

Temat:

Ułamki zwykłe. Proste wyrażenia arytmetyczne

Zacznijmy od przypomnienia określenia wyrażenia arytmetycznego i pojęć takich jak składniki sumy, czynniki iloczynu, dzielna i dzielnik ilorazu.

Wyrażeniem arytmetycznym nazywamy ciąg liczb połączonych czterema operacjami arytmetycznymi dodawania, odejmowania mnożenia i dzielenia przez liczby różne od zera.

Na przykład, wyrażenie

$$5 * 6 : 10 + 2 - 3 \quad \text{lub dzielenie w zapisie ułamka} \quad \frac{5 * 6}{10} + 2 - 3$$

jest wyrażenie arytmetycznym składającym się z ciągu liczb

$$5, 6, 10, 2, 3$$

Obliczając wartość wyrażenia arytmetycznego należy zachować kolejność wykonywania operacji arytmetycznych.

Najpierw wykonujemy operacje mnożenia i dzielenia, w następnej kolejności wykonujemy operacje dodawania i odejmowania.

$$*, \quad :, \quad +, \quad -, \quad$$

Ogólnie w iloczynie dwóch liczb $a * b$, trzech liczb $a * b * c$ lub więcej liczb występują *czynniki*. a, b, c, \dots

Na przykład liczba 105 rozkłada się na dwa *czynniki* 7, 35 bo

$$105 = 7 * 35,$$

również liczba 105 rozkłada się na trzy czynniki 3, 5 i 7 bo

$$105 = 3 * 5 * 7$$

Natomiast, w ilorazie dwóch liczb występuje *dzielna i dzielnik*, na przykład w ilorazie

$$35 : 5 = 7 \quad \text{lub w zapisie ułamka} \quad \frac{35}{5} = 7$$

dzielną jest liczba 35, a dzielnikiem jest liczba 5, wynikiem dzielenia jest liczba 7.

W odejmowaniu liczb mamy *odjemną i odjemnik*, na przykład w różnicy liczb

$$45 - 25 = 20$$

odjemną jest liczba 45, a odjemnikiem jest liczba 25. Wynikiem odejmowania jest liczba 20.

Przykład 0.1 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$5 * 6 : 10 + 2 - 3 \text{ lub dzielenie w zapisie ułamka } \frac{5 * 6}{10} + 2 - 3$$

Rozwiązanie. Obliczamy wartość tego wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność operacji arytmetycznych.

Pierwsze wykojemy mnożenie i dzielenie, a następnie dodawanie i odejmowanie

$$\frac{5 * 6}{10} + 2 - 3 = \frac{30}{10} + 2 - 3 = 3 + 2 - 3 = 2$$

Przykład 0.2 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{3} + \frac{2}{6}$$

Rozwiązanie. Obliczamy wartość tego wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność operacji arytmetycznych.

Pierwsze wykonujemy mnożenie a następnie dodawanie

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{3} + \frac{2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Przykład 0.3 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego.

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$$

Rozwiązanie. Obliczamy wartość tego wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność operacji arytmetycznych.

Pierwsze wykonujemy dzielenie a następnie odejmowanie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{3}{4} &= \frac{1}{2} * \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1 * 3}{2 * 2} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0. \end{aligned}$$

Przykład 0.4 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\frac{3}{2} * \frac{3}{4} + \frac{2}{3} * \frac{4}{3}$$

Rozwiązanie. Obliczamy wartość tego wyrażenia arytmetycznego wykonując operacje mnożenia ułamków, a następnie operację dodawania ułamków

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} * \frac{3}{4} + \frac{2}{3} * \frac{4}{3} &= \frac{3 * 3}{2 * 4} + \frac{2 * 4}{3 * 3} \\ &= \frac{9}{8} + \frac{8}{9} = \frac{9 * 9}{8 * 9} + \frac{8 * 8}{8 * 9} \\ &= \frac{81 + 64}{72} = \frac{145}{72} = 2\frac{1}{72}\end{aligned}$$

Przykład 0.5 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{5}{3} : \frac{1}{4} - \frac{1}{4} : \frac{2}{3}$$

Rozwiązanie. Obliczamy wartość tego wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność operacji arytmetycznych.

Pierwsze wykonujemy dzielenie a następnie odejmowanie

$$\begin{aligned}\frac{5}{3} : \frac{1}{4} - \frac{1}{4} : \frac{2}{3} &= \frac{5}{3} * \frac{4}{1} - \frac{1}{4} * \frac{3}{2} \\ &= \frac{20}{3} - \frac{3}{8} = \frac{20 * 8}{24} - \frac{3 * 3}{24} \\ &= \frac{160 - 9}{24} = \frac{151}{24} = 6\frac{7}{24}.\end{aligned}$$

Przykład 0.6 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{3}{2} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} * \frac{4}{3}$$

Rozwiązanie. Obliczamy wartość tego wyrażenia arytmetycznego wykonując operacje dzielenia i mnożenia ułamków, a następnie operację dodawania ułamków

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} * \frac{4}{3} &= \frac{3}{2} * \frac{4}{3} + \frac{2 * 4}{3 * 3} \\ &= \frac{12}{6} + \frac{8}{9} = \frac{12 * 3}{18} + \frac{8 * 2}{18} \\ &= \frac{36 + 16}{18} = \frac{52}{18} = \frac{26}{9} = 2\frac{8}{9}\end{aligned}$$

Przykład 0.7 *Odległość od przystanku autobusowego do schroniska wynosi 10km. Turyści przeszli $6\frac{1}{2}$ km. Ile km pozostało im jeszcze do przejścia?*

Rozwiązanie. Obliczamy wartość wyrażenia arytmetycznego

$$10 - 6\frac{1}{2} = 10 - \frac{13}{2} = \frac{20}{2} - \frac{13}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Turystom pozostało do przejścia $3\frac{1}{2}$ km.

Przykład 0.8 Ania kupiła w sklepie ćwierć kilograma sera po 30 zł. za jeden kilogram, jabłek $2\frac{1}{4}$ kg po 6 zł. za jeden kilogram oraz pomidorów $\frac{3}{4}$ kg po 2 zł. za kilogram. Ile razem kosztowały zakupy?

Rozwiązanie. Obliczamy wartość sera, jabłek i pomidorów:

Cena sera

$$\frac{1}{4} * 30 \text{ zł} = \frac{30}{4} \text{ zł} = \frac{15}{2} \text{ zł} = 7\frac{1}{2} \text{ zł}$$

Cena jabłek

$$2\frac{1}{4} * 6 \text{ zł} = \frac{9}{4} * 6 \text{ zł} = \frac{54}{4} \text{ zł} = \frac{27}{2} \text{ zł} = 13\frac{1}{2} \text{ zł}.$$

Cena pomidorów

$$\frac{3}{4} * 2 \text{ zł} = \frac{6}{4} \text{ zł} = 1\frac{2}{4} \text{ zł} = 1\frac{1}{2} \text{ zł}$$

Razem zakupy kosztowały

$$\underbrace{7\frac{1}{2} \text{ zł}}_{\text{cena sera}} + \underbrace{13\frac{1}{2} \text{ zł}}_{\text{cena jabłek}} + \underbrace{1\frac{1}{2} \text{ zł}}_{\text{cena pomidorów}} = \frac{15}{2} \text{ zł} + \frac{27}{2} + \frac{3}{2} = \frac{15 + 27 + 3}{2} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2} \text{ zł}.$$

Odpowiedź: Ania zapłaciła za zakupy 22 złote i 50 groszy.

0.1 Proste wyrażenia arytmetyczne z nawiasami

Jeżeli w wyrażeniu arytmetycznym występują nawiasy to w pierwszej kolejności wykonujemy obliczenia w nawiasach zachowując kolejność operacji, pierwsze mnożenie i dzielenie, potem dodawanie i odejmowanie. Po wykonaniu obliczeń w nawiasach dalej obliczamy wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując również kolejność operacji arytmetycznych.

Na przykład, oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami

$$\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right) * \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right)$$

Najpierw obliczamy wartości wyrażeń arytmetycznych w nawiasach

$$\underbrace{\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right)}_{\text{nawias}} * \underbrace{\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right)}_{\text{nawias}} = \left(\frac{4+2}{3}\right) * \left(\frac{5-3}{4}\right) = \frac{6}{3} * \frac{2}{4} = 2 * \frac{1}{2} = 1$$

Przykład 0.9 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\left(\frac{3}{10} + \frac{9}{10}\right) : \frac{6}{5}$$

Rozwiązanie. Najpierw wykonujemy dodawanie w nawiasach, a następnie operację dzielenia ułamków

$$\left(\frac{3}{10} + \frac{9}{10}\right) : \frac{6}{5} = \frac{12}{10} : \frac{6}{5} = \frac{6}{5} * \frac{5}{6} = 1$$

Ćwiczenia

Przykład 0.10 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) * \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

Rozwiązanie: Obliczamy wartość wyrażenia arytmetycznego najpierw wykonując dodawanie i odejmowanie w nawiasach

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) * \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) * \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} * \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

Odp. $\frac{3}{16}$

Przykład 0.11 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

Rozwiązanie: Obliczamy wartość wyrażenia arytmetycznego najpierw wykonując dodawanie i odejmowanie w nawiasach

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = \frac{3}{4} * \frac{4}{1} = 3$$

Odp. 3

Przykład 0.12 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\left(2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}\right) : \left(2\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

Rozwiązanie: Obliczamy wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\left(2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}\right) : \left(2\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{2}\right) : \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{12}{2} : \frac{6}{3} = 6 : 2 = 3$$

Rozwiązanie: *Odp.* 3

Przykład 0.13 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) : \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

Rozwiązanie: Obliczamy wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) : \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}\right) : \frac{2}{3} = \frac{3+2-1}{6} * \frac{3}{2} = \frac{4}{6} * \frac{3}{2} = 1$$

Odp. 1

Przykład 0.14 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\left(6\frac{2}{7} - 1\frac{3}{7}\right) - \left(2\frac{5}{7} + 1\frac{3}{7}\right)$$

Rozwiązanie: Najpierw obliczamy wyrażenia w nawiasach zamieniając liczby mieszane na ułamki niewłaściwe

$$(6\frac{2}{7} - 1\frac{3}{7}) - (2\frac{5}{7} + 1\frac{3}{7}) = (\frac{44}{7} - \frac{10}{7}) - (\frac{19}{7} + \frac{10}{7}) = \frac{34}{7} - \frac{29}{7} = \frac{5}{7}$$

Przykład 0.15 Jaką liczbę należy odjąć od 6, żeby otrzymać liczbę $4\frac{1}{6}$?

Rozwiązanie: Należy odjąć liczbę równą różnicy

$$6 - 4\frac{1}{6} = 6 - \frac{25}{6} = \frac{36}{6} - \frac{25}{6} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$$

Przykład 0.16 W dziesięciolitrowej bańce było $4\frac{3}{4}$ litra mleka. Następnie dolano jeszcze $3\frac{1}{4}$ litra mleka. Ile mleka należy dolać, żeby wypełnić całą bańkę?

Rozwiązanie. Obliczamy wartość wyrażenia arytmetycznego

$$10 - (4\frac{3}{4} + 3\frac{1}{4}) = 10 - 8 = 2$$

Odpowiedź: Do bańki należy dolać 2 litrów mleka.

Przykład 0.17 Spakowana walizka waży $11\frac{1}{4}$ kg. Ile waży zawartość walizki, jeżeli walizka pusta waży $2\frac{3}{4}$ kg?

Rozwiązanie. Obliczamy wagę zawartości walizki jako różnicę wagi walizki zapakowanej $11\frac{1}{4}$ i walizki pustej $2\frac{3}{4}$

$$11\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4} = \frac{45}{4} - \frac{11}{4} = \frac{34}{4} = \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$$

Przykład 0.18 Jaką liczbę należy wpisać w miejsce x , żeby równość była prawdziwa?

$$5\frac{1}{9} + x = 7\frac{5}{9}$$

Rozwiązanie: W miejsce x należy wpisać różnicę liczby $7\frac{5}{9}$ i liczby $5\frac{1}{9}$

$$x = 7\frac{5}{9} - 5\frac{1}{9} = \frac{68}{9} - \frac{45}{9} = \frac{22}{9} = 2\frac{4}{9}$$

¹Rozwiązania piszemy w zeszytach dla ułamków zwykłych