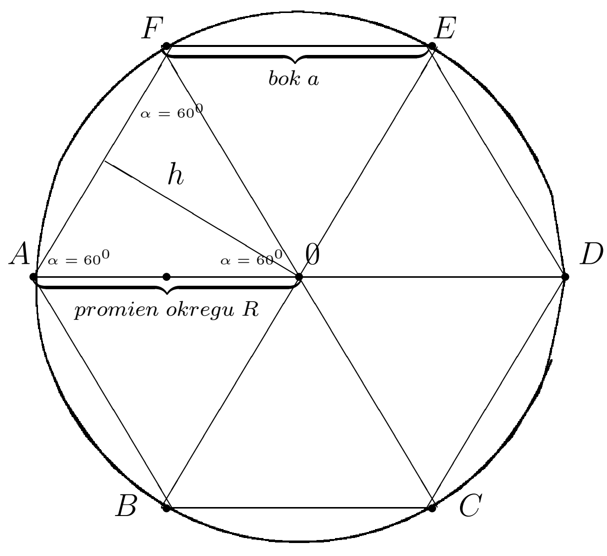
# Sześciokąt foremny i siedmiokąt foremny

## 0.1 Sześciokąt foremny.

Sześciokąt foremny ma sześć boków $a = R$ równych promieniowi $R$ okręgu opisanego na tym sześciokącie i składa się z sześciu trójkątów równobocznych o długości boków $a = R$ i kątach $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ w mierze łukowej lub $60^0$ stopni.

**Konstrukcja sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg.** Niżej podamy konstrukcje sześciokąta foremnego wpisanego w dany okrąg o promieniu $R$ i środku w punkcie $O$ przy pomocy cyrkla i linijki bez skali.

Mianowicie, zakreślamy okrąg o środku w punkcie $O$ i promieniu $R$. Następnie wybieramy na okręgu wierzchołek $A$ sześciokąta $ABCDEF$ i cyrkiel o rozwartości równej promieniowi $R$ stawiamy w punkcie $A$ zakreślając na okręgu wierzchołek $B$. Stawiamy cyrkiel w wierzchołku $B$ i zanaczamy na okęgu wierzchołek $C$. Dalej w ten sam sposób zaznaczamy wierzchołki $D, E, F$ sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Łączymy wierzchołki $A, B, C, D, E, F$ przy pomocy linijki i prowadzimy przekątne sześciokąta foremnego, jak niżej na rysunku




.

Sześciokąt foremny $ABCDEF$ składa się z 6-ciu trójkątów równobocznych o bokach długości $a = R$ i kątach $\alpha = 60^0$ przystających do trójkąta $\triangle AOF$. Obwód sześciokąta foremnego

$$Obwod \quad = 6R$$

Jak wiemy, wysokość $h$ trójkąta równobocznego $\triangle AOF$ kreślona jest wzorem

$$h = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

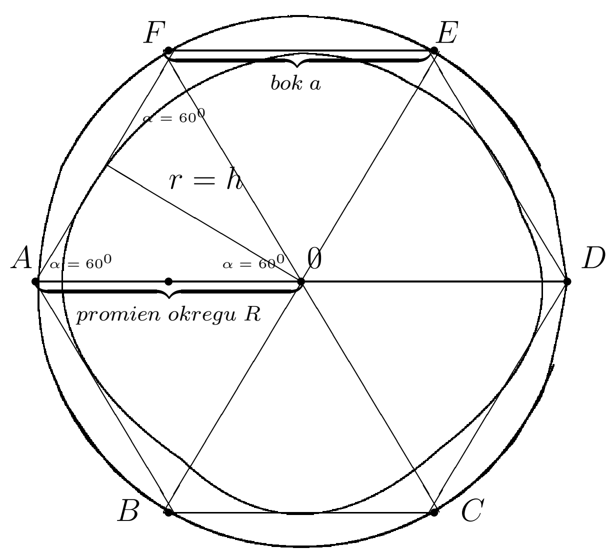
Pole jednego trójkąta równoramiennego o boku $R$ i wysokości $h$ równe jest

$$P_{\triangle AOF} = \frac{1}{2}R * h$$

Obliczamy pole sześciokątów foremnego

$$P = 6\frac{1}{2}R * \underbrace{\frac{R\sqrt{3}}{2}}_{h} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.$$

**Okrąg wpisany w sześciokąt foremny.** Jest ogólna prawidłowość pomiędzy okręgiem opisanym na wielokącie foremnych i okręgiem wpisanym w wielokąt foremny. Mianowicie, środki tych okręgów leżą w jednym i tym samym punkcie. Wynika to z tej prostej racji, że dwusieczne kątów i symetralne boków wielokątów foremnych przecinają się w jednym punkcie.
Zatem, żeby w dany sześciokąt foremny wpisać okrąg należy poprowadzić symetralne co najmniej dwóch jego boków lub dwusieczne dwóch kątów. W ten sposób znajdziemy środek okręgu wpisanego w dany sześciokąt. Natomiast promień $r = h$ określony jest jako wysokść $h$ trójkąta $\triangle AOF$ . Niżej na rysunku widzimy okrąg o promieniu $R$ opisany na sześciokącie foremnym $ABCDEF$ oraz okrąg o promieniu $r = h$ wpisany w sześciokąt foremny. Oba te okręgi mają wspólny środek w punkcie $O$.




.

Istnieje prosta zależność pomiędzy promieniem $r = h$ okręgu wpisanego w sześciokąt foremny i promieniem $R$ okręgu opisanego na sześciokącie foremnym. Mianowicie

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{R} = \frac{R\sqrt{3}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

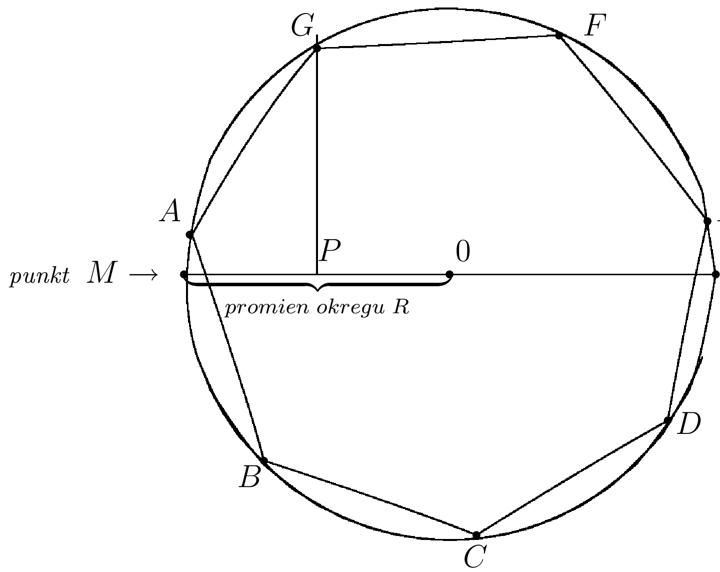
## 0.2 Siedmiokąt foremny.

Siedmiokąt formny należy do wielokąty foremnych o ilości boków równej liczbie pierwszej $p = 7$. Konstrukcja dokładna wielokątów foremnych o liczbie pierwszej $p = 7, 11, ...;$ boków jest niemożliwa przy pomocy cyrkla i linijki, z wyjątkiem liczb pierwszych Fermata $p = 2^{2^k} = 3, 5, 17, 257, ...;$ gdy $k = 0, 1, 2, 3, ...;$. Natomiast zawsze można wykonać konstrukcję z niewielkim błędem.

**Konstrukcja siedmiokąta foremnego wpisanego w okrąg.** Niżej podamy przybliżonąną konstrukcję siedmiokąta foremnego wpisanego w dany okrąg o promieniu $R$ i środku w punkcie $O$ przy pomocy cyrkla i linijki bez skali.

Odcinek $MO$ o długości promiemienia $R = |MO|$ dzielimy na połowę przez poprowadzenie symetralnej odcinka $MO$ przy pomocy cyrkla i linijki. Zaznaczamy punkt $P$ w połowie odcinka $MO$ oraz punkt $G$, jak naniżej rysunku.

Stawiamy cyrkiel w punkcie $G$ i rozwartością cyrkla równą długości odcinka $PG$ zakreślamy łuk i zaznaczamy wierzchołek siedmiokąta $A$ przecięcia łuku z promieniem okręgiem. Dalej odkładamy tą samą rozwartością cyrkla punkty $B, C, D, E, F$. Łączymy te punkty punkty linjką. W ten sposób narysowaliśmy siedmiokąt foremny $ABCDEFG$ wpisany w okrąg o promieniu $R$.




.

Jasne, że jeżeli boki siedmiokąta foremnego ròwne są

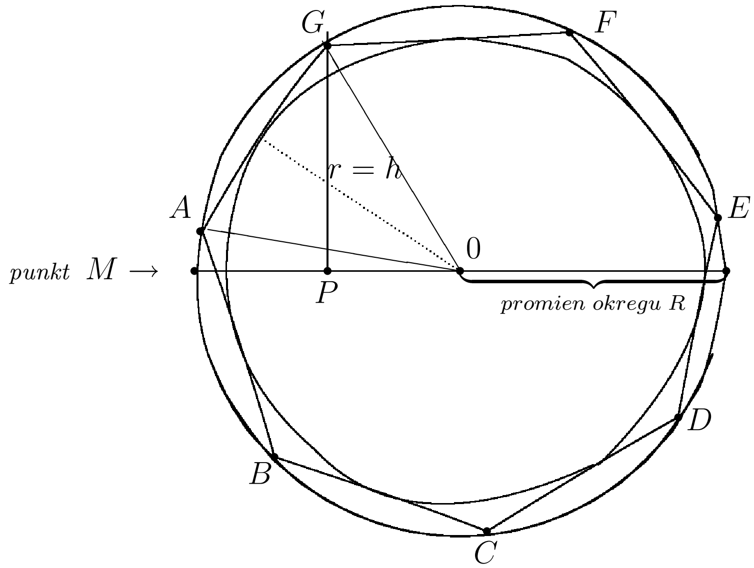
$$a = |AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FG|$$

to obwòd

$$obwod : \quad 7a$$

**Okrąg wpisany w siedmiokąt foremny.** Jest ogòlna prawidłowośċ pomiędzy okręgiem opisanym na wielokącie foremnych i okręgiem wpisanym w wielokąt foremny. Mianowicie, środki tych okręgòw leżą w jednym i tym samym punkcie. Wynika to z tej prostej racji, że dwusieczne kątòw i symetralne bokòw wielokątòw foremnych przecinają się w jednym punkcie.
Zatem, żeby w dany siedmiokąt foremny wpisaċ okrąg należy poprowadziċ symetralne co najmniej dwòch jego bokòw lub dwusieczne dwòch kątòw. W ten sposòb znajdziemy środek okręgu wpisanego w dany siedmiokąt. Natomiast promieṅ $r = h$ określony jest jako wysokśċ $h$ tròjkąta $\triangle AOG$ . Niżej na rysunku widzimy okrąg o promieniu $R$ opisany na siedmiokącie foremnym $ABCDEFG$ oraz okrąg o promieniu $r = h$ wpisany w siedmiokąt foremny.

Oba te okręgi mają wspólny środek w punkcie $O$.




**Związki miarowe w siedmiokącie foremnym.** Związki miarowe w siedmiokącie foremnym opisane są prostymi wzorami przez funkcje trygonometryczne.
Mianowicie pole siedmiokąta foremnego

$$P_{ABCDEFG} = \frac{7}{4} cot \frac{\pi}{7}.$$

Promień okręgu wpisenego w siedmiokąt foremny $r$

$$r = \frac{a}{2\tan\frac{\pi}{7}},$$

i promień okręgu opisanego na siedmiokącie foremnym $R$

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{7}}.$$

Skąd wynika prosty związek pomiędzy promieniami $r$ i $R$

$$\frac{r}{R} = \cos\frac{\pi}{7} \approx 0.900969...;$$

Prof. dr Tadeusz STYŚ Warszawa, 20-ty luty, 2019.