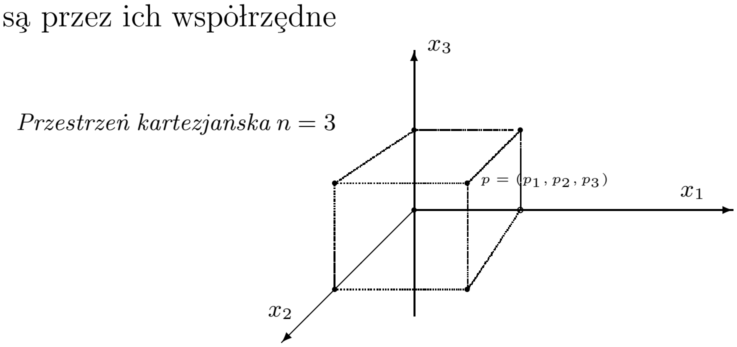
Punkty, wektory, proste i płaszczyzny w przestrzeni kartezjańskiej R^3 trzy wymiarowej

0.1 Punkty

Położenie figur geometrycznych i ich kształt w przestrzeni kartezjańskiej określone są przez ich współrzędne



W układzie współrzędnych kartezjańskich x_1, x_2, x_3 punkt

$$p = (p_1, p_2, p_3)$$

ma współrzędne

$$x_1 = p_1, \quad x_2 = p_2, \quad x_3 = p_3.$$

0.2 Operacje arytmetyczne na punktach.

Suma. Suma punktów

$$a = (a_1, a_2, a_3), \qquad i \qquad b = (b_1, b_2, b_3)$$

jest punktem

$$c = (c_1, c_2, c_3) = a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

o współrzędnych równych sumie współrzędnych punktów a i b.
Zatem współrzędne

$$c_1 = a_1 + b_1, \qquad c_2 = a_2 + b_2, \qquad c_3 = a_3 + b_3.$$

Różnica. Podobnie różnica punktów a i b jest punktem

$$d = (d_1, d_2, d_3)$$

o współrzędnych równych różnicy współrzędnych punktów a i b.

$$d = a - b = (a_1, a_2, , a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3).$$

Zatem współrzędne

$$d_1 = a_1 - b_1, \quad d_2 = a_2 - b_2, \quad d_3 = a_3 - b_3.$$

Mnożenie punktu przez liczbę. Mnożąc punkt $a = (a_1, a_2, a_3)$ przez liczbę $-\infty < t < \infty$ mnożymy każdą współrzędnę punktu przez liczbę t

$$p = t * a = t * (a_1, a_2, , a_3) = (t * a_1, t * a_2, t * a_3).$$

Zatem iloczyn punktu przez liczbę jest równy punktowi $p = (p_1, p_2, p_3)$ o współrzcednych

$$p_1 = t * a_1, \quad p_2 = t * a_2, \; p_3 = t * a_3.$$

Przykład 0.1 *Niech dane będą punkty*

$$a = (2, -3, 4), \qquad b = (2, -1, 3).$$

Oblicz

$$(i) \quad a + b, \quad (ii) \quad a - b, \quad (iii) \quad 2 * a + 3 * b.$$

Rozwiązanie. Obliczamy punkt $c = (c_1, c_2, c_3)$ równy sumie punktów a i b

$$\begin{aligned} (i) \quad c = a + b &= (2, -3, 4) + (2, -1, 3) \\ &= (2 + 2, -3 - 1, 4 + 3) \\ &= (4, -4, 7), \end{aligned}$$

Skąd współrzędne punktu $c = (c_1, c_2, c_3)$

$$c_1 = 4, \quad c_2 - 4, \quad c_3 = 7.$$

(ii) Oblicz różnicę punktów a i b.

Obliczamy punkt $d = (d_1, d_2, d_3)$ równy różnicy punktów a i b

$$\begin{aligned} d = a - b &= (2, -3, 4) - (2, -1, 3) \\ &= (2 - 2, -3 - (-1), 4 - 3) \\ &= (0, -2, 1). \end{aligned}$$

Skąd współrzędne punktu $d = (d_1, d_2, d_3)$

$$d_1 = 0, \quad d_2 = -2, \quad d_3 = 1.$$

(iii) Oblicz kombinację liniową

$$2 * a + 3 * b$$

punktów a i b.

Obliczamy punkt $e = (e_1, e_2, e_3)$ równy kombinacji liniowej punktów a i b

$$\begin{aligned} e = 2 * a + 3 * b &= 2 * (2, -3, 4) + 3 * (2, -1, 3) \\ &= (2 * 2, 2 * (-3) + 2 * 4, 3 * 2, +3 * (-1) + 3 * 3) \\ &= (10, -9, 17), \end{aligned}$$

Skąd współrzędne punktu $e = (e_1, e_2, e_3)$

$$e_1 = 10, \quad e_2 = -9, \quad e_3 = 17.$$

0.3 Wektory

Podobnie jak w przestrzeni kartezjańskiej dwuwymiarowej, w przestrzni kartezjańskiej trzy wymiarowej wyróżniamy wektory związane i wektory swobodne. [1]

Wektor związany o początku w punkcie

$$a = (a_1, a_2, a_3)$$

i końcu w punkcie

$$b = (b_1, b_2, b_3)$$

jako uporządkowana para punktów oznaczamy symbolem

$$\vec{ab} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3].$$

Na przykład, na rysunku wektor $\vec{ab} = [8, 3, 8]$ jest związany z początkiem w punkcie

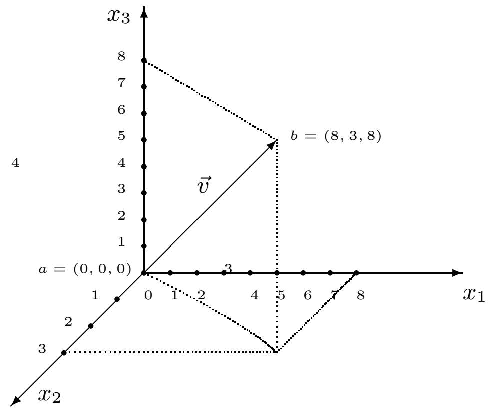
$$a = (0, 0, 0)$$

i z końcem w punkcie

$$b = (8, 3, 8).$$

[1] Temat: Wektory w przestrzeniach kartezjańskich jedodnowymiarowych, dwuwymiarowych i trzy wymiarowych jest jest dostępny na stronie Heliantus.pl pod zakładką *Matematyka/Proseminarium.*

Zwrot wektora $\vec{AB}$ jest zaznaczony na rysunku strzałką.



Przestrzeń kartezjańska $n = 3$. *Wektor* $\vec{v} = [8, 3, 8]$.

Ogólnie, długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]]$ oznaczona symbolem $||\vec{v}||$ i równa jest

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

W przypadku wektora $\vec{v} = [8, 3, 8]$ jego długość

$$||\vec{v}|| = \sqrt{8^2 + 3^2 + 8^2} = \sqrt{137}.$$

Zauważmy, że jeżeli wektor $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ pomnożymy przez liczbę α to długość wektora

$$\alpha * \vec{v} = |\alpha| * ||\vec{v}.$$

Istotnie wektor $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ mnożymy przez liczbę α pomnożąc każdą jego współrzędnę przez α

$$\alpha\vec{v} = [\alpha * v_1, \alpha * v_2, \alpha * v_3].$$

Wtedy długość wektora $\alpha * \vec{v}$ równa jest

$$||\alpha\vec{v}|| = \sqrt{\alpha^2 * v_1^2 + \alpha^2 * v_2^2 + \alpha^2 v_3^2} = |\alpha| * ||\vec{v}||.$$

Na przykład, pomnóżmy wektor $\vec{v} = [8, 3, 8]$ przez liczbę $\alpha = 3$. Wtedy dłogość wektora

$$3\vec{v} = [3 * 8, 3 * 3, 3 * 8]$$

równa jest

$$||\alpha\vec{v}|| = \sqrt{3^2 * 8^2 + 3^2 * 3^2 + 3^2 8^2} = \sqrt{8^2 + 3^2 + 8^2} = 3 * \sqrt{137}.$$

0.3.1 Wersory

W prostokątnym układzie współrzędnych w 3-wymiarowej przestrzeni kartezjańskiej wyróżniamy następujące wektory zwane wersorami osi

$$\vec{i} = [1, 0, 0], \quad \vec{j} = [0.1, 0], \quad \vec{k} = [0, 0, 1].$$

Zatem, wersory mają kierunek i zwrot odpowiednich osi układu współrzędnych. Długość każdego wersora

$$||\vec{i}|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1, \quad ||\vec{j}|| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1, ||\vec{k}|| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

jest równa 1.
Zauważmy, że każdy wektor $\vec{v} = [v_1, , v_2, v_3]$ w przestrzni kartezjańskiej możemy przedstawić jako kombinację liniową wersorów osi

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}.$$

Rzeczywiście, obliczamy kolejne składniki powyższej sumy wektorów

$$v_1 * \vec{i} = v_1 * [1, 0, 0] = [1 * v_1, 0 * v_1, 0 * v_1] = [v_1, 0, 0],$$

$$v_2 * \vec{j} = v_2 * [0, 1, 0] = [0 * v_2, 1 * v_2, 0 * v_2] = [0, v_2, 0],$$

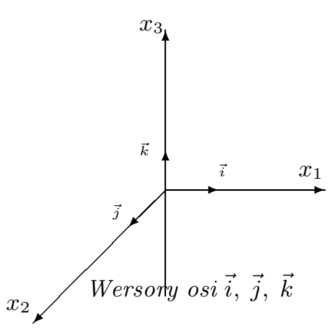
$$v_3 * \vec{k} = v_3 * [0, 0, 1] = [0 * v_3, 0 * v_3, 1 * v_3] = [0, 0, v_3].$$

Skąd wektor

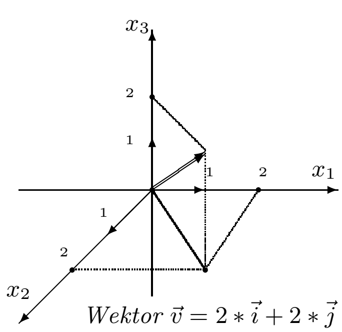
$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} = [v_1, 0, 0,] + [[0, v_2, 0] + [0, 0, v_3] = [v_1, v_2, v_3]$$

Niżej na rysunku wektor $\vec{v} = [2, 2, 2]$ przedstawiony jest jako kombinacja liniowa wersorów

$$\vec{v} = 2 * \vec{i} + 2 * \vec{j} + 2 * \vec{k}$$



Wersory osi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$



Wektor $\vec{v} = 2 * \vec{i} + 2 * \vec{j} + 2 * \vec{k}$

Wektor swobodny. Pojęcie wektora swobodnego w przestrzeni kartezjańskiej nie zależy od wymiaru przestrzeni. Podobnie jak w przestrzeni dwuwymiarowej, wektor swobodny definiujemy korzystając z relacji równoważności.

Definition 0.1 *Dwa wektory zwiąne $\vec{ab}$ i $\vec{cd}$ o początkach w punktach a, c i o końcach w punktach b, d są równoważne piszemy*

$$\vec{ab} \equiv \vec{cd}$$

wtedy i tylko wtedy, jeżeli mają tą samą długość

$$||\vec{ab}|| = ||\vec{cd}||,$$

ten sam kierunek i ten sam zwrot.

Podobnie jak w przestrzeni kartezjańskiej dwuwymiarowej wektor swobodny rozumiemy w sensie definicji

Definition 0.2 *Wektorem swobodnym nazywamy klasę wektorów równoważnych.*

0.3.2 Dodawanie i odejmowanie wektorów.

Rozpatrzmy dwa wektory swobodne

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3], \qquad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3].$$

Sumą wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

jest wektor $\vec{s}$ o współrzędnych równej sumie współrzędnych

$$\vec{s} = \vec{v} + \vec{w} = [v_1, v_2, v_3] + [w_1, w_2, w_3] = [v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3].$$

Na przykład, sumą wektorów

$$\vec{v} \;=\; [4, 2, 1], \quad i \quad \vec{w} = [2, -1, 3]$$

jest wektor

$$Suma \quad \vec{s} = [4, 2, 1] + [2, -1, 3] = [6, 1, 4].$$

Różnicą wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest wektor

$$\vec{s} = \vec{v} - \vec{w} = [v_1, v_2, v_3] - [w_1, w_2, w_3] = [v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3].$$

Na przykład, różnicą wektorów

$$\vec{v} \;=\; [4, 2, 1], \quad i \quad \vec{w} = [2, -1, 3]$$

jest wektor

$$\vec{s} = [4, 2, 1] - [2, -1, 3] = [2, 3, -2].$$

0.3.3 Iloczyn skalarny wektorów.

Jednym z wielu istotnych pojęć w Geometri Kartezjańskiej jest iloczyn skalarny wektrów, swobodnych lub związanych. [2]
Długość, kierunek, zwrot i iloczyn skalarny wektorów nie zależą od ich położenia w przestrzeni kartezjańskiej.

[2] W matematyce wyższej pojęcie iloczynu skalarnego odnosi się nie tylko do wektorów w przestrzeniach kartezjańskich, odnosi się również do funkcji i abstrakcyjnych obiektów w przestrzeniach Hilberta.

Definition 0.3 *Iloczyn skalarny wektora*

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$$

przez wektor

$$\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

jest liczbą

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + v_3 * w_3.$$

Na przykład, obliczamy iloczyn skalarny wektora

$$\vec{v} = [2, 3, 2]$$

przez wektor

$$\vec{w} = [-1, 2, 3]$$

równy jest

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 2 * (-1) + 3 * 2 + 2 * 3 = 10.$$

Zauważmy, że wynik iloczynu skalarnego wektorów już nie jest wektorem. Mówimy wtedy, że operacja mnożenia skalarnego wektorów wyprowadza poza zbiór jej argumentów.
Iloczyn skalarny wektorów prostopadłych jest równy zero. Niżej podajemy warunek konieczny i dostateczny prostopadłości wektorów w formie następującego twierdzenia

Twierdzenie 0.1 *Wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, jeżeli ich iloczyn skalarny*

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + v_3 * w_3 = 0.$$

jest równy zero

Dowód powyższego twierdzenia jest taki sam jak twierdzenia w przestrzeni kartezjańskiej dwuwymiarowej, który jest podany w temacie: *Przestrzenie kartezjańskie.*

0.3.4 Parametryczne równanie prostej w przestrzeni R^3

Proste operacje na punktach i wektorach w przestrzeni prowadzą do parametrycznego określenia równania prostej.
Mianowicie, rozpatrzmy dwa punkty

$$a = (a_1, a_2, a_3), \quad b = (b_1, b_2, b_3), \quad \text{i wektor} \quad \vec{ab} = b - a.$$

Wtedy łatwo piszemy równanie parametryczne prostej L przechodzącej przez punkty a i b

$$L(t) = a + b * t, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Zauważmy, że jeżeli parametr t zmienia się od 0 do 1, $0 \leq t \leq 1$ to punkt $L(t)$ porusza się wzdłuż odcinka $[a, b]$.
Zatem mamy

$$dla \quad t = 0, \;\; L(0) = a, \qquad dla \quad t = 1, \;\; L(1) = b.$$

Natomiast, jeżeli parametr t zmiania się od minus nieskończoności do plus nieskończoności $-\infty < t < \infty$ to punkt $L(t)$ przebiega całą prostą L.
Parametryczne równanie prostej, wyrażamy również w terminach danych punktów a i b przez ich różnicce. Ponieważ wektor $\overrightarrow{ab} = b - a$, to równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty a i b ma następującą postać:

$$L(t) = a + (b - a) * t, \qquad -\infty < t < \infty.$$

lub

$$L(t) = a(1 - t) + b * t, \qquad -\infty < t < \infty.$$

lub

$$L(t) = a + \vec{v}\, t, \quad dla \;\; \vec{v} = b - a, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Przykład 0.2 *Napisz parametryczne równanie prostej*

(i) o początku w punkcie $a = (1, 2, -1)$ *i kierunku wektora* $\overrightarrow{a} = (2, -1, 4)$

(ii) przechodzącej przez punkty $a = (1, -1, 2)$ *i* $b = (2, 1, 2)$

Rozwiązanie.

(i) Podstawiamy dane:

1. punkt $a = (1, -1, 2)$ i wektor $\overrightarrow{ab} = (2, -1, 4)$ do ogólnego równania

$$\begin{aligned} L(t) = a + \overrightarrow{ab} * t &= (1, -1, 2) + t * (2, -1, 4) \\ &= (1 + 2t, -1 - t, 2 + 4t). \end{aligned}$$

Odpowiedź: $L(t) = (1 + 2t, -1 - t, 2 + 4t), \qquad -\infty < t < \infty.$

(ii) Podstawiamy dane: punkt $a = (1, -1, 2)$ i punkt $b = (2, 1, 2)$ do ogólnego równania

$$\begin{aligned} L(t) &= a * (1 - t) + b * t = (1 - t)(1, -1, 2) + t * (2, -1, 4) \\ &= ((1 - t) + 2t, (1 - t) - t, 2(1 - t) + 4t) \\ &= (1 + t, 1 - 2t, 2 + 2t). \end{aligned}$$

Odpowiedź: $L(t) = (1 + t, 1 - 2t, 2 + 2t), \qquad -\infty < t < \infty.$

0.4 Płaszczyzna w przezstrzeni R^3.

Równanie płaszczyzny w układzie współrzędnych x, y, z jest określone następująą zależnością liniową tych zmiennych

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie współczynniki A, B, C, D określają położenie płaszczyzny w układzie współrzędnych x, y, z. Zakładamy, że nie wszystkie współczynniki A, B, C znikają jednocześnie, to znaczy $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Przykład 0.3 *Współczynniki płaszczyzny*

$$x + y + z = 0$$

są $A = 1,\ B = 1,\ C = 1,\ D = 0.$

Zauważmy, że ta płaszczyzna przechodzi przez początek układu współrzędnych $(0, 0, 0)$, gdyż ten punkt spełnia jej równanie $0 + 0 + 0 = 0$. Ta płaszczyzna przecina płaszczyznę rozpiętą na współrzęnych x, y, gdy $z = 0$, wzdłuż prostej o równaniu

$$x + y = 0, \quad \text{lub} \quad y = -x, \quad \text{gdy} \quad z = 0.$$

Przykład 0.4 *Napisz równanie płaszczyzny o współczynnikach*

$$A = 2, B = 3, C = -1, D = 0.$$

Podaj rẃnanie prostej powstałej z przeciecia tej płaszczyzny z płaszczyzną układu współrzędnych $z = 0$

Rozwiązanie. Równanie płaszczyzny

$$2x + 3y - z = 0.$$

Równanie prostej w płaszczyźnie x, y, gdy $z = 0$

$$2x + 3y, \quad \text{lub} \quad y = -\frac{2}{3}x, \qquad z = 0.$$

0.5 Równanie prostej w przestrzeni R^3.

Dwie płaszczyzny nie równoległe zawsze przcienają się wdłuż prostej. Dlatego równie prostej w przestrzeni wyznaczają dwie płaszczyzny. To znaczy punkty leżą na prostej w przestrzeni, jeżeli leżą na dwóch płaszczyznach. Zatem, równanie prostej w przestrzeni wyznacza układ dwóch równań

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

którego współczynniki A_1, B_1, C_1 nie są proporcjonalne do współczynników A_2, B_2, C_2. Warunek ten oznacza, że płaszczyzny o tych równaniach nie są równoległe. Łatwo sprawdzamy warunek równoległości płaszczyzn, mianowicie sprawdzamy, że

$$(A_1, B_1, C_1) \neq k(A_2, B_2, C_2) = (k * A_2, k * B_2, k * C_2)$$

dla każdego k.

Przykład 0.5 *Znajdź zbiór punktów o współrzędnych (x, y, z), które leżą na prostej wyznaczonej przez następujące dwa równania płaszczyzn*

$$x + 2y - z = 0,$$

$$2x - y + z = 0.$$

Rozwiązanie. Najpierw, sprawdzamy, że te płaszczzny nie są równoległe. To znaczy wpółczynniki $(A_1, B_1, C_1) = (1, 2, -1)$ nie są proporcjonalne do współczynników $(A_2, B_2, C_2) = (2, -1, 1)$.
Piszemy proporcje

$$(A_1, B_1, C_1) = (1, 2, -1) = (2k, -k, k) = (kA_2, kB_2, kC_2)$$

Porównując współrzędne, otrzymamy układ równań na parametr k

$$2k = 1, \quad k = -2, \quad k = -1,$$

który jest sprzeczny. Zatem, te płaszczyzny nie są równoległe.
Teraz określamy zbiór punktów x, y, z, które należą do obu płaszczyzn.
Mianowicie, z pierwszego równanie obliczmy

$$y = \frac{1}{2}(-x + z).$$

Z drugiego równania obliczamy

$$y = 2x + z$$

Porównując stronami, otrzymamy następujący związek pomiędzy x i z:

$$\frac{1}{2}(-x + z) = 2x + z, \quad \text{lub} \quad -x + z = 4x + 2z, \quad \text{lub} \quad z = -5x.$$

Teraz, wyrażamy zmienną $y = 2x + z = 2x - 5x = -3x$ w zależności od zmiennej x.
Odpowiedź: Punkty o wspłrzędnych $(x, -3x, -5x)$, $-\infty < x < \infty$, leżą na przecięciu dwóch danych płaszczyzn i okreśją prostą w przestrzeni. Rozwiązanie w którym współrzędne punktu na prostej dane są w zależności od prametru $x \in (-\infty, \infty)$ nazywamy równaniem parametrycznym prostej. Dalej parametr będziemy oznaczali literą t.

0.6 Zadania

Zadanie 0.1 *Niech dane będą punkty* $a = (3, 2, -1)$ *i* $b = (1, -1, 2)$. *Oblicz*

$$(i) \quad a + b, \quad (ii) \quad a - b, \quad (iii) \quad 3 * a + 5 * b.$$

Zadanie 0.2 *Rozpatrz dwa wektory swobodne*

$$\vec{v} = [1, 2, 0] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1, 0]$$

(i) *Znajdź wektor* $\vec{s}$ *sumy i wektor* $\vec{r}$ *różnicy wektorów* $\vec{v}$ *i* $\vec{w}$
(ii) *Narysuj wektor* $\vec{s}$ *sumy wektorów* $\vec{v}$ *i* $\vec{w}$ *o wspólnym początku w punkcie* $a = (1, 0, 0)$.
(iii) *Narysuj wektor* $\vec{r}$ *różnicy wektorów* $\vec{v}$ *i* $\vec{w}$ *o wspólnym początku w punkcie* $a = (1, 0, 0)$.

Zadanie 0.3 *Oblicz iloczyn skalarny wektorów*

$$\begin{array}{lll} (i) & \vec{v} = [3, 4, 0], & \vec{w} = [0, 2, -1], \\ (ii) & \vec{v} = [2, 3, 0], & \vec{w} = [3, -2, 0], \\ (iii) & \vec{v} = [-3, 1, 2], & \vec{w} = [4, 2, 1], \\ (iv) & \vec{v} = [4, 1, 5], & \vec{w} = [5, 0, -4]. \end{array}$$

Które z powyższych par wektorów są prostopadłe?

Zadanie 0.4 *Oblicz długość wektorów*

$$(i) \quad \vec{v} = [1, 2, 2], \qquad (ii) \quad \vec{w} = [3, 0, 4].$$

Zadanie 0.5 *Wykaż, że wektory*

$$\vec{p} = \vec{v} + \vec{w}, \qquad \vec{q} = \vec{q} = \vec{v} - \vec{w}$$

są prostopadłe, jeżeli

$$\vec{v} = [1, 4, 1], \qquad \vec{w} = [3, -1, 1]$$

Zadanie 0.6 *Wykaż, że jeżeli wektory*

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3], \qquad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

są prostopadłe $\vec{v} \perp \vec{w}$ *to wektory*

$$\vec{p} = \vec{v} + \vec{w}, \qquad \vec{q} = \vec{q} = \vec{v} - \vec{w}$$

są również prostopadłe $\vec{p} \perp \vec{q}$.

Zadanie 0.7 *Wykaż, że następujące pary wektorów*

$$(i) \qquad \vec{v} = [1,3,1], \qquad \vec{w} = [3,-1,0]$$

$$(ii) \qquad \vec{p} = \vec{v} + \vec{w}, \qquad \vec{q} = \vec{q} = \vec{v} - \vec{w}$$

są prostopadłe.

Zadanie 0.8 *Napisz parametryczne równanie prostej*

(i) o początku w punkcie $a = (0,1,-1)$ *i kierunku wektora* $\overrightarrow{a} = (2,1,3)$

(ii) przechodzącej przez punkty $a = (3,1,2)$ *i* $b = (0,2,2)$

Zadanie 0.9 *Znajdź zbiór punktów o współrzędnych* (x,y,z)*, które leżą na prostej wyznaczonej przez następujące dwa równania płaszczyzn*

$$2x + y - z = 0,$$

$$x - 2y + z = 0.$$

Zadanie 0.10 *Napisz równanie płaszczyzny o współczynnikach*

$$A = 1, \; B = -2, \; C = 1, \; D = 3.$$

Podaj rẃnanie prostej powstałej w przecieciu tej płaszczyzny z płaszczyzną układu współrzędnych

(i) gdy $\quad z = 0,$

(ii) gdy $\quad y = 0,$

(ii) gdy $\quad x = 0.$