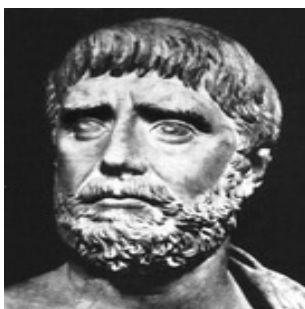


Twierdzenie Talesa. Proporcje.

Tales z Miletu (625-545 B.C) stworzył Szkołę Jońską Astronomii, Matematyki i Filozofii, która wywarła wielki wpływ na całą cywilizację świata. Przez długi okres Tales przebywał w Egipcie, gdzie poznał egipską wiedzę z Astronomii, Geometrii i Arytmetyki.

W Szkole Jońskiej znany był kalendarz, 365 dni w roku, okresy zaciemnienia słońca i proporcje odcinków wyznaczonych przez przecięcie ramion danego kąta prostą. Proporcje odcinków sformułowane w Twierdzeniu Talesa, uczone są w szkołach do współczesnych czasów.

W filozofii, Tales odwoływał się do racjonalnego poznawania przyrody i wyznawał istnienie dusz nieśmiertelnych.



Tales z Miletu (625-545 B.C.)

0.0.1 Proporcje

Proporcja prosta. Wartości zmiennej y są proporcjonalne do wartości zmiennej x , jeżeli dla ustalonej wartości współczynnika proporcji k zachodzi równość

$$y = k * x$$

dla wszystkich rzeczywistych wartości zmiennej x .

Wtedy mówimy, że wartości zmiennej y są wprost proporcjonalne do wartości zmiennej x .

Przykład 0.1 *Wartości zmiennej*

$$y = 2, 4, 6, 8, 10$$

są wprost proporcjonalne do wartości zmiennej

$$x = 1, 2, 3, 4, 5$$

dla współczynnika proporcji $k = 2$, ponieważ

$$y = 2x, \quad \text{dla } x = 1, 2, 3, 4, 5$$

Zauważmy, że jeżeli zmienna y jest wprost proporcjonalna do zmiennej x ze współczynnikiem proporcji k , to zmienna x jest wprost proporcjonalna do zmiennej y ze współczynnikiem proporcji $\frac{1}{k}$.

Zatem, zmienna

$$x = 1, 2, 3, 4, 5$$

jest wprost proporcjonalna do zmiennej

$$y = 2, 4, 6, 8, 10$$

ze współczynnikiem proporcji $\frac{1}{2}$, ponieważ

$$x = \frac{1}{2}y \quad \text{dla } y = 2, 4, 6, 8, 10.$$

Podobnie wartości zmiennej

$$y = 10, 20, 30, 40, 50$$

są wprost proporcjonalne do wartości zmiennej

$$x = 1, 2, 3, 4, 5$$

dla współczynnika $k = 10$ ponieważ

$$y = 10 * x \quad \text{dla } x = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Natomiast zmienna x jest wprost proporcjonalna do zmiennej y ze współczynnikiem proporcji $\frac{1}{10}$.

Istotnie, zmienna

$$x = 1, 2, 3, 4, 5$$

jest wprost proporcjonalna do zmiennej

$$y = 10, 20, 30, 40, 50$$

ze współczynnikiem proporcji $\frac{1}{10}$, ponieważ

$$x = \frac{1}{10}y \quad \text{dla } y = 10, 20, 30, 40, 50.$$

Proporcja odwrotna. Wartości zmiennej y są odwrotnie proporcjonalne do wartości zmiennej $x \neq 0$, jeżeli dla ustalonej wartości współczynnika proporcji k zachodzi równość

$$y = \frac{k}{x}, \quad x \neq 0$$

dla wszystkich rzeczywistych wartości y , jeżeli $x \neq 0$.

Wtedy mówimy, że wartości y są odwrotnie proporcjonalne do wartości zmiennej x .

Przykład 0.1 *Wartości zmiennej*

$$y = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$$

są odwrotnie proporcjonalne do wartości zmiennej

$$x = 1, 2, 3, 4, 5$$

dla współczynnika proporcji $k = 1$, ponieważ

$$y = \frac{1}{x}, \quad \text{dla } x = 1, 2, 3, 4, 5$$

Podobnie wartości zmiennej

$$y = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$$

są odwrotnie proporcjonalne do wartości zmiennej

$$x = 10, 20, 30, 40, 50$$

dla współczynnika $k = 10$, ponieważ

$$y = \frac{10}{x} \quad \text{dla } x = 10, 20, 30, 40, 50.$$

W fizyce doświadczalnej przewodnictwa elektrycznego prądu stałego znane jest prawo Ohma.

Prawo Ohma. *Dla prądu stałego natężenie I jest wprost proporcjonalne do napięcia U i odwrotnie proporcjonalne do oporu przewodnika R .*

Zatem zależność pomiędzy natężeniem, napięciem i oporem przewodnika wyraża się wzorem:

$$I = \frac{U}{R}$$

lub

$$U = R * I.$$

Opór przewodnika $k = R$ jest stały dla przewodnika o ustalonej długości i przekroju w stałej temperaturze.

Wtedy napięcie jest wprost proporcjonalne do natężenia

$$U = k * I$$

ze współczynnikiem proporcjonalności $k = R$.

Natężenie prądu mierzymy w jednostkach (A) amperach, napięcie (V) w Voltach, natomiast opór przewodnika mierzymy (Ω) w omach . ¹

¹ Wszystkie jednostki pomiaru prądu w obwodzie elektrycznym pochodzą od nazwisk uczynnych fizyków.

Przykład 0.2 *Opór żarówki $R = 460 \Omega$.² Jakie jest natężenie prądu przepływające przez żarówkę, jeżeli żarówka ta podłączona została do napięcia $U = 230 V$?
Zatem mamy dane:*

$$\text{opor :} \quad R = 460 \Omega,$$

$$\text{napięcie :} \quad U = 230 V.$$

Podstawiając powyższe dane obliczamy natężenie prądu z prawa Ohma

$$I = \frac{U}{R},$$

$$I = \frac{230}{460},$$

$$I = 0.5 A.$$

Odpowiedź: Przez żarówkę płynie prąd o natężeniu 0.5 A ampera

Przykład 0.3 *Oblicz opór przewodnika przez który płynie prąd o natężeniu 0.2 A ampera pod napięciem 20 V volt.*

Rozwiązanie.

Podstawiając dane

$$I = 0.2 A,$$

$$U = 20 V,$$

do wzoru

$$R = \frac{U}{I},$$

obliczamy opór R

$$R = \frac{20 V}{0.2 A},$$

$$R = 100 \Omega.$$

Odpowiedź: Opór przewodnika równy jest 100 Ω omów.

Proporcja ilorazów liczb. Liczby rzeczywiste a, b są proporcjonalne do liczb rzeczywistych c, d , jeżeli ich ilorazy są równe

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \text{dla } b \neq 0, d \neq 0.$$

Mnożąc na krzyż otrzymamy równość

$$a * d = c * b,$$

² $1 \Omega = \frac{1 V}{1 A}$

Przykład 0.4 Liczby $a = 2$, $b = 3$ są proporcjonalne do liczb $c = 20$, $d = 30$, ponieważ ich ilorazy są równe

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{2}{3} = \frac{20}{30}.$$

Mamy również

$$2 * 30 = 3 * 20 = 60.$$

Przykład 0.5 Odległość z Warszawy do Krakowa równa jest 300km. Po 2 godzinach jazdy samochód przejechał 150km. Ułóż proporcję i oblicz w ile godzin samochód przejedzie trasę z Warszawy do Krakowa.

Rozwiązanie.

Po 2 godzinach jazdy samochód przejechał 150km. W x godzin samochód przejedzie całą trasę 300km.

Zatem mamy proporcję

$$\frac{2}{150} = \frac{x}{300}.$$

Skąd obliczamy

$$x = \frac{2 * 300}{150} = 4.$$

Odpowiedź: Samochód przejedzie trasę 300 km z Warszawy do Krakowa w 4 godziny.

Przykład 0.6 Oblicz wartość x , jeżeli

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+2}, \quad x \neq -1, \quad x \neq -2$$

Rozwiązanie.

Mnożąc proporcję na krzyż otrzymamy równanie

$$(x-1)(x+2) = (x+1)(x+1)$$

Wykonując mnożenie i upraszczając wyrazy podobne obliczamy

$$x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x + x + 1$$

$$x = -3$$

Podstawiając do proporcji $x = -3$ sprawdzamy, że ilorazy

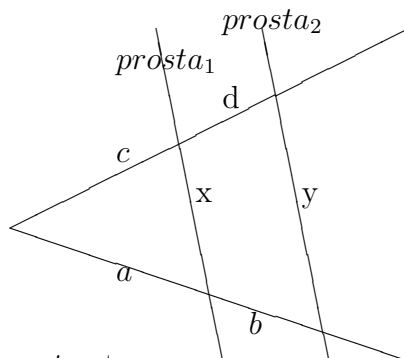
$$\frac{-3-1}{-3+1} = \frac{-3+1}{-3+2}, \quad \frac{-4}{-2} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

są równe.

Zatem rozwiązanie $x = -3$ zachowuje proporcje ilorazów liczb -4 , -2 do liczb -2 , -1 .

Proporcje odcinków. Proporcję odcinków znaną od ponad 2.5 tysiąca lat poznajemy w formie twierdzenia Talesa

Twierdzenie Talesa 0.1 Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta.



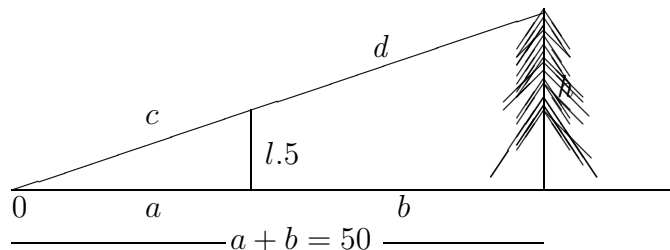
Jeżeli $prosta_1 \parallel prosta_2$ to :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad i \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

oraz

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{x}{y}.$$

Przykład 0.7 Oblicz wysokość h drzewa odległego o 50m od punktu obserwacji 0, zaznaczonego niżej na rysunku, stosując twierdzenie Talesa, wiedząc, że listwa geodezyjna l o wysokości $l = 1.5m$ jest odległa od punktu obserwacji o $a = 2.5m$



Podstawiając dane

$$a = 2.5m, \quad a + b = 50m$$

i wysokość listwy geodezyjnej $l = 1.5m$, obliczamy wysokość drzewa z proporcji

$$\frac{a}{a+b} = \frac{l}{h}$$

Skąd obliczamy wysokość drzewa

$$h = \frac{(a + b) * l}{a} = \frac{50 * 1.5}{2.5} = 30.$$

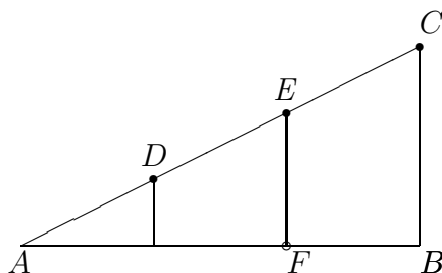
Odpowiedź: wysokość drzewa $h = 30m$.

Twierdzenie Talesa stosujemy również w zadaniach o dzieleniu odcinka w danej proporcji.

Przykład 0.8 Wykonaj konstrukcje przy pomocy cyrkla i linijki podziału danego odcinka AB w stosunku $2 : 3$

Rozwiązanie. Na ramieniu AC zaznaczamy dowolną rozwartością cyrkla trzy punkty D , E i punkt C . Następnie, łączymy punkt C z punktem B używając linijki. Rysujemy równoległe do odcinka BC przechodzące przez punkty D i E . W ten sposób dostajemy podział odcinka AB punktem F w stosunku $2 : 3$. Zatem, z twierdzenia Talesa mamy proporcje

$$\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{2}{3}$$



0.1 Zadania

Zadanie 0.1 Które pary wartości zmiennych x, y są wprost proporcjonalne? jeżeli są wprost proporcjonalne podaj współczynnik proporcjonalności.

(i) $x = 1, 3, 5, 7, 9,$ $y = 3, 9, 15, 21, 27$

(ii) $x = 4, 12, 20, 28, 36,$ $y = 1, 3, 5, 7, 9$

(iii) $x = 10, 30, 50, 70, 90,$ $y = 1, 3, 4, 7, 9$

Zadanie 0.2 Odległość z Warszawy do Rzymu równa jest $1800km$. Po 12 godzinach jazdy samochód przejechał $900km$. Ułóż proporcję i oblicz w ile godzin samochód przejedzie trasę z Warszawy do Rzymu.

Zadanie 0.3 *Oblicz wysokość drzewa z odległości 150m, wiedząc, że wysokość listwy geodezyjnej równa jest 2m i jej odległość od punktu pomiaru 10m.*

Zadanie 0.4 *Wykonaj konstrukcje przy pomocy cyrkla i linijki podziału danego odcinka AB w stosunku 1 : 3*

A ————— B

Zadanie 0.5 *Natężenie w obwodzie elektrycznym równe jest $5A$, natomiast napięciocie równe jest $80V$. Napięcie przyłożone do obwodu zwiększono do $70V$. Oblicz napięcie prądu w obwodzie i podaj ile razy zmieniło się natężenie prądu w stosunku do wartości początkowej (zakładamy, że obwód spełnia prawo Ohma).*