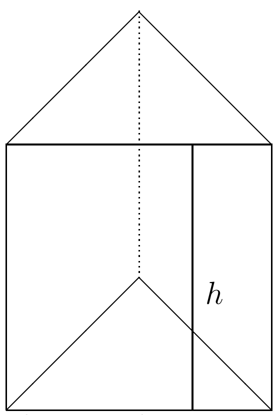
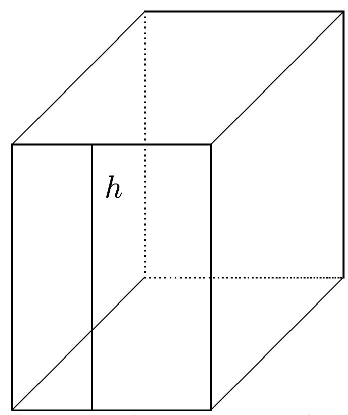
Geometria przestrzenna. Stereometria

0.1 Graniastosłupy

Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany, zwane podstawami, są przystaj̧cymi wielokątami leżącymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany są równoległobokami. Wśród graniastosłupów, wyróżniami graniastosłupy proste, w tym prostopadłościany i graniastosłupy pochyłe.
Niżej na rysunku mamy graniastosłup prosty o podstawie trójkąta oraz graniastosłup prosty - prostopadłościan o podstawie prostokąta



Granistosłup o podsawie trójkąta



Granistosłup o podsawie prostokąta

Pole powierzchni calkowitej granistoslupa o podstawie wielokąta składa się pola podstawy dolnej i podstawy gòrnej, to znaczy z wielokątòw przystających o ròwnych odpowiednich bokach.

Na przykład, obliczmy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa o podstawie tròjkąta ròwnobocznego

$$P_{pole\ podstawy\ dolnej\ i\ gornej\ trojkata\ rownobocznego} = 2 * \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

pole powierzchni bocznej o wysokości h graniastosłupa

$$P_{pole\ powierzchni\ bocznej} = 3 * a * h$$

Skąd obliczamy pole całkowitej powierzchni graniastosłupa o podstawie trójkąta równobocznego

$$P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3 * h * a.$$

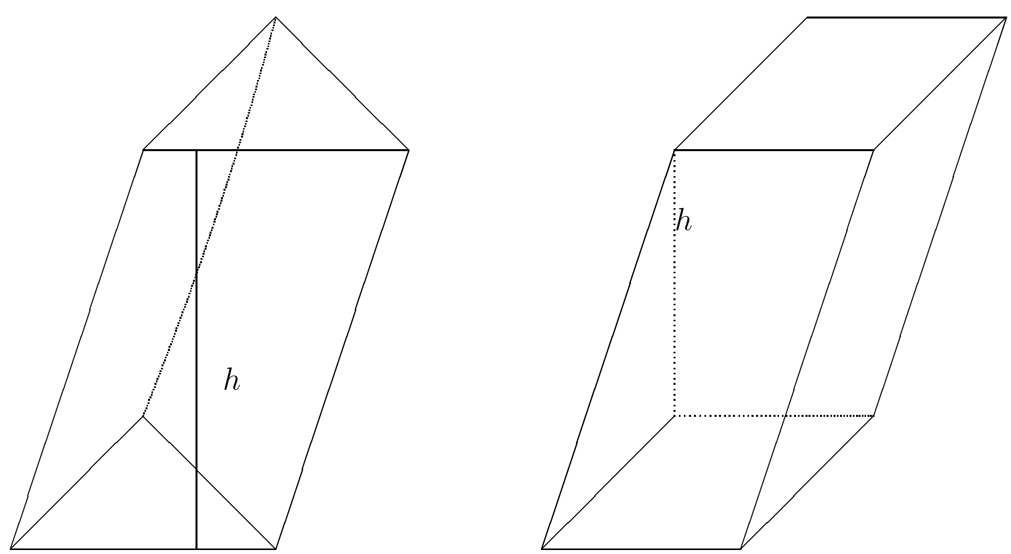
Objetośċ graniastosłupa o podstawie trójkąta równobocznego o boku a równe jest pole podstawy razy wysokośċ h

$$V_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} * h$$

Natomiast objętośċ graniastosłupa o podstawie trójkąta o bokach a, b, c, ze wzoru Herona, równe jest pole podstawy razy wysokośċ h

$$V = \underbrace{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}_{\textit{pole podstawy}} * h, \qquad p = \underbrace{\frac{a+b+c}{2}}_{\textit{polowa obwodu podstawy}}.$$

Graniastosłup pochyły o podstawie trójkąta i prostokąta



Pole powierzchni całkowitej graniastosłupów pochyłych i ich objętośċ obliczamy podobnie jak graniastosłupów prostych.

0.2 Bryły platońskie

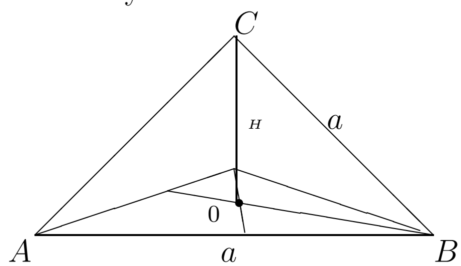
Wśród wielościanów wyróżniamy bryły platońskie, których wszystkie ściany są figurami foremnymi, to znaczy mają wszystkie boki i wszystkie kąty równe. Od czasów Euklidesa wiadomo, że figur platońskich w przestrzeni jest dokładnie pięċ.

- czworościan foremny, którego cztery ścieny są trójkątami równobocznymi

- sześcian foremny, którego wszystkie sześć ścian są kwadratami
- ośmiościan foremny, którego wszystkie osiem ścian są trójkątami równobocznymi
- dwunastścian foremny, którego wszystkie dwanaście ścian są pięciokątami foremnymi
- dwudziestościan foremny, którego wszystkie dwadzieścia ścian są trójkątami równobocznymi

0.2.1 Czworościan foremny

Powierzchnia czworościanu foremnego składa się z czterech ścian, które są trójkątami równobocznymi o boku a.



Czworościan foremny o krawędzi a

Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi a składa się z pola czeterech trójkątów rownobocznych o bokach a.

$$P_{pole\ powierzchni\ calkowitej} = 4 * \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$$

Objętość czworościanu foremnego, jak każdego ostrosłupa, równa jest iloczynowi $\frac{1}{3}$ wysokości H czworościanu razy pole podatstawy. Pole podstawy to jest pole trójkąta równobocznego

$$P_{pole\ podstawy} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Zatem objętość czworościanu foremnego

$$V = \frac{1}{3}H * \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} * H$$

Teraz zajmiejmy się obliczeniem wysokości H. Otóż, wysokość H obliczymy z trójkąta prostokątnego $\Delta\, OBC$. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$|OC|^2 = |BC|^2 - |OB|^2,$$

$$|OC| = H, \qquad |BC| = a,$$

$$|OB| = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Skąd obliczamy

$$H^2 = a^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{2a^2}{3},$$
$$H = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

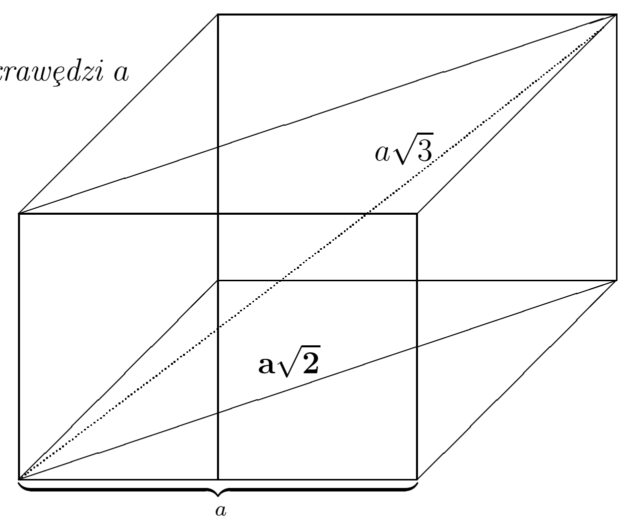
Zatem, objętoś:c czworościanu foremnego

$$V = \frac{1}{3}a\sqrt{\frac{2}{3}} * \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

0.2.2 Sześcian foremny

Sześcian foremny jest prostopadłościanem, który ma wszystkie sześć ścian kwadratami o boku a.

Sześcian foremny o krawędzi a



Łatwo obliczamy

Pole powierzchni calkowitej szescianu	$P_c = 6a^2.$
Objetosc szescianu	$V = a^3.$
Przekatna podstawy	$d_p = a\sqrt{2}.$
Przekatna szescianu	$d = a\sqrt{3}.$

Przykład 0.1 *Dla sześcianu o boku $a = 4$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu,

(ii) objętość sześcianu.

(iii) przekątną podstawy sześcianu.

(iv) przekątna sześcianu.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów, obliczamy

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu $P_c = 6a^2 = 6 * 4^2 = 96$,

(ii) objętość sześcianu $V_c = a^3 = 4^3 = 64$.

(iii) przekątną podstawy sześcianu $d_p = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

(iv) przekątna sześcianu $d = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Zadanie 0.1 *Dla sześcianu o boku $a = 5$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu,

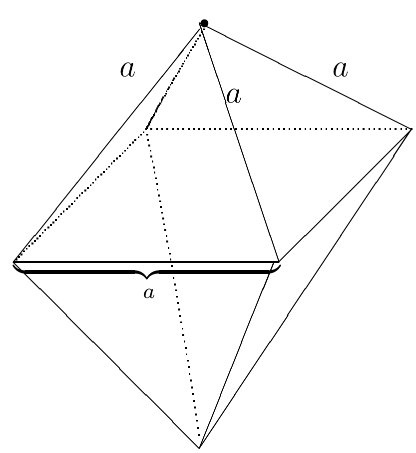
(ii) objętość sześcianu.

(iii) przekątną podstawy sześcianu.

(iv) przekątna sześcianu.

0.2.3 Ośmiościan foremny

Trzecią bryłą platońską jest ośmiościan foremny, którego osiem ścian są trójkątami równobocznymi o boku a.



Pole powierzchni całkowitej ośmiościanu foremnego o krawędzi a równe jest 8 razy pole trójkąta równobocznego o boku a

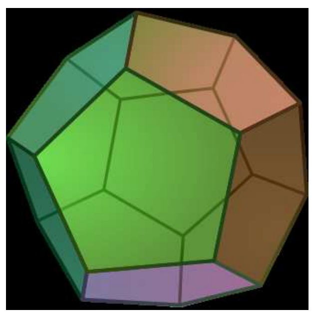
$$P_{pole\ powierzchni\ calkowitej} = 8 * \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \underbrace{2a^2\sqrt{3}}_{P}$$

Objętość ośmiościanu foremnego o krawędzi a równe jest 2 razy objętość ostrosłupa o podstawie kwadratu o boku a i wysokości $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$V_{objetosc} = 2 * \frac{1}{3}a^2h = 2 * \frac{1}{3}a^2\frac{a}{\sqrt{2}} = \underbrace{\frac{a^3\sqrt{2}}{3}}_{V}$$

0.2.4 Dwunastościan foremny

Czwartą bryłą platońską jest dwunastościan foremny, którego dwanaście ścian to są pięciokąty równoboczne o boku a.



Powierrzchnia całkowita dwunastościanu foremnego równa jest dwanaście razy pole pięciokąta foremnego

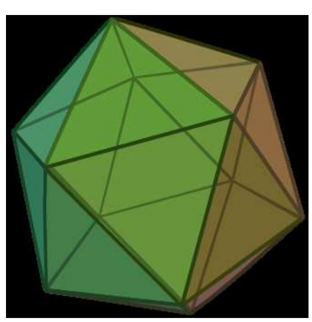
$$P_{pole\ powierzchni\ calkowitej} = 12 * \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \underbrace{3a^2\sqrt{3}}_{P}$$

Objętość dwunastościanu foremnego

$$V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$$

0.2.5 Dwudziestościan foremny

Piątą bryłą platońską jest dwundziestościan foremny, którego dwadzieścia ścian to są trójkaty równoboczne o boku a.



Powierrzchnia całkowita dwunastościanu foremnego równa jest dwanaście razy pole pięciokąta foremnego

$$P_{powierzchnia\ calkowita} = 20 * \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \underbrace{5a^2\sqrt{3}}_{P}$$

Objętość dwundziestościanu foremnego o krawędzi a

$$V_{objetosc\ dwudziestoscianu\ foremnego} = \underbrace{\frac{5}{12}a^3(\sqrt{3}+\sqrt{5})}_{V}$$

0.3 Ostrosłupy

Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego podstawą jest dowolny wielokąt a ściany boczne są trójkąmi o wspólnym wierzchołku. Wśród ostrosłupów wyróżniamy ostrosłupy foremne, których podstawą jest wielokąd foremny i spodek wysokości leży w środku okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.

0.3.1 Ostrosłup prawidłowy o podstawie kwadratu

Oznaczenia:

- a bok kwadratu w podstawie ostrosłupa
- H wysokość ostrosłupa
- h wysokość ściany bocznej ostrosłupa
- l krawędź boczna ostrosłupa
- P_a pole podstawy ostrosłupa
- P_0 pole ściany bocznej ostrosłupa
- P_c pole powierzcni całkowitej ostrosłupa
- V objętość ostrosłupa

Pole podstawy ostrosłupa foremnego równa się polu kwadratu o boku a

$$P_a = a^2.$$

Pole pobocznicy ostrosłupa foremnego P_l równe jest polu czterech trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości **h**. Natomiast, pole ściany bocznej ostrosłupa P_0 równe jest polu trójkąta równoramiennego o podstwie a i wysokości h.

$$P_0 = \frac{1}{2}a * h.$$

Wysokść ściany bocznej wyrażamy w zależności od boku a i krawędzi l. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa oblicamy wysokość

$$h^2 = l^2 - (\frac{a}{2})^2, \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Wtedy pole ściany bocznej

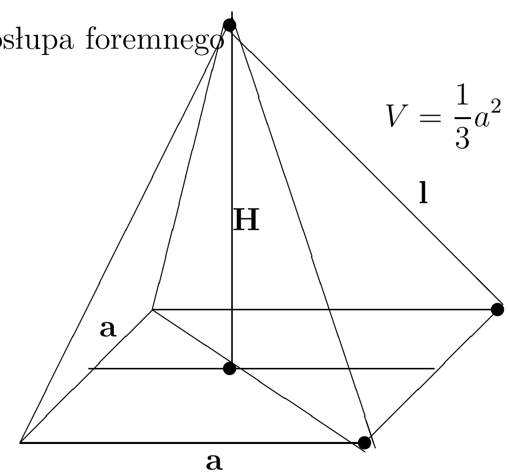
$$P_0 = \frac{1}{4} a * \sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Pole całkowitej powierzchni ostrosłupa równe jest polu czterech trójkątów w podstawie o boku a plus pola cztery trójkątów równoramiennych o podstawie a i ramionach l.
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa foremnego

$$P_c = a^2 + 4P_0, \qquad P_c = \underbrace{a^2 + a\sqrt{4l^2 - a^2}}_{\text{pole powierzchni}}$$

i objętość ostrosłupa foremnego

$$V = \frac{1}{3} a^2 * H$$



0.3.2 Ostrosłup foremny o podstawie sześciokąta foremnego

Oznaczenia:

- a bok sześciokąta w podstawie ostrosłupa
- H wysokość ostrosłupa
- h wysokość ściany bocznej ostrosłupa
- l krawędź boczna ostrosłupa
- P_a pole podstawy ostrosłupa
- P_0 pole ściany bocznej ostrosłupa
- P_c pole powierzcni całkowitej ostrosłupa

- V objętość ostrosłupa

Jasne, że pole podstawy ostrosłupa foremnego równa się polu P_a sześciokąta foremnego o boku a

$$P_a = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Pole pobocznicy ostrosłupa foremnego P_l równe jest polu sześciu trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości **h**. Pole ściany bocznej ostrosłupa P_0 równe jest polu trójkąta równoramiennego o podstwie a i wysokości h.

$$P_0 = \frac{1}{2}a * h.$$

Wysokść ściany bocznej wyrażamy w zależności od boku a i krawędzi l. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa oblicamy wysokość

$$h^2 = l^2 - (\frac{a}{2})^2, \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2}.$$

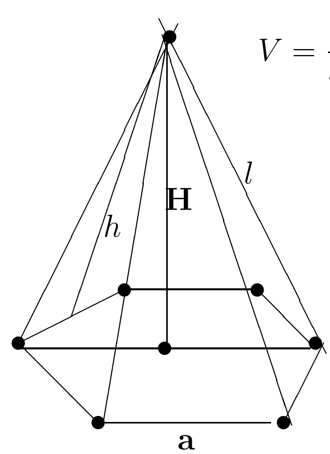
Wtedy pole ściany bocznej

$$P_0 = \frac{1}{4}a * \sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Pole całkowitej powierzchni ostrosłupa równe jest polu sześciokąta foremnego w podstawie o boku a plus pola sze{sciu trójkątów równoramiennych o podstawie a i ramionach l.
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa foremnego

$$P_c = P_a + 6P_0, \qquad P_c = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{4}a\sqrt{4l^2 - a^2} \qquad P_c = \underbrace{\frac{3}{2}[a^2\sqrt{3} + a\sqrt{4l^2 - a^2}]}_{pole\ powierzchni}.$$

i objętość ostrosłupa foremnego



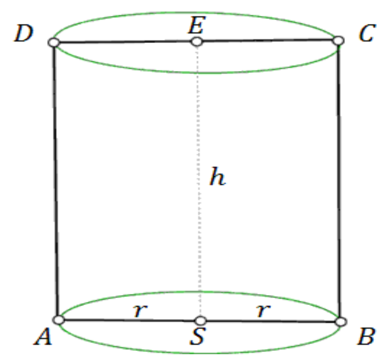
$$V = \frac{1}{3}\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} * H = \underbrace{\frac{a^2\sqrt{3}}{2} * H}_{objetosc\ V}$$

0.4 Bryły Obrotowe

Wśród brył obrotowych wyróżniamy walec, stożek i kulę.

0.4.1 Walec

Walec powstaje z obrotu prostokąta wokół jednego z jego boków. Prosty kształt walca prowadzi do oczywistych wzorów na jego całkowitą powierzchnie i objętość.



Powierzchnia całkowita P_c walca składa się z pola podstawy dolnej $S = \pi r^2$, podstawy gȯrnej $S = \pi r^2$ oraz powierzchni bocznej $P_b = 2\pi rh$ i wyrażona jest przez promień r i wysokość h.

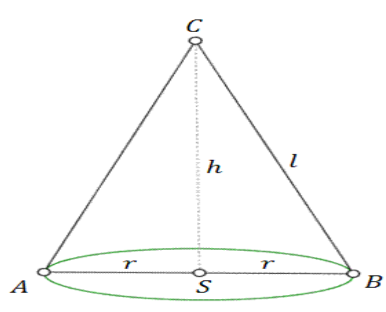
$$P_{powierzchnia\ calkowita} = 2 * \pi r^2 + 2\pi rh = \underbrace{2\pi r(r+h)}_{P_c}.$$

i objętość walca

$$V = \pi r^2\ h.$$

0.4.2 Stożek

Stożek powstaje z obrotu trójkąta prostokątnego wokół jednej z jego przyprostokątnych.



.

Oznaczenia:

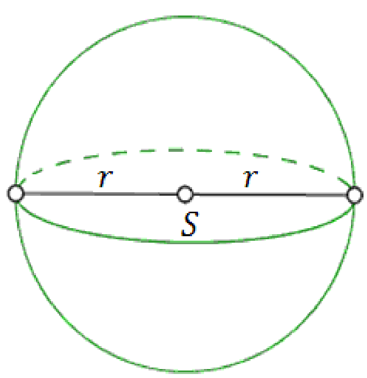
- r promień podstawy stożka
- l tworząca stożka
- h wysokść stożka
- P_l powierzchna boczna stożka
- P_c powierzchnia całkowita stożka
- V objętość stożka

Obliczamy

- powierzchnia podstawy $S = \pi r^2$,
- powierzchna boczna stożka $P_l = 2\pi r\ l$
- powierzchnia całkowita stożka $P_c = \pi r(r + h)$
- objętość stożka $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

0.4.3 Kula

Kula o promieniu r ma powierzchnie $P = 4\pi r^2$ i objętość $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



Prof. dr Tadeusz STYŚ Warszawa, 8 marzec, 2019.