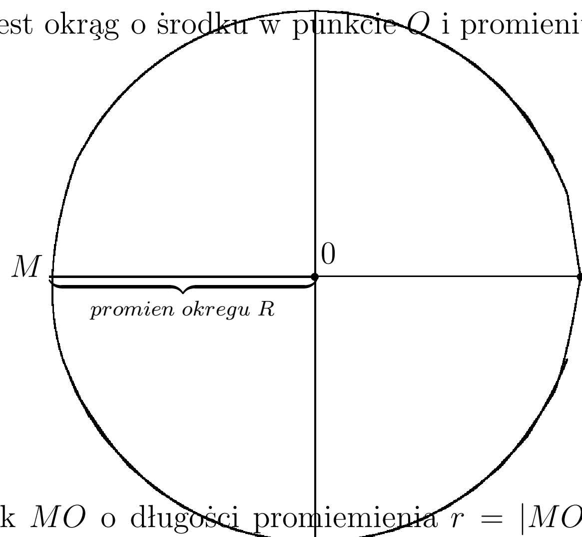
0.1 Pięciokąt foremny.

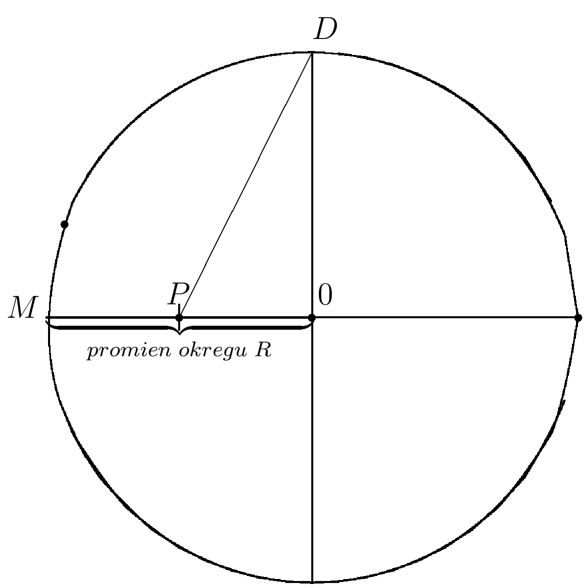
Pięciokąt foremny ma pięć boków równych i pięć kątów równych $\alpha = \frac{3\pi}{10}$ w mierze łukowej lub 108^0 stopni.

Konstrukcja pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg. Niżej podamy konstrukcje pięciokąta foremnego wpisanego w dany okrąg o promieniu R i środku w punkcie O przy pomocy cyrkla i linijki bez skali.

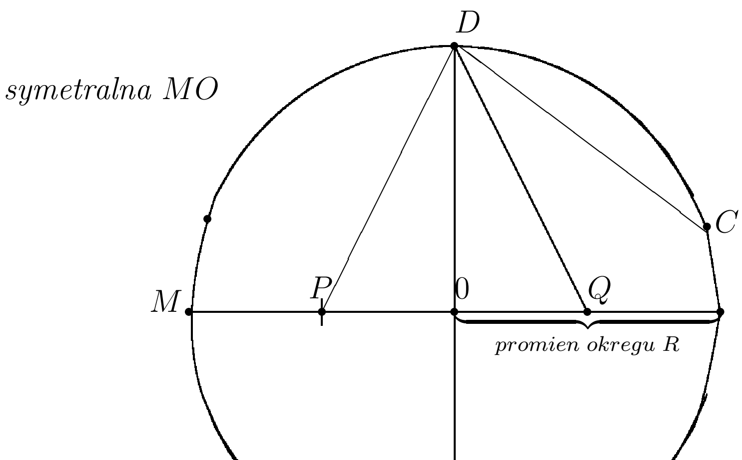
Dany jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu R.



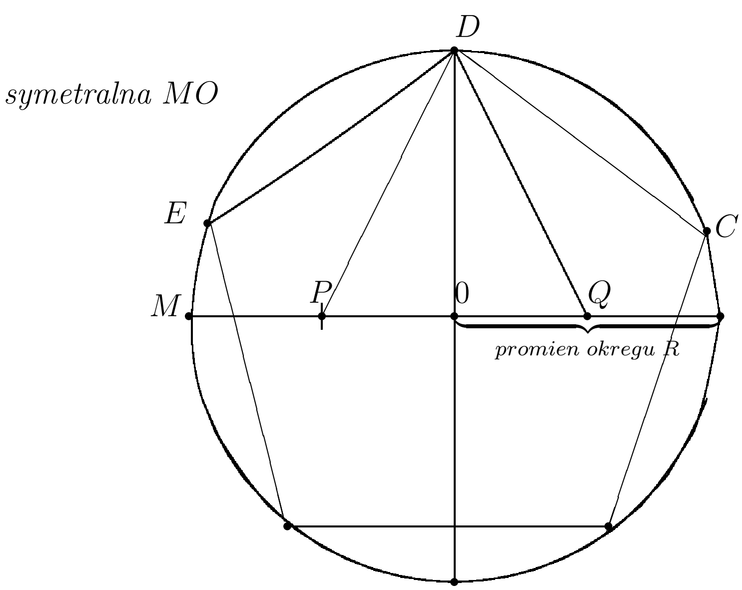
Odcinek MO o długości promiemienia $r = |MO|$ dzielimy na połowę przez poprowadzenie symetralnej odcinka MO przy pomocy cyrkla i linijki. Zaznaczamy punkt P w połowie odcinka MO. Łączymy punkty P i D, jak naniżej rysunku



Stawiamy cyrkiel w punkcie D i rozwartością cyrkla równą długości odcinka DP zakreślamy łuk i zaznaczamy punkt Q przecięcia łuku z promieniem R oraz punkt C przecięcia z okręgiem. Łączymy punkty D i C. Długość tego odcinka $a = |DC|$ równa jest długości boku pięciokąta.



Rysujemy pięciokąt formeny wpisany w okrąg stawiając cyrkiel w kolejnych punktach A, B, C, E, D wierzachołkach pięciokąta i łączymy te punkty przy pomocy linijki. Wten sposób narysowaliśmy pięciokąt foremny wpisany w okrąg o środu w punkcie O i danym promieniu R.



Związki miarowe w pięcokącie foremnym. Istnieje zależność pomiędzy bokiem a pięciokąta foremnego i promieniem R okręgu opisanego na tym pięciokącie. Mianowicie bok pięciokąta foremnego wyraża się przez promień

R okręgu opisanego na tym pięciokącie wzorem

$$a = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Natomiast promieniem R okręgu opisanego na pięciokącie foremnym wyraża się przez jego bok a wzorem:

$$R = \frac{2a}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

Istotnie stosując twierdzenie Pitagorasa do do ròjkąta $\triangle PQD$ obliczamy długośċ odcinka PD

$$|PD|^2 = R^2 + (\frac{R}{2})^2 = \frac{5R^2}{4}, \qquad |PD| = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

Następnie, obliczamy bok pięciokąta $a = |QD|$ z tr.öjkąta prostokątnego $\triangle OQD$

$$\begin{aligned} a^2 = R^2 + (|PD| - \tfrac{R}{2})^2 &= R^2 + (|PD|^2 - R|PD| + \tfrac{R^2}{4}) \\ &= R^2 + (\frac{5R^2}{4} - \frac{R^2\sqrt{5}}{2} + \frac{R^2}{4}) \\ &= R^2(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}). \end{aligned}$$

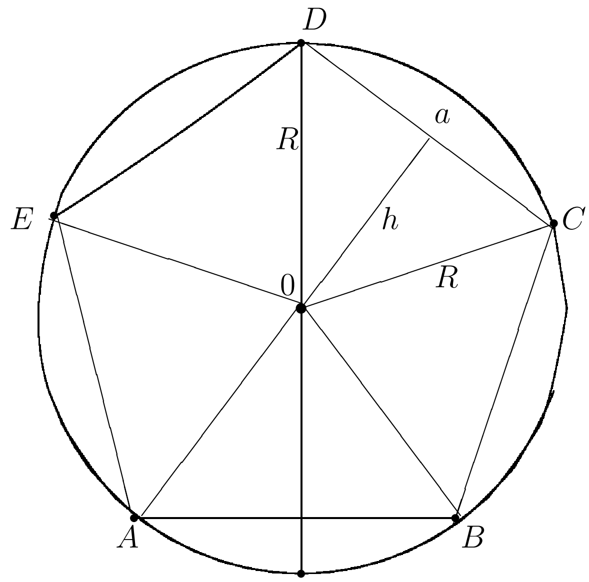
Zatem

$$a = \sqrt{R^2\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Odwracając powyższy wzòr na długośċ boku a pięciokąta foremnego wyrażoną przez promień R okręgu opisanego na tym pięciokącie, obliczamy promień

$$R = \frac{2a}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

Obwòd i pole pięciokąta foremnego łatwo obliczamy odwołując się do wyżej podanych związkòw miarowych pięciokąta foremnego $ABCDE$, ktòry składa się z pięciu tròjkątòw ròwnoramiennych o ramionach R i podastawie a zaznaczonych niżej naa rysunku



Obwód pięciokąta formnego o boku a równy jest

$$obwod \;=\; 5a$$

Pole pięciokąta foremnego równe jest

$$P_{ABCDE} = \frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}.$$

Istotnie, pole jednego z pięciu równorammienych trójkątów przystających do trójkąta $\triangle OCD$ równe jest

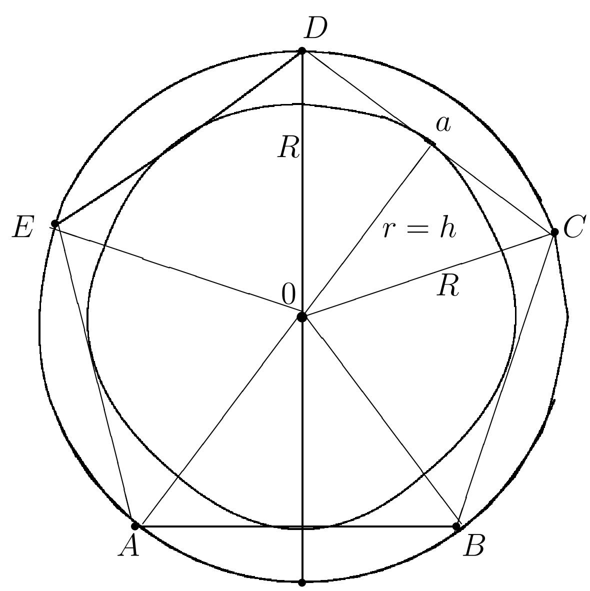
$$P = \frac{1}{2}h * a$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokośċ trójkąta

$$\begin{aligned} h^2 = R^2 - (\frac{a}{2})^2 &= (\underbrace{\frac{2a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}_{R^2})^2 - (\frac{a}{2})^2 \\ &= \frac{4a^2}{10-2\sqrt{5}} - \frac{a^2}{4} \\ &= a^2(\frac{4(10+2\sqrt{5})}{100-20} - \frac{1}{4}) \\ &= a^2(\frac{10+2\sqrt{5}}{20} - \frac{1}{4}) = \frac{a^2}{20}(5+2\sqrt{5}) \end{aligned}$$

Skąd wysokość
$$h = \frac{a}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \tag{1}$$
oraz pole pięciu trójką przestających do trójkąta $\triangle OCD$ równe jest
$$P = 5 * \frac{1}{2} a * h \;\;=\;\; \frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}.}$$

Okrąg wpisany w pięciokąt foremny. Jest ogólna prawidłowość pomiędzy okręgiem opisanym na wielokącie foremnych i okręgiem wpisanym w wielokąt foremny. Mianowicie, środki tych okręgów leżą w jednym i tym samym punkcie. Wynika to z tej prostej racji, że dwusieczne kątów i symetralne boków wielokątów foremnych przecinają się w jednym punkcie.
Zatem, żeby w dany pięciokąt foremny wpisać okrąg należy poprowadzić symetralne co najmniej dwóch jego boków lub dwusieczne dwóch kątów. W ten sposób znajdziemy środek okręgu wpisanego w dany pięciokąt. Natomiast promień $r = h$ określony jest jako wysokść h trójkąta $\triangle OCD$. Niżej na rysunku widzimy okrąg o promieniu R opisany na pięciokącie foremnym $ABCDE$ oraz okrąg o promieniu r wpisany w pięciokąt foremny. Oba te okręgi mają wspólny środek w punkcie O.



Promień okręgu wpisanego
$$r = \frac{a}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

Promień okręgu opiasanego
$$R = \frac{2a}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

Zadanie 0.1 *Sprawdź prostą zależność pomiędzy promieniem R okręgu opisanego na pięciokącie foremnym i promieniem r okręgu wpisanego w pięciokącie foremnym.*
$$\frac{R}{r} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}.}$$

Prof. dr Tadeusz STYS Warszawa, luty 10, 2019