ponieważ ich współrzędne spełniają równanie prostej $L_2: \ y = 1 - x$,

$$y(0) = 1 - 0 = 1, \quad y(1) = 1 - 1 = 0.$$

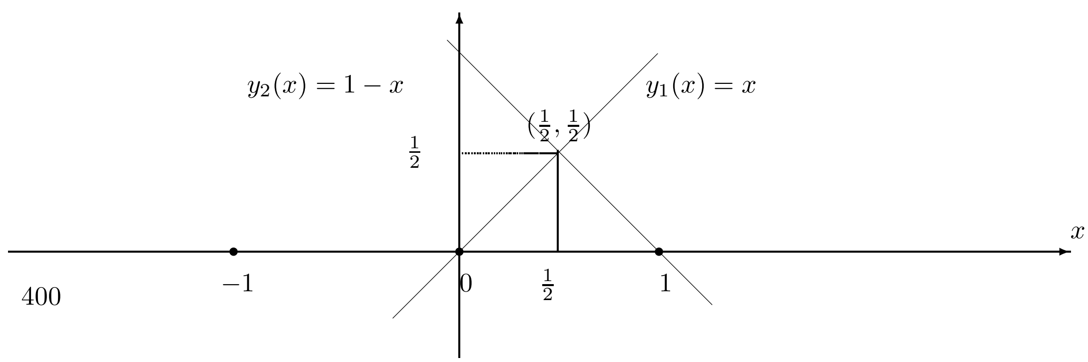
Rozwiązanie (ii).
Punkt przecięcia (x_0, y_0) leży na obu prostych, jeżeli

$$y_1(x_0) = y_0, \quad i \quad y_2(x_0) = y_0.$$

Wtedy mamy równania

$$\begin{array}{lll} y_1(x_0) = x_0 = y_0 & i & y_2(x_0) = 1 - x_0 = y_0, \\ x_0 = 1 - x_0 & i & 2x_0 = 1, \\ x_0 = \frac{1}{2} & i & y_0 = \frac{1}{2}. \end{array}$$

Odpowiedź: Proste $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = 1 - x$ przecinają się w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



Punkt przeciecia prostych prostopadlych $: \ y_1(x) = x, \quad y_2(x) = 1 - x.$

1.3 Równania prostych równoległych

Rozpatrzmy dwie proste L_1 i L_2 o równaniach [1]

$$\begin{aligned} L_1: &\quad y = a_1 x + b_1, \\ L_2: &\quad y = a_2 x + b_2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Warunek konieczny i dostateczny.
Proste L_1 i L_2 o równananiach (1.3) są równoległe, wtedy i tylko wtedy, jeżeli współczynniki a_1, a_2 są równe $a_1 = a_2$

[1] Dalej używamy uproszconych oznaczeń y zamiast $y(x)$

Przykład 1.3 *Sprawdź czy proste*

$$
\begin{aligned}
L_1: &\quad y = x + 1, \\
L_2: &\quad y = x - 1
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

są równoległe.
Podaj wykresy prostej L_1 i L_2.

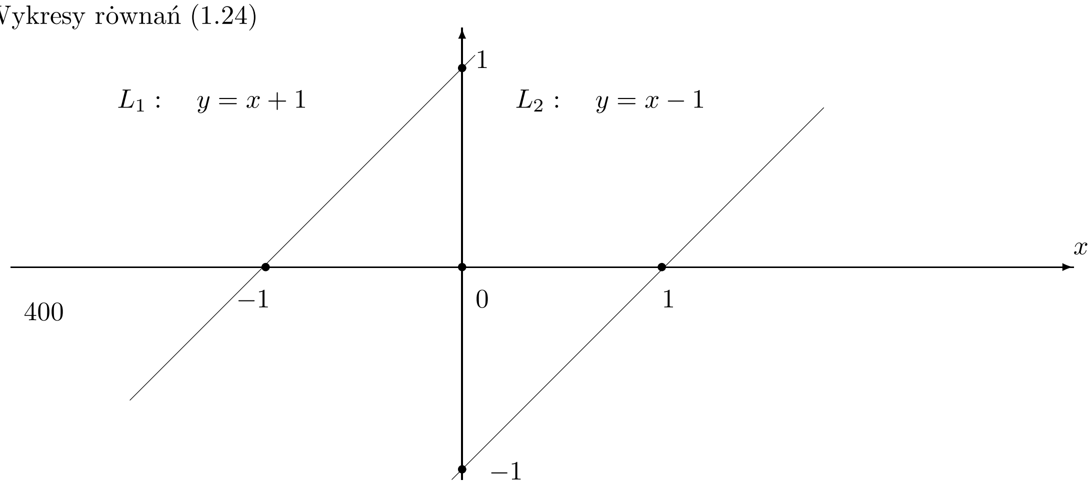
Rozwiązanie.
Proste L_1 i L_2 o współczynnikach

$$
\begin{aligned}
a_1 = 1, &\quad b_1 = 1, \\
a_2 = 1, &\quad b_2 = -1
\end{aligned}
$$

są równoległe ponieważ ich współczynniki a_1, a_2 spełniją warunek konieczny i dostateczny równoległości prostych na płaszczyźnie.

$$a_1 = a_2 = 1.$$

Wykresy równań (1.24)



Przykład 1.4 *Wyznacz równanie prostej L równoległej do prostej*

$$L_0: \quad y = x + 1$$

przechodzącej przez punkt

$$P = (3, 1).$$

Podaj wykres prostej L_0 i prostej L.

Rozwiązanie.
Prosta L równoległa do prostej L_0 ma współczynnik kierunkowy ten sam co prosta L_0, mianowicie $a = 1$.
Wtedy równanie prostej

$$L: \quad y = x + b.$$

Ponieważ prosta L przechodzi przez punkt $P = (3, 1)$ to po podstawieniu współrzędnych punktku otrzymamy równanie

$$1 = 3 + b,$$

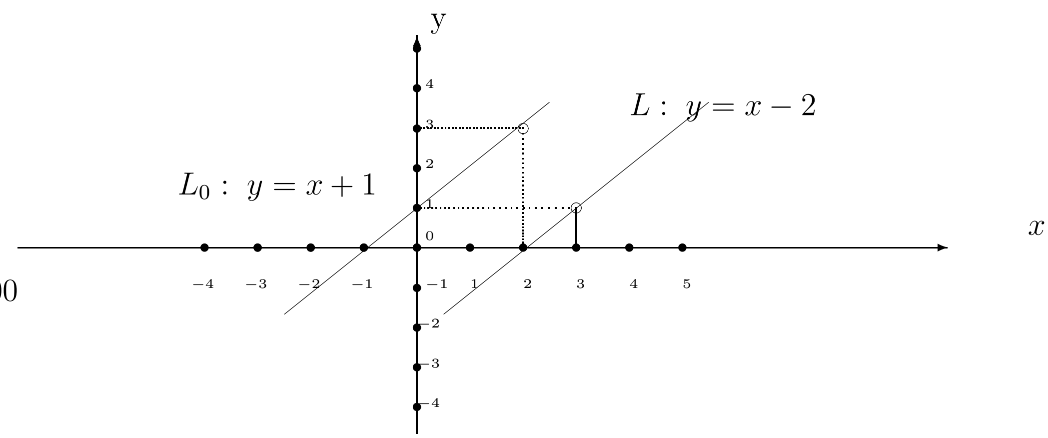
z ktòrego obliczmay wyraz wolny

$$b = 1 - 3 = -2.$$

Skąd otrzymujemy rȯwnanie prostej

$$L: \quad y = x - 2.$$

Wykres prostych rȯwnoległych $L_0: \; y = x + 1, \quad L: \; y = x - 2$



400

1.4 Rȯwnania prostych prostopadłych

Rozpatrzmy dwie proste L_1 i L_2 o rȯwnaniach

$$\begin{aligned} L_1: &\quad y = a_1 x + b_1, \\ L_2: &\quad y = a_2 x + b_2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Warunek konieczny i dostateczny.
Prosta L_1 jest prostpadła do prostej L_2, wtedy i tylko wtedy, jeżeli wspȯłczynnik a_2 prostej L_2 rȯwny jest negatywnej odwrotności wspȯłczynnika a_1 prostej L_1

$$a_2 = -\frac{1}{a_1}.$$

Wtedy każda prosta o równaniu

$$y = -\frac{1}{a_1}x + b \tag{1.6}$$

jest prostopadała do prostej L_1 dla dowolnej wartości wyrazu wolnego b.

Przykład 1.5 *Sprawdź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1 :&\quad y = x - 1, \\ L_2 :&\quad y = 1 - x \end{aligned} \tag{1.7}$$

są prostopadłe.
Podaj wykresy prostej L_1 i L_2.

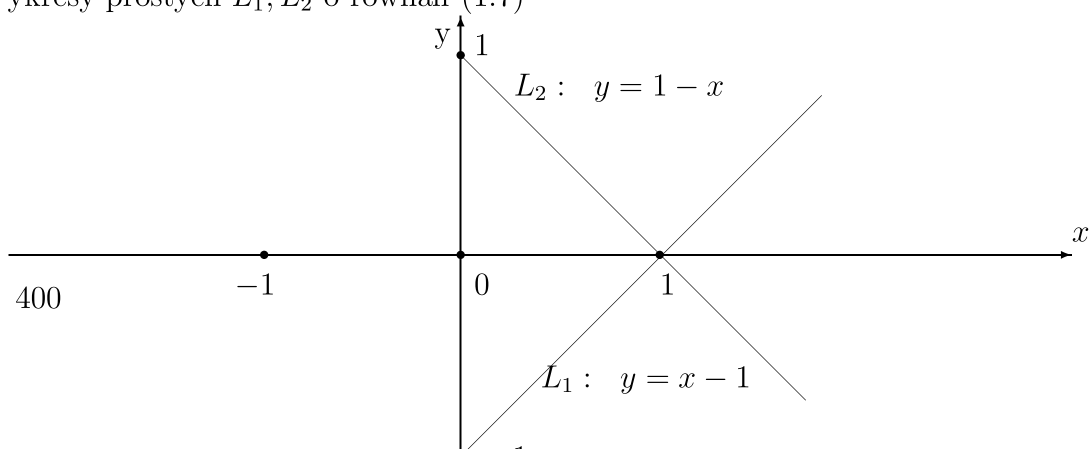
Rozwiązanie.
Proste L_1 i L_2 o współczynnikach

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1, & b_1 = 1, \\ a_2 = -1, & b_2 = 1 \end{array}$$

są prostopadłe ponieważ ich współczynniki a_1, a_2 spełniają warunek konieczny i dostateczny (1.6) prostopadłości prostych na płaszczyźnie.

$$a_2 = -\frac{1}{a_1} = -\frac{(1)}{1} = -1.$$

Wykresy prostych L_1, L_2 o równań (1.7)



Przykład 1.6 *Wyznacz równanie prostej L prostopadłej do prostej*

$$L_0 : \quad y = x + 2$$

przechodzącej przez punkt

$$P = (2, -2).$$

Podaj wykres prostej L_0 i prostej L.

Rozwiązanie.
Prosta L prostopadła do prostej L_0 ma współczynnik kierunkowy równy negatywnej odwrotności współczynnika $a = 1$ prostej L_0.
Wtedy równanie prostej

$$L: \quad y = -\frac{1}{(1)}x + b = b - x.$$

Ponieważ prosta L przechodzi przez punkt $P = (2, 0)$ to współrzędne tego punktu spełniają równanie

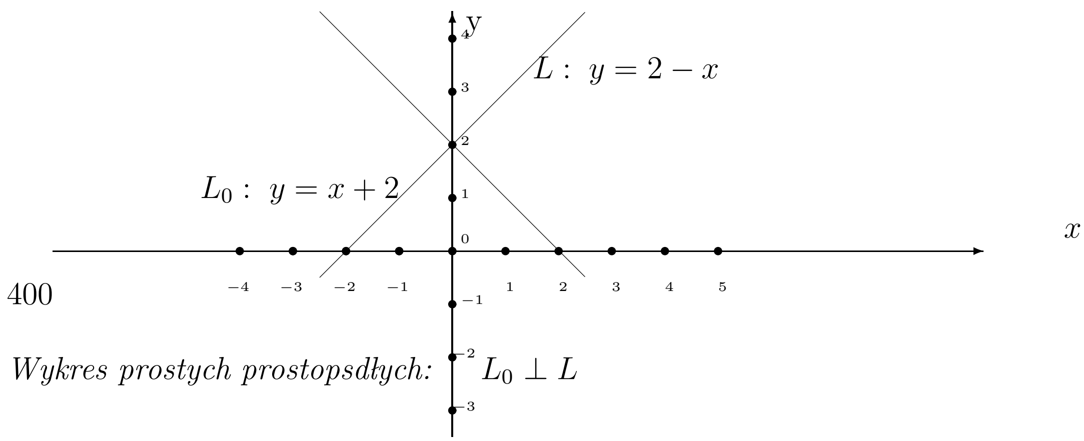
$$0 = 2 + b$$

z którego obliczmay wyraz wolny

$$b = 2$$

Skąd otrzymujemy równanie prostej

$$L: \quad y = 2 - x$$



Wykres prostych prostopsdłych: $L_0 \perp L$

1.5 Równanie prostej przechdzącej przez dwa punkty

[2] *Równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty nie obejmuje prostych prostopadłych do osi x.*

Równanie prostej przechodzącej przez dwa różne punkty o współrzędnych

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \qquad dla \qquad x_0 \neq x_1$$

piszemy jako następującą zależność wspórzędnej y od współrzędnej x:

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1 \tag{1.8}$$

[2]Tutaj używamy uproszczonych oznaczeń $y = y(x),\ y_0 = y(x_0),\ y_1 = y(x_1)$

Istotnie, gdy $x = x_0$ *to* $y = y_0$ *lub gdy* $x = x_1$ *to* $y = y_1$.
To znaczy, że punkty (x_0, y_0), (x_1, y_1) *leżą na prostej.*

Przykład 1.7 *Napisz równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty*

$$(x_0, y_0) = (-1, 0) \quad i \quad (x_1, y_1) = (0, 1).$$

Sprawdź, który z punktów $(1, 1)$, $(1, 2)$ *leży na prostej.*

Rozwiązanie:
Piszemy równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$(x_0, y_0) = (-1, 0) \quad i \quad (x_1, y_1) = (0, 1)$$

podstwiając do wzoru (1.8) ich współrzędne znajdujemy równanie prostej

$$\begin{aligned} y &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \\ &= \frac{x - 0}{-1 - 0} * 0 + \frac{x + 1}{0 + 1} * 1 \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

Odpowiedź: Równanie prostej przechodzącej przez punkty $(-1, 0)$ *i* $(0, 1)$

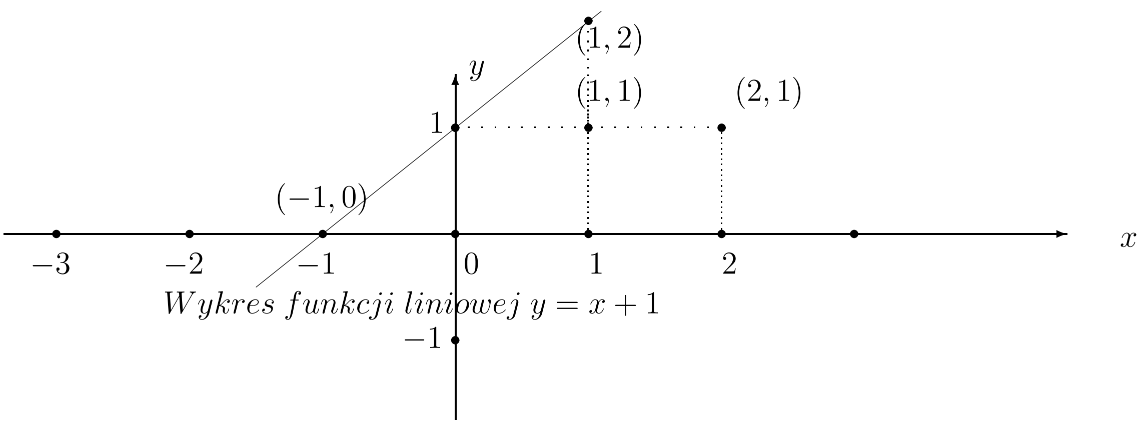
$$y = x + 1$$

Punkt $(1, 1)$ *nie leży na prostej* $y = x + 1$ *ponieważ jego współrzędne nie spełniają równania tej prostej bo*

$$1 \neq 1 + 1$$

Natomiast punkt $(1, 2)$ *leży na prostej* $y = x + 1$ *ponieważ jego współrzędne spełniają równanie tej prostej bo*

$$2 = 1 + 1$$



Wykres funkcji liniowej $y = x + 1$

Zauważmy, że równania prostej określonej przez funkcje liniową

$$y(x) = ax + b$$

lub prostej wyznaczonej przez dwa różne punkty nie obojmują położenia prostych prostopadłych do osi x. Natomiast równanie ogólne prostej, które obejmuje wszystkie możliwe położenia prostej na płaszczyźnie rozpatrujemy w następnej sekcji.

1.6 Równanie ogólne prostej na płaszczyźnie

Ogólne równanie prostej na płaszczyźnie

$$ax + by + c = 0, \qquad a^2 + b^2 > 0, \tag{1.9}$$

gdzie współczynniki a, b nie znikają jednocześnie dla $a^2 + b^2 > 0$.

Przykład 1.8 *Współczynniki równania*

$$x + y - 1 = 0$$

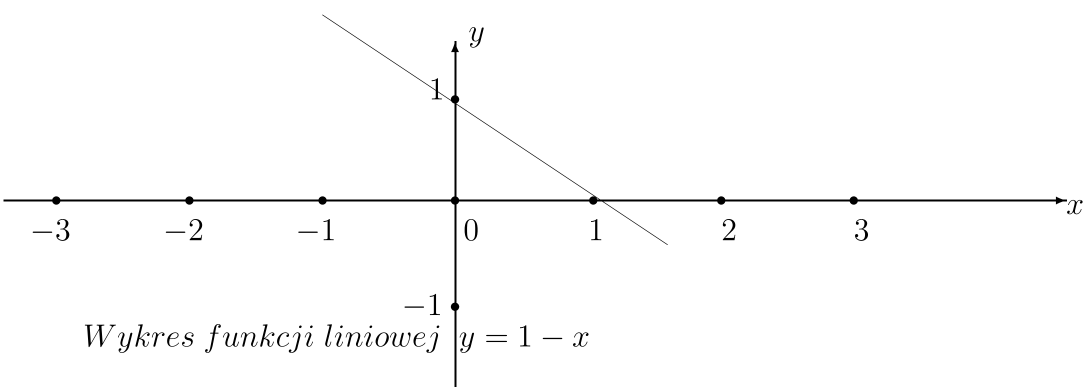
$a = 1,\ b = 1,\ c = -1$ *nie znikają jednocześnie*

$$a^2 + b^2 = 1^2 + 1^2 = 2 > 0.$$

Równanie tej prostej możemy napisać w postaci funkcji liniowej

$$y = 1 - x$$

której wykres podajemy niżej



Wykres funkcji liniowej $y = 1 - x$

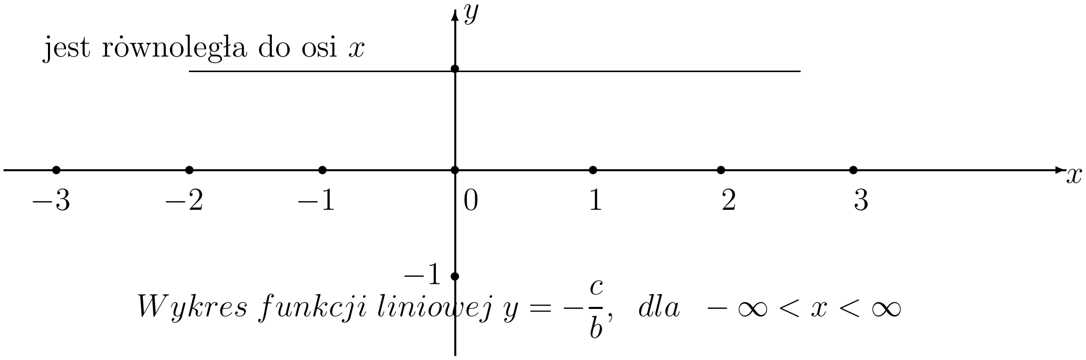
Rozpatrzmy trzy pozycje położenia prostej L o równaniu

$$ax + by + c = 0, \qquad a^2 + b^2 > 0$$

1. Prosta L jest równoległa do osi x, jeżeli współczynnik $a = 0$, natomiast współczynnik $b \neq 0$.
Wtedy prosta o równaniu

$$by + c = 0 \quad lub \quad y = -\frac{c}{b}$$

jest równoległa do osi x

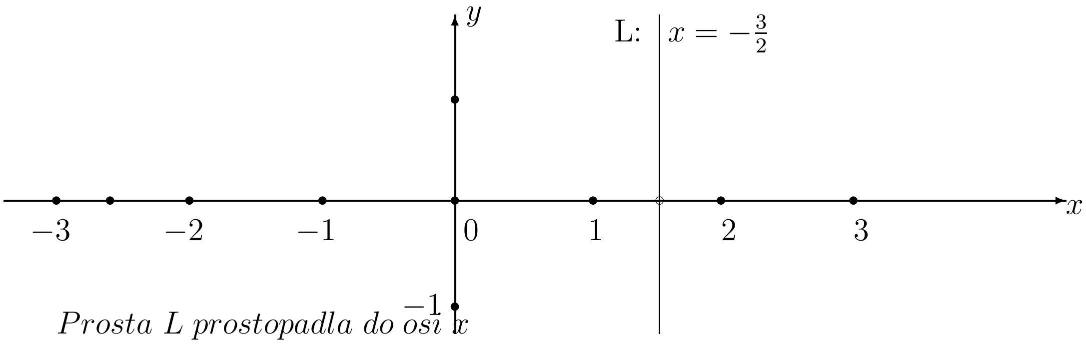


Wykres funkcji liniowej $y = -\frac{c}{b}$, *dla* $-\infty < x < \infty$

2. Prosta L jest prostopadła do osi x, jeżeli współczynnik $b = 0$, natomiast współczynnik $a \neq 0$.
Wtedy prosta o równaniu

$$ax + c = 0 \quad lub \quad x = -\frac{c}{b}, \quad dla \quad -\infty < y < \infty$$

jest prostopadła do osi x.
Wykres prostej L o równaniu $2x + 3 = 0$ lub $x = -\frac{3}{2}$, $dla \;\; -\infty < y < \infty$ podajemy niżej



Prosta L prostopadla do osi x

3. Prosta L o równaniu

$$ax + by + c = 0, \qquad gdy \quad a \neq 0, \;\; i \;\; b \neq 0$$

przecina oś x w punkcie $(-\frac{c}{a}, 0)$ oraz oś y w punkcie $(0, -\frac{c}{b})$

Przykład 1.9 *Podaj wykres i znajdź punkty przecięcia prostej*

$$x + y - 1 = 0$$

z osią x i z osią y

Rozwiązanie.
Dla prostej L o współczynnikach $a = 1, \; b = 1, \; c = -1$ obliczamy współrzędną

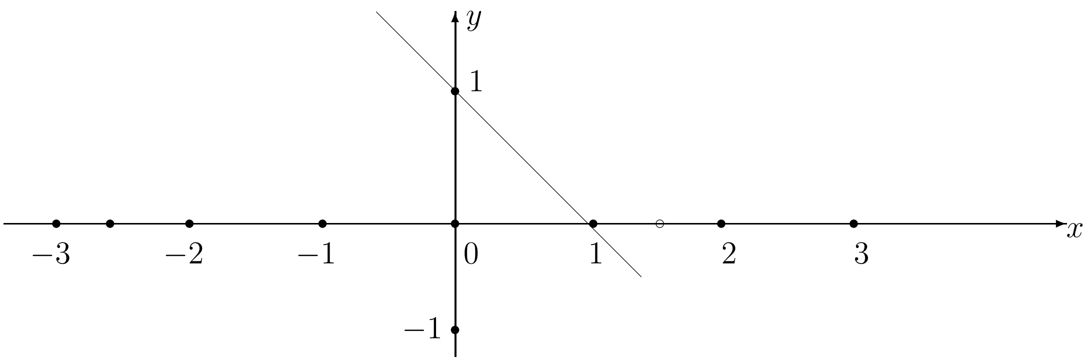
x punktu przecięcia prostej $x + y - 1 = 0$ z osią x, gdy $y = 0$

$$x = -\frac{c}{a} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

współrzędną punktu przecięcia prostej $x + y - 1 = 0$ z osią y, gdy $x = 0$

$$y = -\frac{c}{b} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

Wykres prostej o równaniu $x + y - 1 = 0$.



1.7 Proste równoległe. Równanie ogólne.

Rozpatrzmy dwie proste L_1 i L_2 o równaniach w formie ogólnej

$$\begin{aligned} L_1 :& \quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ L_2 :& \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Proste L_1 i L_2 o równananiach (1.10) są równoległe, jeżeli współczynniki a_1, b_1 są proporcjonalne do współczynników i b_1, b_2, to znaczy

$$a_1 = k * a_2, \quad b_1 = k * b_2 \tag{1.11}$$

dla pewnej liczby $k \neq 0$, którą nazywamy współczynnikiem proporcji.

Przykład 1.10 *Sprawlź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1 :& \quad x - y + 1 = 0 \\ L_2 :& \quad x - y - 1 = 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

są równoległe.
Podaj wykresy prostej L_1 i L_2.

Rozwiązanie.
Proste L_1 i L_2 są równoległe ponieważ ich współczynniki

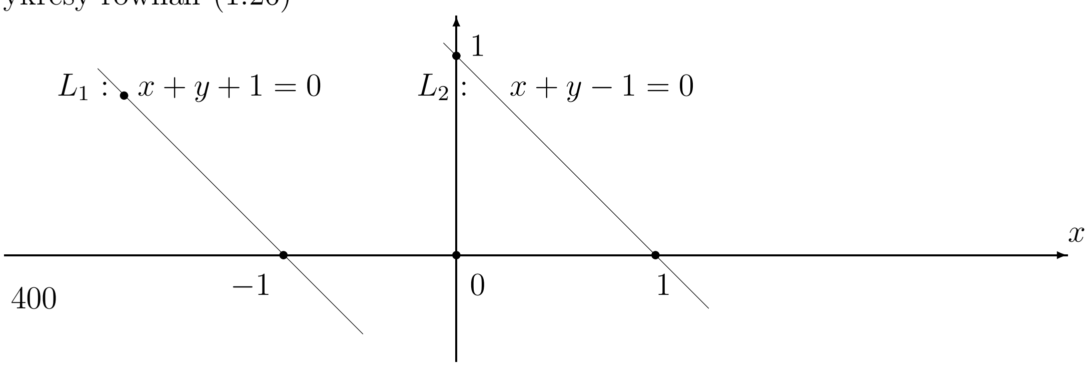
$$a_1 = 1, \quad b_1 = -1,$$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = -1,$$

spełniają warunek proporcji (1.11)

$$1 = 1 * 1, \quad -1 = -1 * 1$$

dla współczynnika proporcji $k = 1$
Wykresy równań (1.26)



Zauważmy, że prosta o równaniu

$$ax + by + c = 0$$

- przecina oś y, w punkcie $(0, -\frac{c}{b})$, gdy $x = 0$, wtedy prosta jest równoległa do oisi x

$$by + c = 0, \quad i \quad y = -\frac{c}{b}, \quad dla \quad b \neq 0, \quad -\infty < y < \infty.$$

- przecina oś x, w punkcie $(-\frac{c}{a}, 0)$, gdy $y = 0$, wtedy prosta jest równoległa do osi y

$$ax + c = 0, \quad i \quad x = -\frac{c}{a} \quad dla \quad a \neq 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

- dwie proste o równaniach

$$\begin{aligned} L_1: \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ L_2: \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.13}$$

przecinają się w punkcie (x_0, y_0), jeżeli ten punkt spełnia równania tych prostych

$$\begin{aligned} L_1: &\quad a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ L_2: &\quad a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Przykład 1.11 *Podaj położenie na płaszczyźnie (x, y) dwóch prostych o rónaniach*

$$x - y = 0,$$

$$x + y - 1 = 0$$

Znajdź ich punkty przecięcia z osiamy x i y oraz punkt przecięcia tych prostych.

Rozwiązanie. Prosta o równaniu $x - y = 0$ przecina oś x i oś y, gdy $y = 0$, lub $x = 0$, wtedy$x = y = 0$. Zatem ta prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych, przez punkt $(0, 0)$.
Prosta o równaniu $x + y - 1 = 0$ przecina oś x, gdy $y = 0$. Wtedy mamy równanie

$$x - 1 = 0, \quad i \quad x = 1.$$

Prosta o równaniu $x + y - 1 = 0$ przecina oś y, gdy $x = 0$. Wtedy mamy równanie

$$y - 1 =, \quad i \quad y = 1.$$

Zatem prosta ta przecina oś x w punkcie $(1, 0)$ i przecina oś y w punkcie $(0, 1)$.
Dwie proste przecinają się w punkcie (x_0, y_0), gdy współrzędne tego punktu spełnia ją oba równania, to znaczy

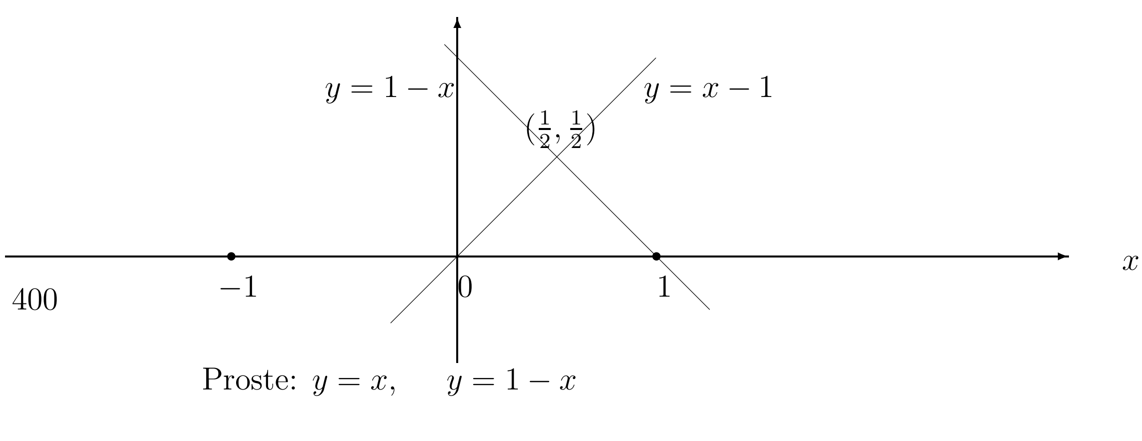
$$x_0 - y_0 = 0, \qquad y_0 = x_0$$

$$x_0 + y_0 - 1 = 0$$

Podstawiając $y_0 = x_0$ do drugiego równania znajdujemy

$$x_0 + y_0 - 1 = 0, \qquad 2x = 1, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

Zatem proste przecinają się w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



Proste: $y = x, \quad y = 1 - x$

1.8 Proste prostopadłe. Równanie ogólne

Rozpatrzmy dwie proste L_1 i L_2 o równaniach w formie ogólnej

$$\begin{aligned} L_1: &\quad a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ L_2: &\quad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Proste L_1 i L_2 o równananiach (1.15) są prostopadłe, wtedy i tylko wtedy, jeżeli współczynniki a,b_1 i a_2, b_2 spełniają równanie

$$a_1 * b_1 + a_2 * b_2 = 0 \tag{1.16}$$

Przykład 1.12 *Sprawlź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad 2x - y - 2 = 0 \\ L_2: &\quad x + 2y + 2 = 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

są prostopadłe.
Podaj wykresy prostych L_1 i L_2.

Rozwiązanie.
Proste L_1 i L_2 są prostopadłe ponieważ ich współczynniki

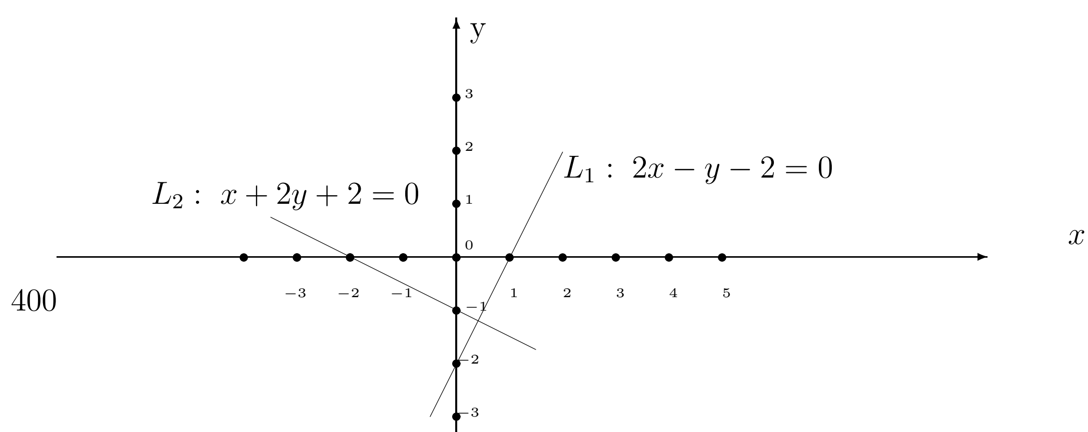
$$a_1 = 2, \quad b_1 = -1,$$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = 2,$$

spełniają warunek proporcji (1.16)

$$2 * 1 + (-1) * 2 = 0$$

Wykresy prostych L_1 i L_2 określonych przez równania (1.27)



Wykres prostych prostopsdłych: $L_1 \perp L_2$

1.9 Równanie parametryczne prostej

Równanie parametryczne prostej L przechodzącej przez dwa punkty

$$P = (x_1, y_1) \quad i \quad Q = (x_2, y_2)$$

piszemy w postaci

$$L(t) \;=\; P + (Q - P)t, \qquad -\infty < t < +\infty \tag{1.18}$$

lub w postaci

$$L(t) \;=\; Q * t + (1 - t)P, \qquad -\infty < t < +\infty \tag{1.19}$$

Zauważmy, że punkty P i Q leżą na prostej $L(t)$, ponieważ dla parametru $t = 0$ mamy punkt

$$L(0) = P$$

i dla parametru $t = 1$ mamy punkt

$$L(1) = Q.$$

Jeżeli parametr t zmienia się od 0 do 1 to punkt $L(t)$ zmienia się wzdłuż odcinka o początku w punkcie P i końcu w punkcie Q. Natomiast, jeżeli parametr t zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$, to punkt $L(t)$ przebiega całą prostą L.
Wtedy prosta L jest równoległa do wektora

$$\vec{v} = Q - P$$

o współrzędnych

$$\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Parametryczne równanie prostej $L(t)$ piszemy również we współrzędnych

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1 + t * x_2 \\ y(t) &= y_1 + t * y_2, \end{aligned} \tag{1.20}$$

dla parametru $t \in (-\infty, +\infty)$.

Przykład 1.13 .
(i) *Znajdź równanie parametryczne prostej* $L(t)$ *przechodzącej przez dwa punkty* $P = (0, -1)$ *i* $Q = (2, 1)$
(ii) *Podaj wykres prostej* $L(t)$.

Rozwiązanie (i)
Podstawiając do parametrycznego równania prostyej (1.19) dane punkty

$$P = (0, -1) \;\; i \;\; Q = (2, 1)$$

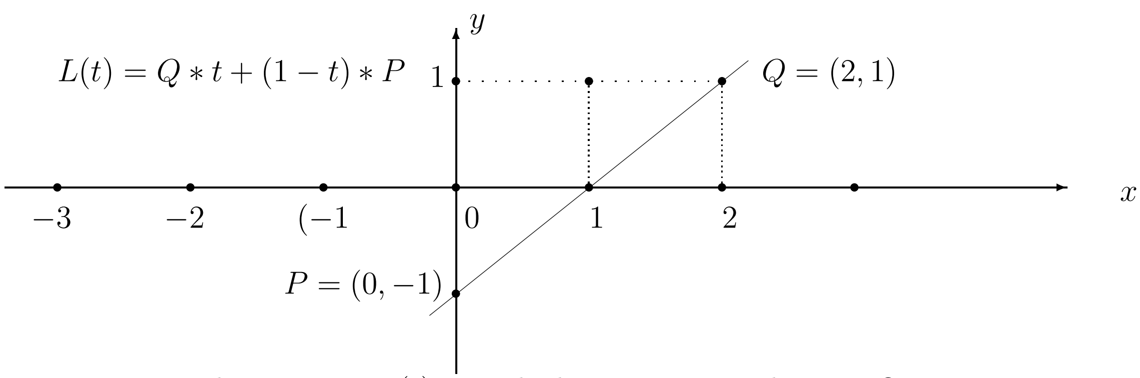
otrzymamy ròwnanie

$$L(t) \quad = \quad L(t) = (2,1)t + (1-t)(0,-1) \tag{1.21}$$

Ròwnanie (1.20) piszemy we współrzędnych

$$\begin{aligned} x(t) &= 2t \\ y(t) &= 2t - 1, \end{aligned} \tag{1.22}$$

dla parametru $t \in (-\infty, +\infty)$.
Rozwiązanie (ii).
Wykres prostej $L(t)$ określonej przez parametryczne ròwnanie (1.22) podajemy niżej



Wykres prostej $L(t)$ przechodzącej przez punkty P i Q

1.10 Zadania

Zadanie 1.1 .
(i) *Narysuj linię prostą na płaszczyźnie, w układzie współrzędnych x, y, przechodzą przez dwa punkty $(-1,-2)$ i $(2,1)$*
(ii) *Oblicz współczynniki funkcji liniowej*

$$y(x) = ax + b,$$

przechodzącej przez punkty $(-1,-2)$ i $(2,1)$

Zadanie 1.2 *Podaj położenie na płaszczyźnie (x, y) dwòch prostych L_1 i L_2 o rònaniach*

$$L_1: \quad y = 2x - 1, \qquad\qquad L_2: \quad y = 1 - 2x$$

Znajdź punkt przecięcia prostych L_1 i L_2.

Zadanie 1.3 *Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty* $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ *i* $(x_1, y_1) = (1, 1)$. *Sprawdź który z punktów* $(0, 1)$, $(2, 2)$ *leży na prostej.*

Zadanie 1.4 .
(i) *Sprawdź, które z punktów*

$$P_1 = (0, 0), \qquad P_2 = (1, 1),$$

$$P_3 = (0, 2), \qquad P_4 = (2, 0)$$

leżą na prostych L_1 *lub* L_2 *o równaniach*

$$L_1 : \quad y_1(x) = 2x, \qquad L_2 : \quad y_2(x) = 2 - x \tag{1.23}$$

(ii) *Znajdź punkt przecięcia prostych* L_1, L_2. *Podaj wykres tych prostych.*

Zadanie 1.5 *Sprawdź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1 : \quad y = 3x + 1, \quad L_3 : \quad 2x + 3 \\ L_2 : \quad y = 3x - 1, \quad L_4 : \quad 3x - 3 \end{aligned} \tag{1.24}$$

są równoległe.
Podaj wykresy prostej L_1 *i* L_2.

Zadanie 1.6 *Wyznacz równanie prostej* L *równoległej do prostej*

$$L_0 : \quad y = 1 - x$$

przechodzącej przez punkt

$$P = (-1, 1),$$

Podaj wykres prostej L_0 *i prostej* L

Zadanie 1.7 *Sprawdź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1 : \quad y = 0.5x - 1 \\ L_2 : \quad y = 1 - 2x \end{aligned} \tag{1.25}$$

są prostopadłe.
Podaj wykresy prostej L_1 *i* L_2.

Zadanie 1.8 *Wyznacz równanie prostej* L *prostopadłej do prostej*

$$L_0 : \quad y = 2 - x$$

przechodzącej przez punkt

$$P = (-1, -1),$$

Podaj wykres prostej L_0 *i prostej* L

Zadanie 1.9 *Napisz równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty*

$$(x_0, y_0) = (-1, 2) \quad i \quad (x_1, y_1) = (0, 1).$$

Sprawdź, który z punktów $(1, 0)$, $(2, -1)$ *leży na prostej.*

Zadanie 1.10 *Znajdź współczynniki* a, b, c *równania prostej* L *w forme ogólnej*

$$L: \quad ax + by + c = 0$$

przechdzącej przez punkty

$$P = (-2, 2), \qquad Q = (1, 0)$$

Zadanie 1.11 *Podaj wykres i znajdź punkty przecięcia prostej*

$$2x + y - 4 = 0$$

z osią x *i z osią* y

Zadanie 1.12 *Sprawlź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad 2x - y + 1 = 0 \\ L_2: &\quad 4x - 2y - 1 = 0 \end{aligned} \tag{1.26}$$

są równoległe.
Podaj wykresy prostej L_1 *i* L_2.

Zadanie 1.13 *Podaj położenie na płaszczyźnie* (x, y) *dwóch prostych o rónaniach*

$$2x - y = 0,$$

$$x + 2y - 1 = 0$$

Znajdź ich punkty przecięcia z osiamy x *i* y *oraz punkt przecięcia tych prostych.*

Zadanie 1.14 *Sprawlź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad 3x - y - 1 = 0 \\ L_2: &\quad x + 3y + 1 = 0 \end{aligned} \tag{1.27}$$

są prostopadłe.
Podaj wykresy prostych L_1 *i* L_2.

Zadanie 1.15 .
(i) *Znajdź równanie parametryczne prostej* $L(t)$ *przechodzącej przez dwa punkty* $P = (1, -1)$ *i* $Q = (2, -1)$
(ii) *Podaj wykres prostej* $L(t)$.