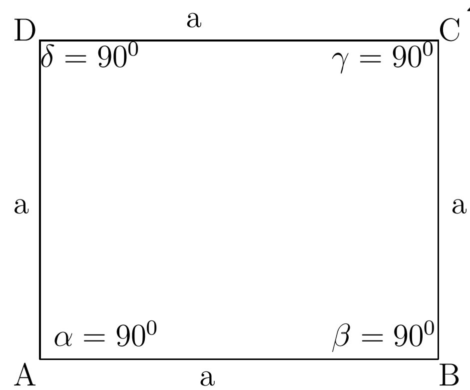
Czworokąty

0.1 Czworokąt foremny.

Czworokątem foremnym jest kwadrat o czterych rȯwnych bokach i czterych kątach rȯwnych 90^0 lub w mierze łukowej rȯwnych $\frac{\pi}{2}$.

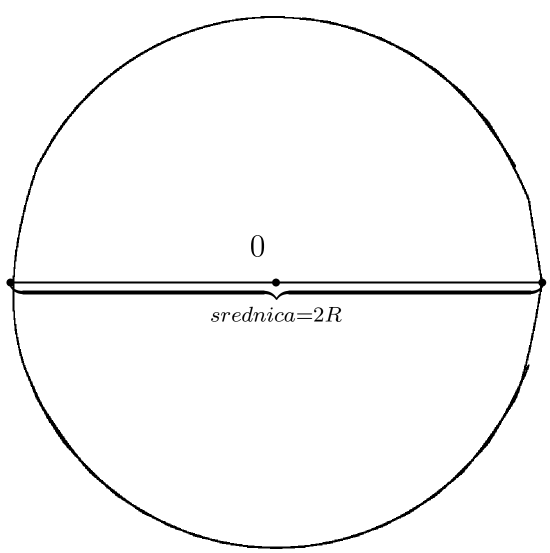


Pole kwadratu a^2

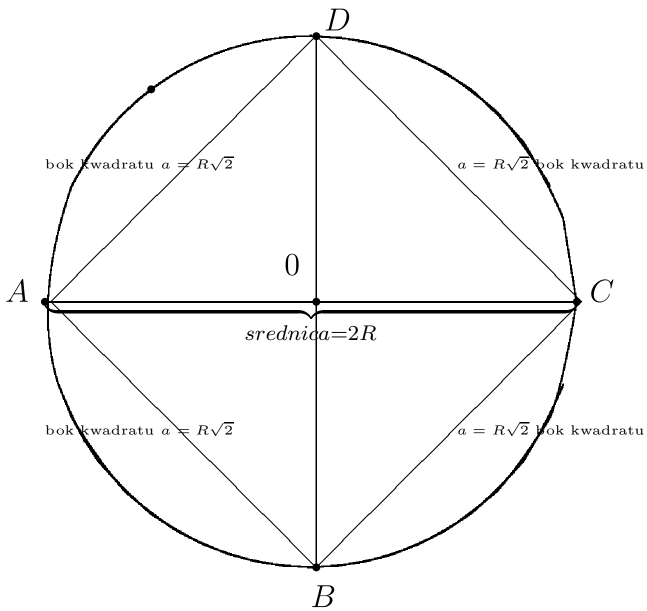
Obwȯd kwadratu $4a$

0.1.1 Kwadrat wpisany w okrąg.

Cztery kąty proste kwadratu wpisanego w okrąg są jednocześnie kątemi wpisanymi w okrąg opartymi na średnicy okręgu rȯwnej $2R$. Zatem przekątne kwadratu wpisanego w okrąg są średnicami okręgu.
Mając dany okrąg łatwo można skonstruować kwadrat wpisany w okrąg przy pomocy cyrkla i linijki bez skali.
Dane: okrąg o promieniu R i środku w punkcie O

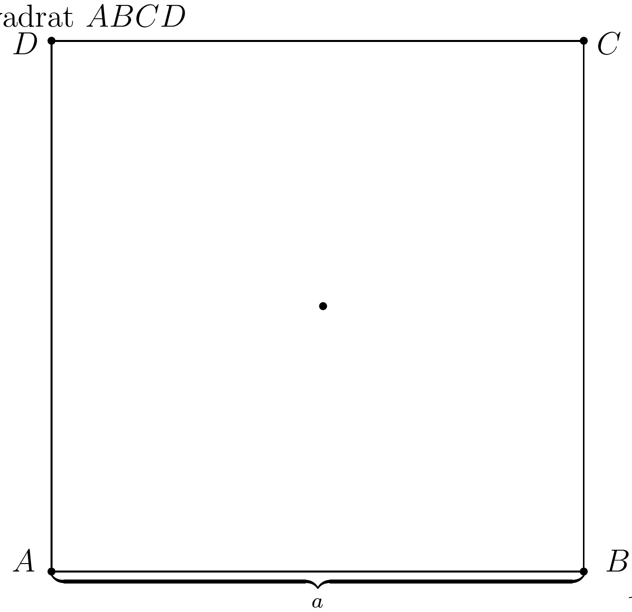


Rysując dwie średnice okręgu prostopadłe do siebie i łącząc ich końce narysujemy kwadrat wpisany w okrąg o długości boku $a = R\sqrt{2}$.



0.1.2 Konstrukcja okręgu wpisanego w kwadracie.

W konstrukcji okręgu wpisanego w kwadracie o długości boku $a = |AB|$ dany jest kwadrat $ABCD$

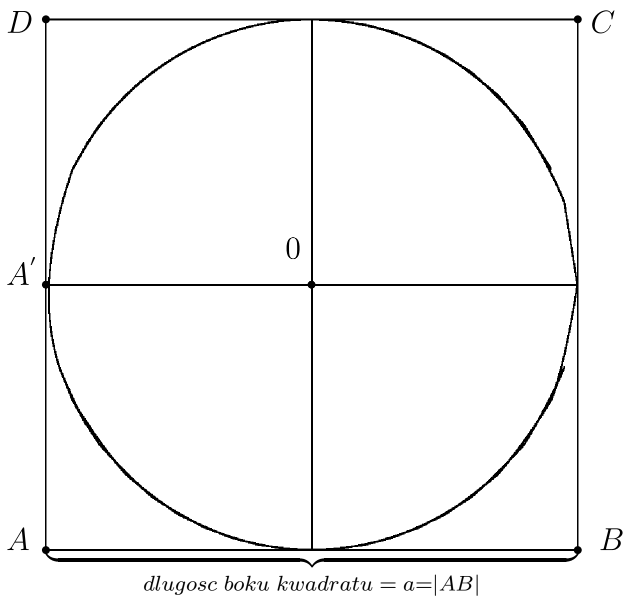


Promień okręgu wpisanego w kwadrat równy jest $r = \frac{1}{2}a$ połowie długości boku kwadratu $ABCD$.

Zatem rysujemy symetralne boków kwadratu przy pomocy cyrkla i linijki. [1]Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie O przecięcia symetralnych i rozwartością

[1]Konstrukcja symetralnej odcinka przy pomocy cyrkla i linijki została opisana wcześniej.

cyrkla równą długości odcinka $A'O$ zakreśmy okrąg wpisany w kwadrat.

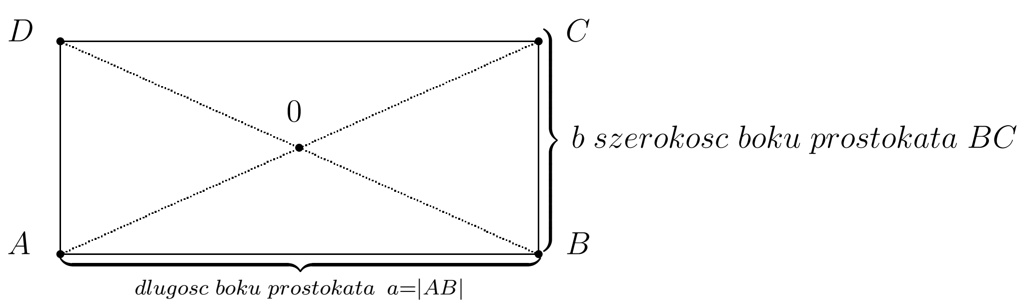


0.1.3 Prostokąty

Prostokąt $ABCD$ ma cztery boki parami równe

$$a = |AB| = |CD|, \qquad b = |AD| = |BC|$$

i cztery kąty proste równe 90^0.



Pole prostokąta $= a * b$, obwód prostokąta $=2 * a + 2 * b$

0.1.4 Okrąg opisany na prostokącie.

Na każdym prostokącie można opisać okrąg. Natomiast w żaden prostokąt nie można wpisać okręgu z wyjątkiem kwadratu.

0.1.5 Konstrukcja okręgu opisanym na prostokącie.

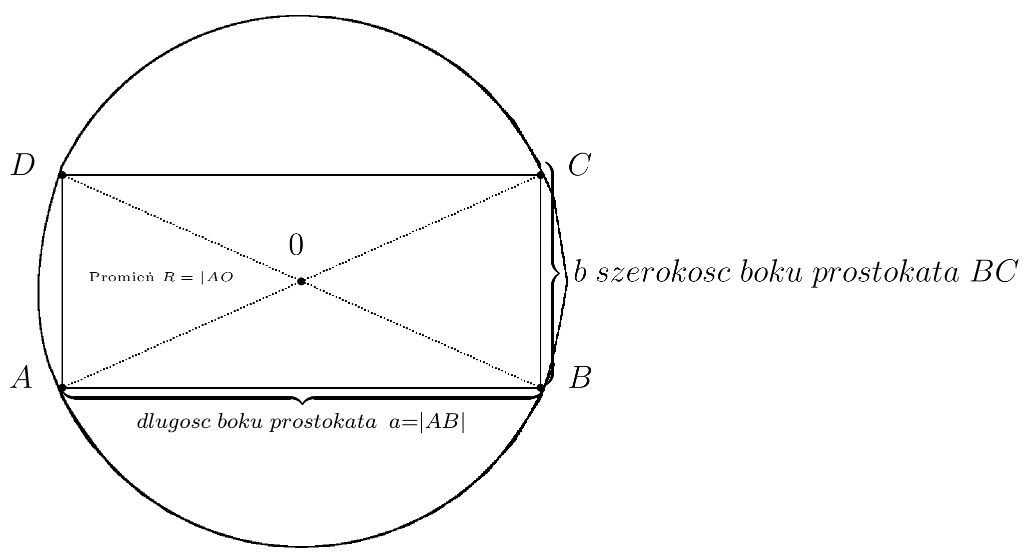
Łatwo rysujemy okrąg opisany na prostokącie $ABCD$ o długości boków

$$a = |AB|, \qquad b = |BC|$$

Promień okręgu opisanego na prostokącie równy jest połowie długości przekątnej AC lub BD. Z twierdzenia Pitagorasa obliczmy promień

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

Rysujemy przy pomocy liniki dwie przekątne prostokąta $ABCD$ łącząc jego wierzchołki A i C oraz B i D. Stawiamy cyrkiel w punkcie O przecięcia przekątnych i rozwartością cyrkla równą długości odcinka AO lub OC lub BO lub DO zakreślamy okrąg opisany na prostokącie $ABCD$.



0.2 Romb

Romb $ABCD$ jest czworokątem o równych cztery bokach

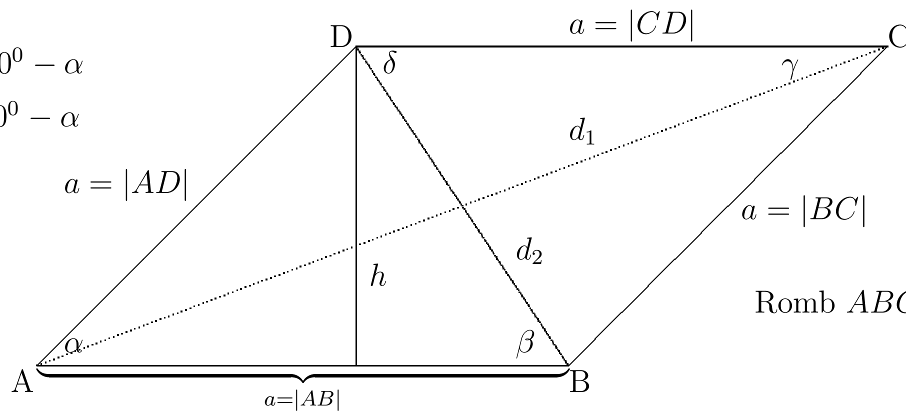
$$a = |AB| = |BC| = |CD| = AD|$$

i parami równych kątach

$$\alpha = \gamma, \qquad \beta = \delta.$$

$\beta = 180^0 - \alpha$

$\delta = 180^0 - \alpha$



Romb $ABCD$

Obwód rombu o danym boku a równy jest

$$Obwod = 4a.$$

Pole rombu o danym boku a i wysości h równe jest

$$P = a * h$$

Pole rombu o danych przekątnych d_1 i d_2 równe jest

$$P = \frac{1}{2} d_1 * d_2.$$

Suma kątów rombu równa jest 360^0. Mianowicie obliczamy

$$\begin{aligned} Suma &= \alpha + \beta + \delta + \gamma \\ &= \alpha + \underbrace{(180^0 - \alpha)}_{\beta} + \underbrace{\alpha}_{\gamma} + \underbrace{(180^0 - \alpha)}_{\delta} = 360^0. \end{aligned}$$

0.2.1 Okrąg wpisany w romb.

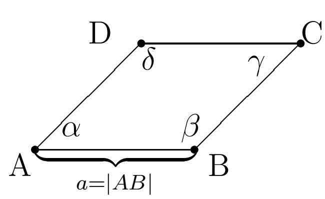
W każdy romb można wpisać okrąg, natomiast na rombie nie można opisać okręgu. niżej podajemy konstrukcję okręgu wpisanego w romb.
Dany jest romb $ABCD$ o długości boków

$$a = |AB| = |BC| = |CD| = |AD|$$

i kątach parmi równych $\alpha = \gamma$ i $\beta = \delta$.

$\beta = 180^0 - \alpha$

$\delta = 180^0 - \alpha$



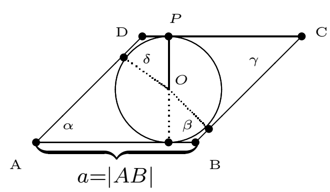
Romb $ABCD$

0.2.2 Konstrukcja okręgu wpisanego w romb.

Najpierw poprowadźmy przekątne rombu przy pomocy linijki. Z punktu O przecięcia przekątnych wystawiamy prostopadłą do boku rombu CD lub do pozostałych boków AB, BC, AD.
Punkkt styczności P okręgu z bokiem rombu CD wyznacza promień $r = |OP|$ okręgu wpisanego w romb. Stawiamy cyrkiel w punkcie przecięcia przekątnych O i rozwrtością cyrkla równą promieniowi okręgu $r = |OP|$ zakreślamy okrąg wpisany w romb. Okrąg jest styczny do czterech boków rombu. Boki rombu są prostopadłe do promieni okręgu wpisanego w romb wystawione w punktach stycznośc.

$\beta = 180^0 - \alpha$

$\delta = 180^0 - \alpha$



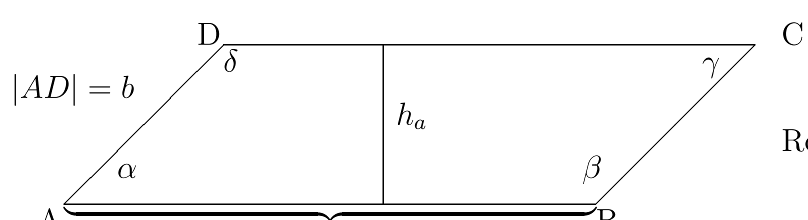
Romb $ABCD$

0.3 Równoległoboki

Równoległobok $ABCD$ jest czworokątem o bokach równoległych parami równych i o kątach naprzeciwległych równych.

$\beta = 180^0 - \alpha$

$\delta = 180^0 - \alpha$



Równoległobok $ABCD$

Obwód równoległoboku o danych bokach a, b równy jest

$$Obwod = 2a + 2b.$$

Pole równoległoboku o danych bokach a, b i wysości h_a lub h_b równe jest

$$P = a * h_a, \qquad lub \qquad P = b * h_b$$

lub pole rombu o danych przekątnych d_1 i d_2 równe jest
Suma kątów równoległoboku równa jest 360^0. Mianowicie obliczamy

$$\begin{aligned} Suma &= \alpha+\beta+\delta+\gamma \\ &= \alpha+\underbrace{(180^0-\alpha)}_{\beta}+\underbrace{\alpha}_{\gamma}+\underbrace{(180^0-\alpha)}_{\delta}=360^0 \end{aligned}$$

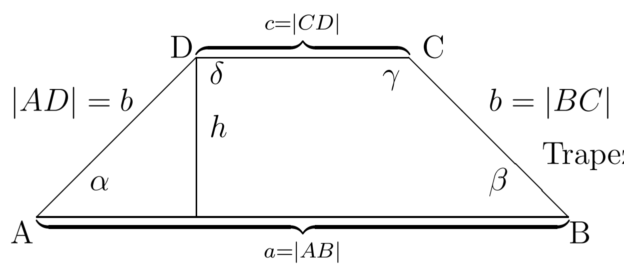
W równoległobok nie można wpisać okręgu ani opisać okręgu na równoległoboku, jeżeli równoległobok nie jest rombem lub kwadratem.

0.4 Trapez równoramienny.

Trapez równoramienny jest czworokątem $ABCD$ o dolej podstawi AB równoległej do górnej podstawy CD, o równej długości boków $|AD| = |BC|$ i parami równych kątach $\alpha = \beta$ oraz $\gamma = \delta$.

$\gamma = 180^0 - \alpha$

$\delta = 180^0 - \alpha$



Trapez równoramienny $ABCD$

Obwód trapazu równoramiennego o danych bokach

$$a = |AB|,\ b = |AD| = |BC|,\ c = |CD|$$

równy jest

$$Obwod = a + 2b + c.$$

Pole równoległoboku o danych bokach a, b i wysości h równe jest

$$P = \frac{1}{2}(a+c) * h$$

Istotne, pole trapezu $ABCD$ równe jest sumie pola prostokąta o bokach c, h i prostokąta o bokach $\frac{1}{2}(a-c), h$. Zatem pole trapezu równoramiennego

$$P = c * h + \frac{1}{2}(a-c) * h = \frac{1}{2}(a+c)$$

Suma kątów trapezu równoramiennego równa jest 360^0. Mianowicie obliczamy

$$\begin{aligned} Suma &= \alpha + \beta + \gamma + \delta \\ &= \alpha + \underbrace{\alpha}_{\beta} + \underbrace{(180^0 - \alpha)}_{\gamma} + \underbrace{(180^0 - \alpha)}_{\delta} = 360^0 \end{aligned}$$

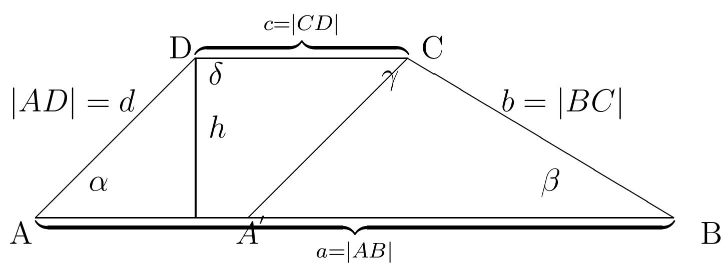
0.5 Trapez dowolny.

Trapez jest czworokątem $ABCD$ o dolej podstawi AB równoległej do górnej podstawy CD, o ramionach $AD,\ BC$ i kątach $\alpha,\ \beta, \gamma,\ \delta$.

$\gamma = 180^0 - \alpha$

$\delta = 180^0 - \alpha$

Trapez $ABCD$



Obwód trapazu o danych bokach

$$a = |AB|,\ b = |AB|,\ c = |CD|,\ d = |ZD|$$

równy jest

$$Obwod = a + b + c + d.$$

Pole trapezu o danych bokach a, b, c, d i wysości h równe jest

$$P = \frac{1}{2}(a + c) * h$$

Istotne, pole trapezu $ABCD$ równe jest sumie pola równoległoboku $AA'CD$

$$P_{rownolegobok} = c * h$$

i pola trójkąta $triangleA'BC$

$$P_{\triangle} = \frac{1}{2}(a - c) * h$$

Zatem pole trapezu równe jest

$$P = c * h + \frac{1}{2}(a - c) * h = \frac{1}{2}(a + c)$$

Suma kątów trapezu równoramiennego równa jest 360^0. Mianowicie obliczamy

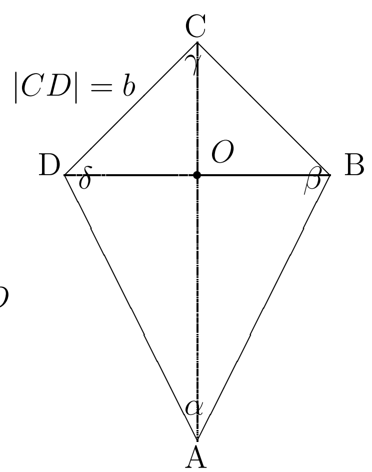
$$\begin{aligned} Suma &= \alpha + \beta + \gamma + \delta \\ &= \alpha + \beta + \underbrace{(180^0 - \alpha)}_{\delta} + \underbrace{(180^0 - \beta)}_{\gamma} = 360^0. \end{aligned}$$

0.6 Deltoid

Deltoid jest czworokątem o bokach parami równych

$$a = |AB| = AD|, \qquad oraz \qquad b = |BC| = |CD|$$

i o kątach $\beta = \delta$



Przekątna $d_1 = |BD|$

Przekątna $d_2 = |AC|$

Deltoid $ABCD$

Przekątne $d_1 = |BD|$ i $d_2 = |AC|$ deltoidu $ABCD$ przecinają się pod kątem prostym w punkcie O.

Obwód deltoidu

$$Obwod \;=\; 2a + 2b$$

Pole deltoidu równe jest połowie iloczynu przekątnych

$$P = \frac{1}{2} d_1 * d_2$$

Ponieważ przekątne deltoidu przecinają się pod kątem prostym w punkcie O. Dlatego pole deltoidu $ABCD$ równe jest sumie pól trójkątów $\triangle BCD$ i

$\triangle ABD$. Zatem mamy

$$
\begin{aligned}
\textit{pole deltoidu } ABCD &= \triangle ABD + \triangle BCD \\
&= \frac{1}{2}|AO| * d_1 + \frac{1}{2}|OC| * d_1 \\
&= \frac{1}{2}(|AO| + |OC|) * d_1 \\
&= \frac{1}{2} * d_1 * d_2
\end{aligned}
$$

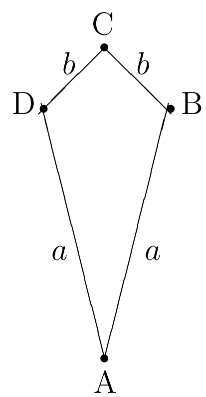
W deltoid można woisać okąg i na okręgu można opisać deltoid.

0.6.1 Konstrukcja okręgu wpisanego w deltoid.

Załóżmy, że mamy dany deltoid $ABCD$ o bokach

$$a = |AB \; ; \qquad b = ||BC|$$

Deltoid $ABCD$

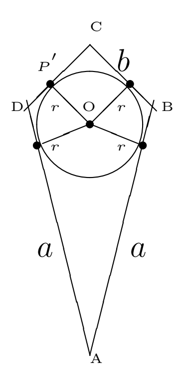


bok $a = |AB| = |AD|$

bok $b = |BC| = |CD|$

Środek okręgu wpisanego w deltoid leży na przecięciu przekątnych AC i BD. Natomiast promień $r = |OP'|$ jest prostopadły do każdego z czterech boków deltoidu $ABCD$. Zatem ze środka O okręgu wystawiamy prostopadłą do boku AB lub BC lub CD lub AD. Następnie stawiamy cyrkiel w środku okręgu O i rozwartością cyrkla równą odległości środka O od punktu styczności P' zakreślamy okrąd woisany w deltoid.

Deltoid $ABCD$



bok $a = |AB| = |AD|$

bok $b = |BC| = |CD|$

promiemień $r = |OP'|$

Promień okręgu wpisanego w deltoid

$$r = \frac{P}{a+b} = \frac{P}{p}, \qquad p = a + b,$$

gdzie $P = \dfrac{1}{2} d_1 * d_2$, oznacza pole deltoidu jako połowa iloczynu jego przekątnych $d_1,\ d_2$. natomiast $p = a + b$ jest połową obwodu deltoidu $ABCD$.
Istotnie pole deltoidu równe jest sumie pól czterech trójkątów

$$\begin{aligned}
\textit{Pole deltoidu} &= |\triangle AOB| + |\triangle AOD| + |\triangle OBC| + |\triangle OCD| \\
&= \frac{1}{2}|AB| * r + \frac{1}{2}|BC| * r + \frac{1}{2}|CD| * r + \frac{1}{2}|AD| * r \\
&= \frac{1}{2}|b| * r + \frac{1}{2}|a| * r + \frac{1}{2}|a| * r + \frac{1}{2}|b| * r \\
&= \frac{1}{2}(2a + 2b) * r = (a + b) * r
\end{aligned}$$

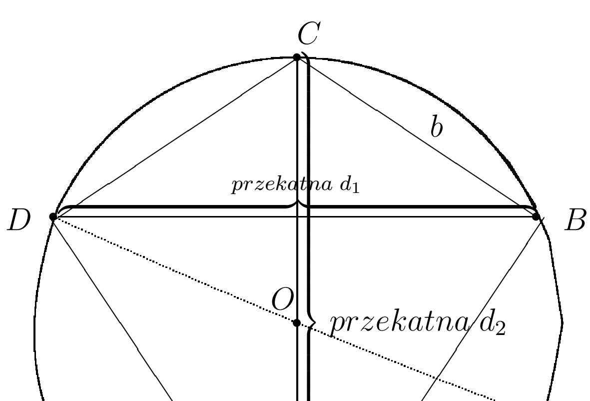
Skąd obliczamy promień

$$r = \frac{P}{a+b} = \frac{P}{p}, \qquad p = a + b,$$

0.6.2 Konstrukcja okręgu opisanego na deltoidzie.

Na każdym deltoidzie można opisać okrąg. Środek okręgu opisanego na deltoidzie leży na przecięciu dwusiecznych kątów deltoidu $ABCD$.
Mamy dany deltoid $ABCD$ o bokach $a = |AB|,\ \ b = |BC|$.

Prowadzimy dwusieczną DO kąta $\angle ADC$ oraz dwusieczną AC kąta $\angle DAB$ i $\angle BCD$. Przekątne $d_1 = |DC|$ i $d_2 = |AC|$ rysujemy przy pomocy linijki łącząc wierzchołki D z B i A z C deltoidu $ABCD$. Zauważmy, że przekątna $d_2 = |AC|$ jest jednocześnie dwusieczną kątów $\angle DAB$ i $\angle BCD$.
Okrąg opisany na deltoidzie $ABCD$ rysujemy stawiając cyrkiel w punkcie O przecięcia dwusiecznych kątów i rozwartością cyrkla równą promieniowi $R = |OA|$ kreślimy okrąg.



Zauważmy, że deltoid

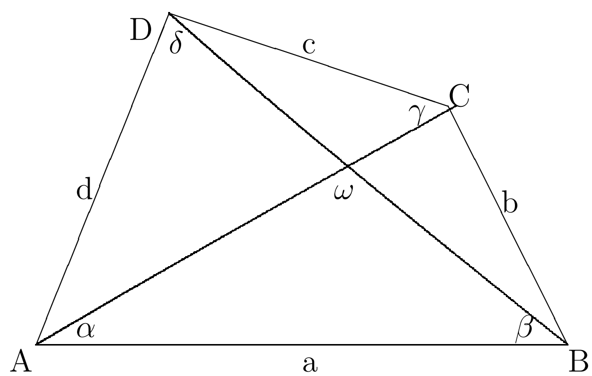
• jest kwadratem, jeżeli ma cztery boki równe i cztery kąty równe,
• jest rombem, jeżeli ma wszystkie boki równe.

0.7 Czworokąty dowolne

Rozpatrzmy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A,\ B,\ C,\ D$, czterech bokach o długości

$$a = |AB|, \quad b = |BC|, \quad c = |CD|, \quad d = |AD|$$

i czterech kątach $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$.



Przekątne $d_1 = |BD|$ i $d_2 = |AC|$ czworokąta $ABCD$ przecinają się pod kątem ω w punkcie O.

Obwód czwookąta

$$Obwod \ = \ a + b + c + d.$$

Pole czwoprokąta równe jest połowie iloczynu przekątnych

$$P = \frac{1}{2} d_1 * d_2,$$

jeżeli przekątne $d_1,\ d_2$ przecinają się pod kątem prostym.
W przecinym przypadku pole dowolnego prostokąta wyraża się przez funkcje trygonometryczne kąta ω przecięcia przekątnych i równe jest

$$P = \frac{1}{2} d_1 * d_2 \sin \omega.$$

0.7.1 Okrąg opisany na czworokącie.

Nie na każdym czworokącie można opisać okrąg. Niżej podamy warunek pod którym na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg. Jeżeli sumy długości przeciwległych boków są równe to istnieje dokładnie jeden okrąg opisany na czworoboku $ABCD$.

Mianowicie dla

$$a = |AB|, \quad b = |BC|, \quad = c = |CD|, \quad d = |AD|$$

piszemy rȯwnośċ sumy przeciwległych bokȯw

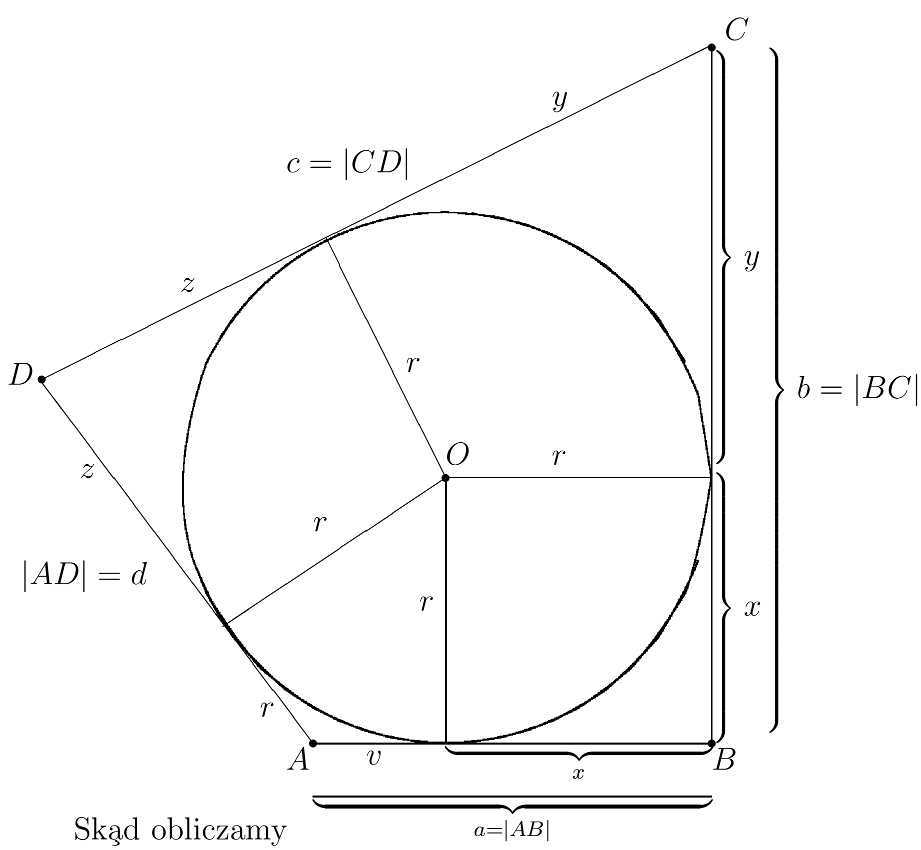
$$|AB| + CD| = |BC + |AD|$$

$$lub$$

$$a + c = b + d.$$

Z rysunku niżej podanego zauważamy, że

$$a = v + x, \quad b = x + y, \quad c = y + z, \quad d = z + v$$



Skąd obliczamy

$$\begin{aligned} a + c &= \underbrace{(v + x)}_{a} + \underbrace{(y + z)}_{c} \\ a + c &= \underbrace{(x + y)}_{b} + \underbrace{(v + z)}_{d} \\ &= b + d. \end{aligned}$$

Pole czworokąta $ABCD$ w który można wpisać okrąg o promieniu r i środku w punkcie O równe jest

$$P = r * p, \qquad gdzie \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

Istotneie, pole czworokąta $ABCD$ równe jest sumie pól deltoidów prostokątnych o ramionach r i wierzchołku O w środku okręgu. Mianowicie pole

$$P = r*x + r*y + r*v + r*z = r*p,$$

gdzie połowa obwodu czworokąta $ABCD$

$$p = x + y + v + z = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

0.7.2 Czworokąt wpisany w okrąg.

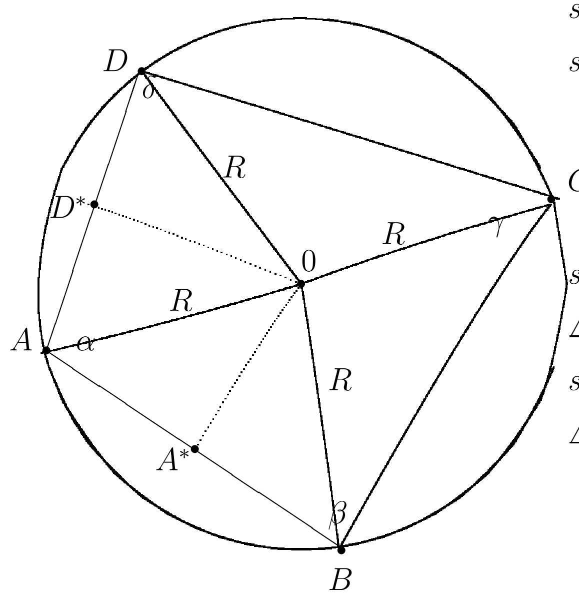
Nie na każdym czworokącie można opisać okrąg. Niżej podamy warunki pod którymi na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

promień okęgu opisanego na czworokącie $ABCD$

$R = |OA| = |OB| = |OC| = |OD|$

symetralna OD^* boku AD

symetralna OA^* boku AB



suma kątów naprzeciwległych

$\angle\alpha + \angle\gamma = 180^0$, *lub* $\angle\alpha + \angle\gamma = \pi$

suma kątów naprzeciwległych

$\angle\beta + \angle\delta = 180^0$, *lub* $\angle\beta + \angle\delta = \pi$

Twierdzenie 0.1 . *Okrąg opisany na czworokącie można zbudowć wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma kątów przeciwległych równa jest π w mierze łukowej lub 180^0 stopni.*

$$\alpha + \gamma = \pi, \qquad \beta + \delta = \pi$$

Dowód. Warunek konieczny. *Jeżeli na danym czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg to suma kątów przeciwległych równa jest π radianów lub* 180^0

$$\alpha + \gamma = \pi, \qquad \beta + \delta = \pi.$$

Zauważmy, że suma kątów środkowych o wierzchołku w środku okręgu O opartych na łukach $\widehat{BCD}$ i $\widehat{BAD}$ równa jest równa 2π, piszemy

$$\angle\widehat{BCD} + \angle\widehat{BAD} = 2\pi \tag{1}$$

Tym kątom środkowym odpowiadają kąty wpisane α i γ również oparte na łukach $\widehat{BCD}$ i $\widehat{BAD}$.
Wiemy, że kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany jest dwa razy większy od kąta wpisanego, piszemy

$$\angle\widehat{BCD} = 2\alpha \quad i \quad \angle\widehat{BAD} = 2\gamma$$

Zatem równość (1) piszemy jako sumę kątów środkowych

$$\angle\widehat{BCD} + \angle\widehat{BAD} = \underbrace{2\alpha + 2\gamma = 2\pi}_{\alpha+\gamma=\pi}$$

Skąd wynika, że suma kątów przeciwległych α i γ czworokąta $ABCD$ równa jest π radianów lub 180^0 stopni.

$$\alpha + \gamma = \pi \quad lub \quad \alpha + \gamma = 180^0.$$

Podobnie dowodzimy, że suma kątów przeciwległych β i δ czworokąta $ABCD$ równa jest π radianów lub 180^0 stopni.
Mianowicie wiemy, że kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany jest dwa razy większy od kąta wpisanego, piszemy

$$\angle\widehat{ADC} = 2\beta \quad i \quad \angle\widehat{ABC} = 2\delta$$

Zatem mamy równość

$$\angle\widehat{ADC} + \angle\widehat{ABC} = \underbrace{2\beta + 2\delta = 2\pi}_{\beta+\delta=\pi}$$

Skąd wynika, że suma kątów przeciwległych β i δ czworokąta $ABCD$ równa jest π radianów lub 180^0 stopni.

$$\beta + \delta = \pi \quad lub \quad \beta + \delta = 180^0.$$

Dowód. Warunek dostateczny. *Jeżeli w czworokącie $ABCD$ suma kątów przeciwległych jest równa π radianów.*

$$\alpha + \gamma = \pi, \qquad \beta + \delta = \pi.$$

to na tym czworokącie można opisać okrąg.
Wiemy, że na trójkącie o trzech wierzchołkach B, A, D czworokąta $ABCD$

można opisać dokładnie jeden okrąg o środku w punkcie O przecięcia symetralnych ramion AB i AD kąta α. Zatem, czwarty wierzchołek C czworokąta $ABCD$ leży na tym okręgu, jeżeli kąt wpisany $\gamma = \angle BCD$ oparty jest na łuku $\widehat{BAD}$. Z założenia

$$\alpha + \gamma = \pi,$$

Podwojone kąty wpisane α, γ tworzą sumę kątów środkowych $\angle BOD$ i $\angle DOB$ opatych na tych samych łukach $\widehat{BAD}$ i $\widehat{BCD}$ co odpowiednie kąty wpisany α i γ.
Suma tych kątów środkowych

$$2\alpha + 2\gamma = 2\pi, \quad \textit{podobnie} \quad 2\beta + 2\delta = 2\pi$$

równa jest kątowi pełnemu 2π radianów. Wtedy wierzchołki A, B, C, D czworokąta $ABCD$ leżą na okręgu o środku w punkcie 0 i promieniu

$$r = |OA| = |OB| = |OC| = |OD|.$$

C.B.D.O.

Prof. dr Tadeusz STYŠ — Warszawa, luty 11, 2019