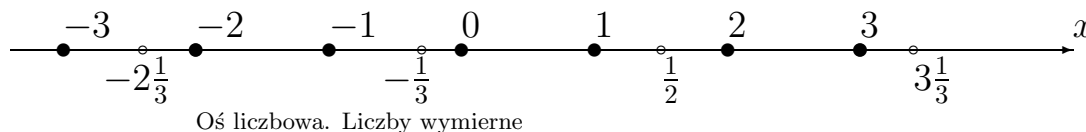


Temat : Ułamki zwykłe. Liczby wymierne.



To opracowanie pojęcia ułamka zwykłego jako ilorazu liczb całkowitych p i q stanowi uzupełnienie przykładów i zadań podanych w rekomendowanym podręczniku "Matematka z plusem 4". Przed sformułowaniem przykładów i zadań przypominamy pojęcia podstawowe.

0.1 Ułamki zwykłe

Ułamek zwykły piszemy w ogólnej postaci

$$\frac{\overbrace{p}^{\text{licznik}}}{\underbrace{q}_{\text{mianownik}}}, \quad q \neq 0,$$

gdzie licznik $p = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \dots$; jest dowolną liczbą całkowitą,

a mianownik $q \neq 0$, $q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$; jest również liczbą całkowitą różną od zera.

Przykład 0.1 Ułamek zwykły

$$\frac{\overbrace{3}^{\text{licznik}}}{\underbrace{4}_{\text{mianownik}}}$$

ma licznik $p = 3$ i mianownik $q = 4$.

Wśród ułamków zwykłych wyróżniamy

1. *ułamki właściwe*, $\frac{p}{q}$, $p < q$, $q \neq 0$,
2. *ułamki niewłaściwe*, $\frac{p}{q}$, $p > q$, $q \neq 0$,
3. *liczby mieszane* to zapis ułamków niewłaściwych w których wyróżniamy część całkowitą ułamków.

Ułamek właściwy piszemy w ogólnej postaci,

$$\frac{p}{q}, \quad \text{dla } p < q.$$

Ułamek właściwy ma licznik p mniejszy od mianownika q .
Na przykład, ułamki

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{25}{46}, \frac{125}{347}$$

są właściwe, gdyż ich liczniki są mniejsze od mianowników. Zauważmy, że wartość każdego ułamka właściwego

$$\frac{p}{q} < 1, \quad p < q$$

jest mniejsza od 1

Ułamek niewłaściwy piszemy w ogólnej postaci

$$\frac{p}{q}, \quad \text{dla } p > q.$$

Ułamek niewłaściwyma licznik p większy od mianownika q .

Na przykład, ułamki

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{15}{8}, \quad \frac{25}{21}, \quad \frac{125}{114}$$

są niewłaściwe, gdyż ich liczniki są większe od mianowników. Zatem, wartość każdego ułamka niewłaściwego

$$\frac{p}{q} > 1, \quad p > q$$

jest większa od 1.

Jeżeli licznik ułamka równy jest mianownikowi tego ułamka, $p = q$, lub $q = 1$ to ten ułamek jest liczbą całkowitą.

Liczby mieszane. Ułamek niewłaściwy można napisać wyróżniając jego część całkowitą i resztę w postaci ułamka właściwego. Ten zapis nazywamy *liczbą mieszaną*.

Na przykład, ułamki

$$\frac{4}{3}, \quad \frac{9}{4}, \quad \frac{29}{5}$$

piszemy w postaci *liczby mieszanej*

$$1\frac{1}{3}, \quad 2\frac{1}{4}, \quad 5\frac{4}{5}$$

Całość z ułamka zwykłego $\frac{p}{q}$ oznaczamy symbolem $[\frac{p}{q}]$.¹

Całość z ułamka

$$[\frac{p}{q}] \leq \frac{p}{q}, \quad q \neq 0$$

jest największą liczbą całkowitą nie większą od ułamka $\frac{p}{q}$.

Przykład 0.2 Obliczamy całości z danych ułamków

$$[\frac{4}{3}] = 1 \quad \text{bo} \quad 1 \text{ jest największa liczba całkowita taka, że } 1 \leq \frac{4}{3}$$

$$[\frac{9}{4}] = 2 \quad \text{bo} \quad 2 \text{ jest największa liczba całkowita taka, że } 2 \leq \frac{9}{4}$$

$$[\frac{29}{5}] = 5 \quad \text{bo} \quad 5 \text{ jest największa liczba całkowita taka, że } 5 \leq \frac{29}{5}$$

Przykład 0.3 Napisz liczby

$$(i) \quad 2\frac{2}{3}, \quad (ii) \quad 6\frac{3}{5}, \quad (iii) \quad 21\frac{3}{4}$$

w postaci ułamka niewłaściwego

¹Całość z liczby x oznaczana jest również symbolem $E[x]$. Wtedy symbol $E[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą $E[x] \leq x$, Litera E pochodzi od słowa angielskiego *Entire* - całkowity

Obliczamy (i)

$$2\frac{2}{3} = \frac{2 * 3 + 2}{3} = \frac{8}{3}$$

Obliczamy (ii)

$$6\frac{3}{5} = \frac{6 * 5 + 3}{5} = \frac{33}{5}$$

Obliczamy (iii)

$$21\frac{3}{4} = \frac{21 * 4 + 3}{4} = \frac{87}{4}$$

Zadanie 0.1 *Napisz ułamki niewłaściwe*

$$(i) \frac{25}{3}, \quad (ii) \frac{131}{5}, \quad (iii) \frac{257}{4}.$$

w postaci ułamków mieszanych.

Zadanie 0.2 *Napisz liczby mieszane*

$$(i) 7\frac{6}{5}, \quad (ii) 15\frac{3}{7}, \quad (iii) \frac{131}{24}.$$

w postaci ułamków niewłaściwych

0.2 Operacje arytmetyczne na ułamkach

Umiejętność sprawnego wykonywania operacji dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia ułamków jest podstawowa na drugim etapie nauczania matematyki.

Niżej podajemy przykłady z zadaniami z zakresu operacji arytmetycznych na ułamkach.

Dodawanie ułamków. Dodając ułamki w pierwszej kolejności należy znaleźć wspólny mianownik. Może to być najmniejsza wspólna wielokrotna mianowników

Przykład 0.4 *Dodaj ułamki*

$$(i) \frac{3}{7} + \frac{4}{7}, \quad (ii) \frac{6}{11} + \frac{9}{11} + \frac{10}{11}$$

Rozwiązanie (i). W tym przykładzie nie ma potrzeby szukania wspólnego mianownika bo jest nim liczba 7. Zatem piszemy sumę ułamków pod wspólnym mianownikiem

$$\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = \frac{3 + 4}{7} = \frac{7}{7} = 1.$$

Rozwiązanie (ii). Podobnie w tym przykładzie wspólnym mianownikiem jest liczba 11. Zatem piszemy sumę ułamków pod wspólnym mianownikiem

$$\frac{6}{11} + \frac{9}{11} + \frac{10}{11} = \frac{6 + 9 + 10}{11} = \frac{25}{11} = 2\frac{3}{11}.$$

Przykład 0.5 *Dodaj ułamki*

$$(i) \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad (ii) \frac{1}{4} + \frac{3}{5}$$

Rozwiązanie (i). W tym przykładzie wspólnym mianownikiem jest liczba 6 bo liczba

$$6 = 2 * 3$$

jest podzielna przez 2 i 3. Zatem piszemy sumę ułamków pod wspólnym mianownikiem 6

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

Rozwiązanie (ii). Podobnie w tym przykładzie wspólnym mianownikiem jest liczba 20 bo liczba

$$20 = 4 * 5$$

jest liczba 4 i liczba 5. Zatem piszemy sumę ułamków pod wspólnym mianownikiem 20.

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{5}{20} + \frac{12}{20} = \frac{5+12}{20} = \frac{17}{20}$$

Zadanie 0.3 Dodaj ułamki

$$(i) \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

$$(ii) \quad \frac{4}{5} + \frac{3}{10}$$

$$(iii) \quad \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$$

Odejmowanie ułamków. Odejmując ułamki w pierwszej kolejności należy znaleźć wspólny mianownik. Może to być najmniejsza wspólna wielokrotna mianowników.

Przykład 0.6 Odejmij ułamki

$$(i) \quad \frac{5}{9} - \frac{4}{9}, \quad (ii) \quad \frac{9}{15} - \frac{3}{15}.$$

Rozwiązanie (i). W tym przykładzie nie ma potrzeby szukania wspólnego mianownika bo jest nim liczba 9. Zatem piszemy różnicę ułamków pod wspólnym mianownikiem

$$\frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5-4}{9} = \frac{1}{9}.$$

Rozwiązanie (ii). Podobnie w tym przykładzie wspólnym mianownikiem jest liczba 15. Zatem piszemy różnicę ułamków pod wspólnym mianownikiem

$$\frac{9}{15} - \frac{3}{15} = \frac{9-3}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

Przykład 0.7 Odejmij ułamki

$$(i) \quad \frac{5}{9} - \frac{1}{3}$$

$$(ii) \quad \frac{33}{25} - \frac{21}{50}$$

$$(iii) \quad \frac{253}{500} + \frac{126}{1000}$$

Rozwiązanie (i). W tym przykładzie wspólnym mianownikiem jest liczba $9 = 3 * 3$ bo dzielnikiem liczby 9 jest liczba 3 i liczba 3. Zatem piszemy różnicę ułamków pod wspólnym mianownikiem 9

$$\frac{5}{9} - \frac{1}{3} = \frac{5}{9} - \frac{3}{9} = \frac{5-3}{9} = \frac{2}{9}$$

Rozwiązanie (ii). Podobnie w tym przykładzie wspólnym mianownikiem jest liczba $50 = 2 * 25$ bo dzielnikiem liczby 50 jest liczba 2 i liczba 25. Zatem piszemy różnicę ułamków pod wspólnym mianownikiem 50.

$$\frac{33}{25} - \frac{21}{50} = \frac{66}{50} - \frac{21}{50} = \frac{66-21}{50} = \frac{45}{50} = \frac{9}{10}.$$

Rozwiązanie (iii). Podobnie w tym przykładzie wspólnym mianownikiem jest liczba $1000 = 2 * 500$ bo dzielnikiem liczby 1000 jest liczba 2 i liczba 500. Zatem piszemy różnicę ułamków pod wspólnym mianownikiem 1000

$$\frac{253}{500} - \frac{126}{1000} = \frac{506}{1000} - \frac{126}{1000} = \frac{506-126}{1000} = \frac{380}{1000} = \frac{38}{100} = \frac{19}{50}.$$

Zadanie 0.4 *Odejmij ułamki*

$$(i) \quad \frac{38}{9} - \frac{1}{2}$$

$$(ii) \quad \frac{33}{4} - \frac{21}{5}$$

$$(iii) \quad 2\frac{14}{15} - \frac{2}{5} - \frac{5}{6}$$

Mnożenie ułamków. Operacja mnożenia ułamków jest bardzo prosta.

Ułamek

$$\frac{p}{q}, \quad q \neq 0$$

mnożymy przez ułamek

$$\frac{s}{t}, \quad s \neq 0$$

według wzoru:

licznik razy licznik, mianownik razy mianownik

$$\frac{p}{q} * \frac{s}{t} = \frac{p * s}{q * t}, \quad q \neq 0, \quad t \neq 0$$

Przykład 0.8 *Pomnóżymy ułamki*

$$(a) \quad \frac{2}{3} * \frac{4}{5} = \frac{2 * 4}{3 * 5} = \frac{8}{15}$$

$$(b) \quad \frac{10}{13} * \frac{21}{25} = \frac{10 * 21}{13 * 25} = \frac{210}{273} = \frac{70}{91}$$

Zadanie 0.5 *Pomnóż ułamki*

$$(a) \quad \frac{3}{7} * \frac{13}{15}$$

$$(b) \quad \frac{25}{33} * \frac{3}{5}$$

Dzielenie ułamków. Operacja dzielenia ułamków jest również bardzo prosta.

Ułamek

$$\frac{p}{q}, \quad q \neq 0$$

dzielimy przez ułamek

$$\frac{s}{t}, \quad s \neq 0$$

według wzoru:

ułamek $\frac{p}{q}$ to jest dzielną mnożymy przez odwrotność dzielnika $\frac{s}{t}$ to jest przez $\frac{t}{s}$ ²

$$\frac{p}{q} : \frac{s}{t} = \frac{p}{q} * \frac{t}{s}, \quad q \neq 0, \quad t \neq 0, \quad s \neq 0.$$

Przykład 0.9 Podzielmy ułamki

$$(a) \quad \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} * \frac{5}{4} = \frac{2 * 5}{3 * 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 1 \frac{1}{6}.$$

$$(b) \quad \frac{10}{13} : \frac{21}{25} = \frac{10}{13} * \frac{25}{21} = \frac{10 * 25}{13 * 21} = \frac{250}{273}.$$

Zadanie 0.6 Podziel ułamki

$$(a) \quad \frac{5}{8} : \frac{3}{7}$$

$$(b) \quad \frac{15}{45} : \frac{27}{25}$$

0.3 Obliczanie ułamka z danej liczby

Łatwo obliczamy ułamek z danej liczby. Mianowicie, mając dany ułamek

$$\frac{p}{q}, \quad q \neq 0$$

i liczbę a mnożymy ten ułamek przez liczbę a jak niżej

$$\frac{p}{q} * a = \frac{p * a}{q}, \quad q \neq 0.$$

Przykład 0.10 Oblicz $\frac{2}{5}$ z liczby 35

Rozwiązanie. Tutaj mamy ułamek

$$\frac{p}{q} = \frac{2}{5} \quad i \quad \text{liczba } a = 35.$$

Obliczmy ułamek $\frac{2}{5}$ z liczby 35

$$\frac{2}{5} * 35 = \frac{2 * 35}{5} = \frac{2 * 7}{1} = 14$$

Przykład 0.11 Książka ma 120 stron. Ania przeczytała $\frac{2}{3}$ stron książki. Ile stron książki pozostało Ani do przeczytania?

²Operacja dzielenia : jest operacją odwrotną do operacji mnożenia *

Rozwiązanie. Obliczamy ile stron książki przeczytała Ania jako ułamek $\frac{2}{3}$ liczby 120

$$\frac{2}{3} * 120 = \frac{2 * 120}{3} = 2 * 40 = 80$$

Ania przeczytała 80 stron książki, która ma 120 stron. Zatem pozostało Ani do przeczytania

$$120 - 80 = 40$$

Odpowiedź: Ani pozostało do przeczytania 40 stron.

0.4 Obliczanie liczby z danego jej ułamka

Również łatwo obliczamy liczbę a , jeżeli znamy jej ułamek

$$\frac{p}{q} = b, \quad p \neq 0, \quad q \neq 0.$$

Mianowicie, dzielimy liczbę b przez ułamek $\frac{p}{q}$, jak niżej

$$a = b : \frac{p}{q} = b * \frac{q}{p}, \quad p \neq 0, \quad q \neq 0.$$

Liczbę b dzielimy przez ułamek $\frac{p}{q}$ mnożąc liczbę b przez odwrotność tego ułamka równą $\frac{q}{p}$.

Przykład 0.12 Oblicz liczbę a , której $\frac{2}{5} * a$ jest równy $b = 14$

Rozwiązanie. Tutaj mamy ułamek

$$\frac{p}{q} = \frac{2}{5} \quad i \quad \text{liczba} \quad b = 14.$$

Obliczmy liczbę a

$$a = 14 : \frac{2}{5} = 14 * \frac{5}{2} = 35$$

Liczbę $b = 14$ dzielimy przez ułamek $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$ mnożąc liczbę $b = 14$ przez odwrotność tego ułamka równą $\frac{q}{p} = \frac{5}{2}$.

Przykład 0.13 Ania przeczytała 80 stron książki co stanowi $\frac{2}{3}$ wszystkich stron książki. Ile stron ma ta książka ?

Rozwiązanie. Tutaj ułamek $\frac{p}{q} = \frac{2}{3}$ i liczba $b = 80$. Obliczamy ile stron ma książka

$$a = 80 : \frac{2}{3} = 80 * \frac{3}{2} = 120$$

Odpowiedź: Książka ma 120 stron.

0.5 Ćwiczenia

Ćwiczenie 0.1 Zaznacz i uzasadnij który z ułamków

$$(a) \frac{5}{12}$$

$$(b) \frac{21}{4}$$

$$(c) 3\frac{3}{4}$$

jest ułamkiem właściwym, niewłaściwym lub liczbą mieszaną

Ćwiczenie 0.2 Napisz ułamki niewłaściwe

$$(i) \frac{30}{9}, \quad (ii) \frac{41}{12}.$$

w postaci liczb mieszanych.

Ćwiczenie 0.3 Napisz liczby mieszane

$$(i) 3\frac{3}{4}, \quad (ii) 2\frac{2}{3}.$$

w postaci ułamków niewłaściwych

Ćwiczenie 0.4 Oblicz wartość wyrażeń arytmetycznych

$$(i) \frac{2}{3} + 2\frac{1}{6}.$$

$$(ii) \frac{10}{6} - \frac{4}{9}.$$

$$(iii) \frac{13}{2} * \frac{4}{13}.$$

$$(iv) \frac{4}{5} : \frac{4}{25}.$$

Ćwiczenie 0.5 Oblicz iloczyn ułamków

$$(i) \frac{5}{8} * \frac{7}{10}, \quad (ii) \frac{12}{13} * \frac{15}{16}.$$

Ćwiczenie 0.6 Podziel ułamki

$$(i) \frac{5}{9} : \frac{3}{5}, \quad (ii) \frac{54}{27} : \frac{12}{18}.$$

Ćwiczenie 0.7 Oblicz wartość wyrażeń arytmetycznych

$$(i) \frac{2}{3} * \frac{6}{5} + \frac{5}{6} * \frac{3}{4}.$$

$$(ii) \frac{7}{6} * \frac{4}{21} - \frac{4}{9} * \frac{18}{5}.$$

$$(iii) \frac{3}{2} : \frac{5}{4} + \frac{4}{5} : \frac{5}{4}.$$

$$(iv) \frac{4}{5} : \frac{4}{25} - \frac{8}{9} : \frac{27}{16}.$$

Ćwiczenie 0.8 Oblicz $\frac{1}{3}$ z liczby 24.

Ćwiczenie 0.9 Oblicz $\frac{3}{5}$ z liczby 50.

Ćwiczenie 0.10 Oblicz liczbę a której $\frac{1}{3}$ równa jest 15.

Ćwiczenie 0.11 Ile kosztuje książka, jeżeli $\frac{1}{4}$ jej wartości równa jest 25 zł.

Ćwiczenie 0.12 Książka ma 150 stron. Marysia przeczytała 50 stron tej książki. Jaka część książki została Marysi do przeczytania?

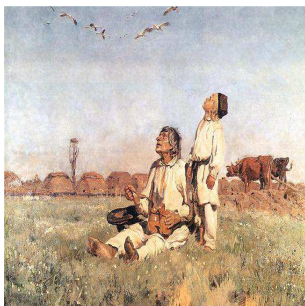
Ćwiczenie 0.13 Motocyklista przejechał 120 km. Pozostało motocykliście do przejechania $\frac{1}{5}$ trasy. W jak długą trasę wyruszył motocyklista ?

Ćwiczenie 0.14 .

Mały pastuszek zauważył lecące bociany i radośnie krzyknął chyba ich leci 100.

Starszy pastuch odpowiedział : leci ich dużo mniej, gdyby leciało ich drugie tyle i pół tyle i ćwierć tyle i jeszcze żebyś ty z nimi poleciał to wtedy byłoby ich razem 100.

Ile bocianów leciało po niebie ?



Obraz Bociany

Józef Chełmoński (ur. 1849 zm. 1914)