

Temat: Ułamki dziesiętne

Ułamki zwykłe

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}, \frac{1}{1000000} \dots; itd,$$

o mianownikach 10, 100, 1000, 10000, 1000000, 1000000,*itd* można zapisać bez kreski ułamkowej, używając przecinka. Ułamki zapisane przy pomocy przecinka nazywamy ułamkami dziesiętnymi.

W zapisie dziesiętnym ułamków przecinek oddziela część całkowitą ułamka od części ułamkowej. Na przykład

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{10} & = & 0,1 \quad \text{czytamy zero calych i jedna dziesiata} \\ \frac{1}{100} & = & 0,01 \quad \text{czytamy zero calych i jedna setna} \\ \frac{1}{1000} & = & 0,001, \quad \text{czytamy zero calych i jedna tysieczna} \\ & & \dots itd \dots \dots \dots \dots \dots \dots itd \dots \end{array}$$

Podobnie piszemy ułamki zwykłe o mianownikach 10, 100, 1000,; z większą ilością cyfr zastępując kreskę przecinkiem

$$\begin{array}{lll} \frac{3}{10} & = & 0,3 \quad \text{trzy dziesiate} \\ \frac{5}{100} & = & 0,05, \quad \text{piec setnych} \\ \frac{35}{1000} & = & 0,035 \quad \text{trzydziesci piec tysiecznych} \\ \frac{735}{1000} & = & 0,735, \quad \text{siedemset trzedziesci piec tysiecznych} \\ 2\frac{3}{10} & = & 2,3 \quad \text{dwie cale i trzy dziesiate} \\ 10\frac{12}{100} & = & 10,12 \quad \text{dziesiec calych i dwanascie setnych,} \\ 125\frac{7}{1000} & = & 125,007 \quad \text{sto dwadziescia piec i siedem tysiecznych} \\ 3\frac{27}{10000} & = & 3,0027 \quad \text{trzy cale i dwadziescia siedem dziesieciotysiecznych} \end{array}$$

Mamy relacje odwrotne, ułamki dziesiętne piszemy jako ułamki zwykłe zamieniając przecinek kreską

$$\begin{array}{ll} 0,1 &= \frac{1}{10}, & 0,01 &= \frac{1}{100}, \\ 0,001 &= \frac{1}{1000}, & 0,3 &= \frac{3}{10}, \\ 0.05 &= \frac{5}{100}, & 0,035 &= \frac{35}{1000}, \\ 0,735 &= \frac{735}{1000}, & 2,3 &= 2\frac{3}{10}, \\ 10,12 &= 10\frac{12}{100}. \end{array}$$

0.1 Zamiana ułamka dziesiętnego na ułamek zwykły

W systemie pozycyjnym dziesiętnym, pierwsza cyfra po przecinku określa liczbę części dziesiętnych, druga cyfra po przecinku określa liczbę części setnych, trzecia pozycja określa liczbę części tysięcznych itd.

Na przykład sumę ułamków zwykłych

$$3 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{9}{1000} = 3,579$$

piszemy jako liczbę dziesiętną 3,579 równą 3 całe, 5 części dziesiątych 7 części setnych i 9 części tysięcznych, czytamy krótko

trzy całe i czterysta siedemdziesiąt dziewięć tysięcznych.

Podobnie, w systemie pozycyjnym dziesiętnym, pierwsza cyfra przed przecinkiem określa liczbę jednośc, druga określa liczbę dziesiątek, trzecia cyfra od przecinka w lewo określa liczbę setek, czwarta pozycja od przecinka w lewo określa liczbę tysięcy itd.

Na przykład liczba

$$3458,579 = 3 * 1000 + 4 * 100 + 5 * 10 + 8 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{9}{1000}$$

równa jest 3 tysiące plus 4 setki plus 5 dziesiątek plus 8 jednośc plus 5 części dziesiętnych plus 7 części setnych plus 9 części tysięcznych.

Liczbę 3458,479 czytamy:

trzy tysiące czterysta piędziesiąt osiem i czterysta siedemdziesiąt dziewięć tysięcznych.

Zadanie 0.1 Podaj cyfry całości, części dziesiątych, setnych i tysięcznych w ułamkach dziesiętnych

$$\begin{array}{ll} 1,005, & 0,010 \\ 7,358, & 15,632 \\ 253,352, & 123,937 \end{array}$$

Przykład 0.1 Zapisz ułamki dziesiętne 0.6 i 0.06 w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego, piszemy

$$0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad 0.06 = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$$

Przykład 0.2 Zapisz liczby mieszane

$$\begin{array}{ll} 3\frac{3}{10}, & 3\frac{3}{100} \\ 3\frac{333}{1000} & 3\frac{303}{100}, \end{array}$$

w postaci ułamków dziesiętnych.

Piszemy

$$\begin{array}{ll} 3\frac{3}{10} = 3,3, & 3\frac{3}{100} = 3,03 \\ 3\frac{333}{1000} = 3,333 & 3\frac{303}{100} = 3 + \frac{303}{100} = 3 + 3,03 = 6,03 \end{array}$$

Rozwiąż zadania proste

Zadanie 0.2 Zamień ułamki zwykłe $\frac{641}{100}$, $\frac{217}{100}$ na ułamki dziesiętne

Zadanie 0.3 Zamień ułamki zwykłe $\frac{29}{1000}$, $\frac{345}{100}$ na ułamki dziesiętne

Zadanie 0.4 Zamień ułamki dziesiętne na ułamki zwykłe 0.25, 5,25 na ułamki zwykłe

Zadanie 0.5 Zapisz w postaci ułamka zwykłego ułamki dziesiętne

$$0.75, \quad 4,50, \quad 0,14, \quad 0,037$$

i skróć, jeżeli to jest możliwe.

Przykład 0.3 Znajdź liczbę, której cyfra jedności wynosi 3, cyfra części setnych jest dwa razy mniejsza od cyfry części dziesiątych i dwa razy większa od cyfry części tysięcznych. Ile jest takich liczb?

Rozwiązanie. Już wiemy, że liczba jedności równa jest 3. Zatem, piszemy

$$3, \bigcirc \bigcirc \bigcirc$$

w kółka po przecinku mamy wstawić wybrane cyfry z cyfr

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Wiemy również, że cyfra części dziesiątych jest dwa razy większa od cyfry części setnych i cztery razy większa od cyfry części tysięcznych.

Wybieramy te cyfry, które dzielą się przez 2 i przez 4. To są cyfry 4 i 8, ponieważ

$$4 : 2 = 2, \quad 4 : 4 = 1 \quad \text{oraz} \quad 8 : 2 = 4, \quad 8 : 4 = 2$$

Zatem liczby

$$3,421 \quad i \quad 3,842$$

mają cyfrę części dziesiątych 4 dwa razy większą od cyfry części setnych oraz cztery razy większą od cyfry części tysięcznych oraz cyfrę 8, która również jest podzielna przez 2 i przez 4.

Pozostałe cyfry 0, 1, 2, 3, 5, 7, 9 nie dzielą się przez 2 i przez 4.

Rozwiąż zadania podobne

Zadanie 0.6 *Znajdź liczbę, której cyfra jedności wynosi 8, cyfra części setnych jest dwa razy od niej mniejsza, a cyfra części dziesiątych jest równa cyfrze części tysięcznych i wynosi 7 .*

Zadanie 0.7 *Znajdź liczbę, której cyfra jedności wynosi 7, cyfra części dziesiątych jest dwa razy większa od cyfry części setnych i cztery razy większa od cyfry części tysięcznych. Ile jest takich liczb ?*

Zadanie 0.8 *Znajdź liczbę, której cyfra jedności wynosi 5, cyfra części dziesiątych jest o dwa większa od cyfry części setnych i o cztery większa od cyfry części tysięcznych. Ile jest takich liczb ?*

0.2 Zamiana ułamka zwykłego na ułamek dziesiętny

Pierwszy prosty sposób zamiany ułamka zwykłego na dziesiętny polega na zapisaniu tego ułamka przy mianowniku, 10, 100, 1000, ... Ten sposób jest prosty, jednak stosuje się tylko dla pewnych ułamków.

Na przykład

Przykład 0.4 *Zamień ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne*

$$\begin{aligned}\frac{25}{10} &= 2,5 \\ \frac{91}{10} &= 9,1 \\ \frac{311}{100} &= 3,11 \\ \frac{529}{100} &= 5,29 \\ 9\frac{54}{1000} &= 9,054 \\ 6\frac{7}{1000} &= 6,007\end{aligned}$$

Przykład 0.5 *Zamień ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne*

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} &= \frac{3 * 25}{4 * 25} = \frac{75}{100} = 0.25 \\ \frac{7}{5} &= \frac{7 * 20}{5 * 20} = \frac{140}{100} = 1.4 \\ \frac{15}{250} &= \frac{15 * 4}{250 * 4} = \frac{60}{1000} = 0.06 \\ \frac{3}{8} &= \frac{3 * 125}{8 * 125} = \frac{375}{1000} = 0.375\end{aligned}$$

Przykład 0.6 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego i napisz wynik obliczeń w postaci ułamka dziesiętnego*

$$\begin{aligned}3\frac{7}{5} : 2 &= \frac{22}{5} : 2 = \frac{22}{10} = 2,2 \\ 4\frac{7}{25} : 4 &= \frac{107}{25} : 4 = \frac{107}{100} = 1,07 \\ 2\frac{3}{4} : 2 &= \frac{11}{4} : 2 = \frac{11}{4 * 2} = \frac{11}{8} = \frac{11 * 125}{8 * 125} = \frac{1375}{1000} = 1,375\end{aligned}$$

Przykład 0.7

$$\frac{1}{2} = \frac{1 * 5}{2 * 5} = \frac{5}{10} = 0.1$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\underbrace{2 * 2}_{2 \text{ razy}}} = \frac{5}{10} * \frac{5}{10} = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{\underbrace{2 * 2 * 2}_{3 \text{ razy}}} = \frac{5}{10} * \frac{5}{10} * \frac{5}{10} = \frac{125}{1000} = 0.125$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{\underbrace{2 * 2 * 2 * 2}_{4 \text{ razy}}} = \frac{5}{10} * \frac{5}{10} * \frac{5}{10} * \frac{5}{10} = \frac{625}{10000} = 0.0625$$

$$\frac{1}{32} = \frac{1}{\underbrace{2 * 2 * 2 * 2 * 2}_{5 \text{ razy}}} = \frac{5}{10} * \frac{5}{10} * \frac{5}{10} * \frac{5}{10} * \frac{5}{10} = \frac{3125}{100000} = 0.03125$$

$$\frac{1}{64} = \frac{1}{\underbrace{2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2}_{6 \text{ razy}}} = \frac{5}{10} * \frac{5}{10} * \frac{5}{10} * \frac{5}{10} * \frac{5}{10} * \frac{5}{10} = \frac{15625}{1000000} = 0.015625$$

Ogólnie, zauważmy, że ¹

$$\frac{1}{2^n} = \frac{1}{\underbrace{2 * 2 * 2 * 2 * 2 * \dots * 2}_{n \text{ razy}}} = \frac{5}{10} * \frac{5}{10} * \frac{5}{10} * \frac{5}{10} * \frac{5}{10} * \dots * \frac{5}{10} = \frac{5^n}{10^n}$$

$$\frac{5^n}{10^n} = \begin{cases} 0.5 & dla \ n = 1 \\ 0.25 & dla \ n = 2 \\ 0.125 & dla \ n = 3 \\ 0.0625 & dla \ n = 4 \\ 0.03125 & dla \ n = 5 \\ 0.015625 & dla \ n = 6 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Drugi sposób zamiany ułamków zwykłych na dziesiętne polega na dzieleniu licznika przez mianownik.

Na przykład

Przykład 0.8 Zamień ułamek $\frac{1}{4}$ na ułamek dziesiętny.

Rozwiązanie. Dzielimy $1=1,00$ przez 4 . Zauważamy, że zera po przecinku

¹Nie obowiązkowe uogólnienie

nie zmieniają wartości 1

$$\begin{array}{r}
 0,25 \\
 \text{---} \\
 1,00 \quad : 4 \\
 \text{---} 8 \\
 \text{---} \\
 20 \\
 \text{---} 20 \\
 \text{---} \\
 0
 \end{array}$$

Odpowiedź: $\frac{1}{4} = 0,25$

Natomiast ułamek zwykły $\frac{1}{3}$ możemy zamienić na ułamek dziesiętny z określoną dokładnością. Na przykład

Przykład 0.9 Zamień ułamek $\frac{1}{3}$ na ułamek dziesiętny z dokładnością dwie cyfry po przecinku.

Rozwiązanie. Dzielimy $1=1,00$ przez 3. Zauważamy, że zera po przecinku nie zmieniają wartości ułamka dziesiętnego

$$\begin{array}{r}
 0,33 \\
 \text{---} \\
 1,00 \quad : 3 \\
 \text{---} 9 \\
 \text{---} \\
 10 \\
 \text{---} 9 \\
 \text{---} \\
 1
 \end{array}$$

Zauważmy, że to dzielenie zawsze kończy się resztą 1 i ciągłym dopisywaniem cyfry 3 na następnych miejscach po przecinku, aż do nieskończoności. Kończymy dopisaniem drugiej 3-jki po przecinku wynikiem 0.33 obarczonym błędem zaokrąglenia 0.0033333...;

0.2.1 Ćwiczenia

Zadanie 0.9 *Zamień ułamek zwykły na dziesiętny*

$$(i) \quad \frac{3}{5}$$

$$(ii) \quad \frac{37}{50}$$

$$(iii) \quad \frac{253}{250}$$

Rozwiązanie. (i) Rozszerzamy ułamek do mianownika 10 mnożąc licznik i mianownik przez 2

$$\frac{3}{5} = \frac{3 * 2}{5 * 2} = \frac{6}{10} = 0,6$$

Rozwiązanie. (ii) Rozszerzamy ułamek do mianownika 100 mnożąc licznik i mianownik przez 2

$$\frac{37}{50} = \frac{37 * 2}{50 * 2} = \frac{74}{100} = 0,74$$

Rozwiązanie. (iii) Rozszerzamy ułamek do mianownika 1000 mnożąc licznik i mianownik przez 4

$$\frac{253}{250} = \frac{253 * 4}{250 * 4} = \frac{1012}{1000} = 1,012$$

Zadanie 0.10 *Zamień ułamek zwykły na dziesiętny*

$$(i) \quad \frac{29}{20}$$

$$(ii) \quad \frac{162}{45}$$

$$(iii) \quad \frac{35}{15}$$

$$(iv) \quad \frac{22}{7}$$

Rozwiązanie (i) Dzielimy $29=29,00$ przez 20. Zauważamy, że zera po przecinku nie zmieniają wartości ułamka dziesiętnego

$$\begin{array}{r}
 0,145 \\
 \underline{\quad} \\
 29,00 : 20 \\
 - 20 \\
 \underline{\quad} \\
 90 \\
 - 80 \\
 \underline{\quad} \\
 100 \\
 - 100 \\
 \underline{\quad} \\
 0
 \end{array}$$

Odp. Ułamek zwykły, dwadzieścia dziewięć dwudziestych to 145 tysięcznych w zapisie ułamka dziesiętnego

$$\frac{29}{20} = 0.145$$

Rozwiązanie (ii) Dzielimy 162,00 przez 45. Zauważamy, że zera po przecinku nie zmieniają wartości ułamka dziesiętnego

$$\begin{array}{r}
 3,6 \\
 \underline{\quad} \\
 162,00 : 45 \\
 - 135 \\
 \underline{\quad} \\
 270 \\
 - 270 \\
 \underline{\quad} \\
 0
 \end{array}$$

Odp. Ułamek zwykły, sto sześćdziesiąt dwa czterdziestych piątych to 3 całe i sześć dziesiątych w zapisie ułamka dziesiętnego

$$\frac{162}{45} = 3.6$$

Rozwiązanie (iii) Dzielimy 35,00 przez 15. Zauważamy, że zera po przecinku nie zmieniają wartości ułamka dziesiętnego

$$\begin{array}{r}
 2,33 \\
 \text{---} \\
 35,00 : 15 \\
 - 30 \\
 \text{---} \\
 50 \\
 - 45 \\
 \text{---} \\
 50 \\
 - 45 \\
 \text{---} \\
 5
 \end{array}$$

Odp. Ułamek zwykły, trzydzieści pięć piętnastych to dwa całe i 0.3333....
zaokrąglamy do dwóch cyfr po przecinku, w zapisie dziesiętnym

$$\frac{35}{15} = 2.33$$

z błędem zaokrąglenia 0.003333333333..... :

Rozwiązanie (iv) Dzielimy 22,00 przez 7. Zauważamy, że zera po przecinku nie zmieniają wartości ułamka dziesiętnego

$$\begin{array}{r}
 3,14 \\
 \text{---} \\
 22,00 : 7 \\
 - 21 \\
 \text{---} \\
 10 \\
 - 7 \\
 \text{---} \\
 30 \\
 - 28 \\
 \text{---} \\
 2
 \end{array}$$

Odp. Zaokrąglona wartość ułamka zwykłego, dwadzieścia dwie siódme

$$\frac{22}{7} \approx 3.14$$

do dwóch cyfr po przecinku przybliża wartość liczby π z błędem zaokrąglenia

$$\pi - 3.14 = \underbrace{3.14159265....}_{\text{liczba } \pi} - 3.14 = 0.00159265....;$$

0.3 Jednostki miary

Wzorzec jednego metra wykonany z platynowoirydowego materiału przechowywany jest w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag koło Paryża.

Podstawową jednostką miary długości jest *metr*, piszemy 1 *m*. Pochodnymi miary jednego metra są centymetry, piszemy 1 *cm*, milimetry, piszemy 1 *mm*, decymetry, piszemy 1 *dm* i kilometry, piszemy 1 *km*

- 1 cm = 10 mm
- 1 dm = 10 cm = 100 mm
- 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm
- 1 km = 1000 m = 100 000 cm = 1 000 000 mm

Przykład 0.10 Podane długości napisz jako ułamki dziesiętne wyrażone w centymetrach, metrach i kilometrach

$$65mm = 6,5cm = 0.065m = 0.000065km$$

$$1200cm =m =km$$

$$2500cm =km$$

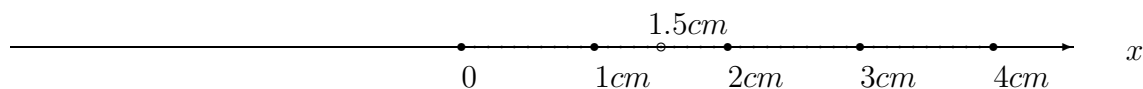
$$12500cm =km$$

Przykład 0.11 Zamień liczby mieszane na ułamki dziesiętne i zaznacz na osi liczbowej ułamki dziesiętne

$$1\frac{1}{2}cm =$$

$$2\frac{1}{5}cm =$$

$$3\frac{3}{10}cm =$$



Na osi liczbowej zaznaczone są milimetry i centymetry

0.4 Dodawanie pisemne ułamków dziesiętnych

Przykład 0.12 Wykonaj dodawanie pisemne

$$\begin{array}{r} 1,42 \\ + 2,27 \\ \hline 3,69 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5,32 \\ + 2,52 \\ \hline \end{array}$$

Przykład 0.13 Wykonaj dodawanie pisemne

$$\begin{array}{r} 15,68 \\ + 25,26 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35,32 \\ + 4,56 \\ \hline \end{array}$$

Przykład 0.14 Wykonaj dodawanie pisemne

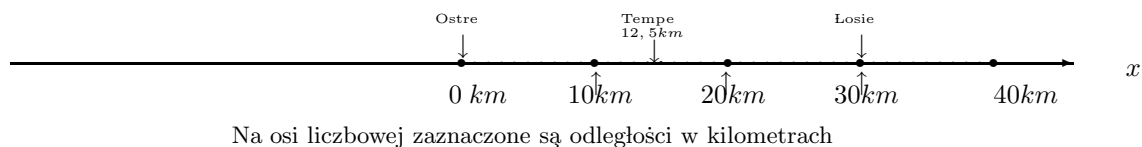
$$\begin{array}{r} 99,99 \\ + 55,55 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 258,45 \\ + 47,65 \\ \hline \end{array}$$

Przykład 0.15 Znajdź liczbę o 9,854 większą od liczby 5,656

Liczbą większą o 9,854 większą od liczby 5,656 jest suma liczb 9,854+5,656, którą obliczamy pisemnie

$$\begin{array}{r} 9,854 \\ + 5,656 \\ \hline \end{array}$$

Przykład 0.16 Kazik dojeżdża pociągami do szkoły ze stacji Ostre do stacji Łosie. Po przejechaniu 12,5km, pociąg zatrzymuje się na stacji Tempe. Wtedy wsiada do pociągu Władek. Razem chłopcy jadą do szkoły 17,5 km. Ile kilometrów do szkoły w Łosie codziennie dojeżdżają chłopcy? Zaznacz na osi liczbowej drogę dojazdu do szkoły w Łosie Kazika i Władka.



Jasne, że Władek przejeżdża codziennie do szkoły 17,5km. Natomiast Kazik przejeżdża codziennie do szkoły o 12,5km więcej. Obliczamy sumę ułamków dziesiętnych pisemnie

$$\begin{array}{r} 12,5 \\ + 17,5 \\ \hline 30,0 \end{array}$$

Odp. Kazik przejeżdża codziennie do szkoły 30 km, natomiast Władek przejeżdża do szkoły codziennie 17,5 km

0.5 Odejmowanie pisemne ułamków dziesiętnych

Przykład 0.17 Wykonaj dodawanie pisemne

$$\begin{array}{r} 3,49 \\ - 2,25 \\ \hline 1,24 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5,32 \\ - 2,52 \\ \hline \end{array}$$

Przykład 0.18 Wykonaj dodawanie pisemne

$$\begin{array}{r} 25,68 \\ - 15,26 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35,32 \\ - 4,56 \\ \hline \end{array}$$

Przykład 0.19 Wykonaj dodawanie pisemne

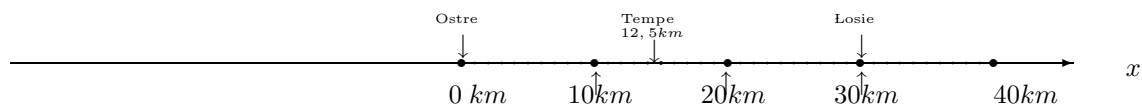
$$\begin{array}{r} 99,99 \\ - 55,55 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 258,45 \\ - 47,65 \\ \hline \end{array}$$

Przykład 0.20 Znajdź liczbę o 5,656 mniejszą od liczby 9,854

Liczbą mniejszą o 5,656 od liczby 9,854 jest różnica liczb $9,854 - 5,656$, którą obliczamy pisemnie

$$\begin{array}{r} 9,854 \\ - 5,656 \\ \hline \end{array}$$

Przykład 0.21 Kazik dojeżdża pociągami do szkoły ze stacji Ostre do stacji Łosie odległej o 30 km. Pociąg zatrzymuje się na następnej stacji w Tempe. Wtedy wsiada do pociągu Władek i razem chłopcy jadą do szkoły 17.5 km. Oblicz ile kilometrów jest ze stacji Ostre do stacji Tempe. Zaznacz na osi liczbowej odległość ze stacji Ostre do stacji Tempe i ze stacji Tempe do stacji Łosie.



Na osi liczbowej zaznaczone są odległości w kilometrach

Jasne, że Władek przejeżdża codziennie do szkoły 17.5 km.

$$\begin{array}{r} 30.0 \\ - 17,5 \\ \hline 12,5 \end{array}$$

Odp. Odległość ze stacji Ostre do stacji Tempa wynosi 12.5 km