TRÓJKĄTY

Zakres geometrii płaskiej obejmuje związki miarowe w trójkątach, prostokątach, równoległobokach, w okręgach i w wielokątach. Konstrukcja trójkątów przy pomocy cyrkla i linijki oraz ich własności geometryczne kształt, obwód i pole stanowią treść tego opracowania.

0.1 Trójkąty

Rozróżniamy następujące trójkąty:

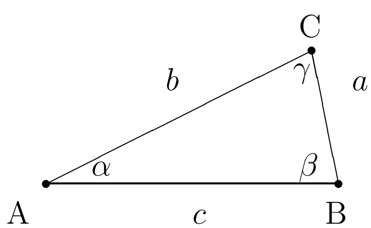
- trójkąty równoboczne,
- trójkąty równoramienne,
- trójkąty prostokątne,
- trójkąty dowolne.

Konstrukcja trójkątów przy pomocy linijki i cyrkla

Oznaczenia. *Wierzchołki trójką oznaczamy dużymi literami A, B, C w kierunku przeciwnym do wzkazówek zegara. Natomiast długości boków oznaczamy małymi literami*

$$a = |BC|, \quad b = |BC|, \quad c = |AB|$$

według zasady naprzeciw kątów $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ leżą boki a, b, c, jak niżej na rysunku.[1]



Trójkąt ΔABC

Jasne, że konstrukcja trójkąta $\triangle ABC$ jest możliwa, jeżeli długości boków a, b, c spełniają *nierówność trójkąta.*

Nierówność trójkąta. *Suma długości dwóch boków a, b, c danego trókąta $\triangle ABC$ jest większa od boku trzeciego.*

$$a + b > c, \quad lub \quad a + c > b, \quad lub \quad b + c > a.$$

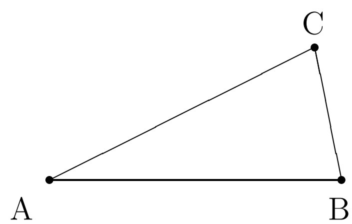
Przykład 0.1 *Narysuj trójkąt o danych wierzchołkach A, B, C.*

Na płaszczyżnie wybieram trzy różne punkty $A,\ B,\ C$ niewspółliniowe i łączymy te punkty używając linjki. [2]

[1] Kąty oznaczamy greckimi literami

[2] Punkty A, B, C są współliniowe, jeżeli leżą na jednej prostej.

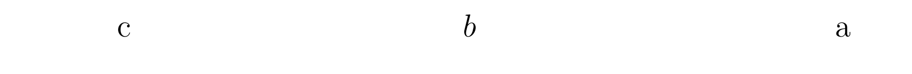
W ten sposòb narysowaliśmy trójkąt $\triangle ABC$ o wierzchołkach A, B, C i o bokach AB, BC AC.



Trójkąt ΔABC

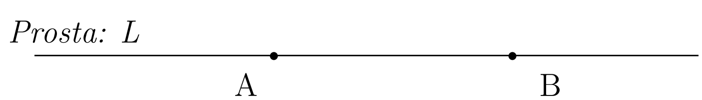
Przykład 0.2 *Narysuj trójkąt* $\triangle ABC$ *o danych bokach*

$$|AB| = c, \qquad |BC| = a, \qquad |BC| = b$$

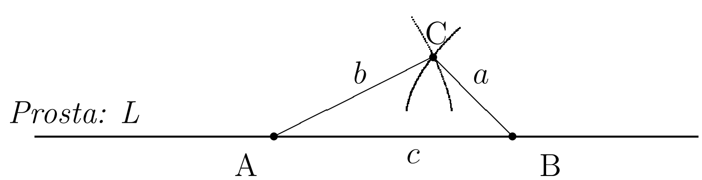


Konstrukcja 1. Na prostej L odkładamy cyrklem odcinek AB o długości

$$c = |AB|$$

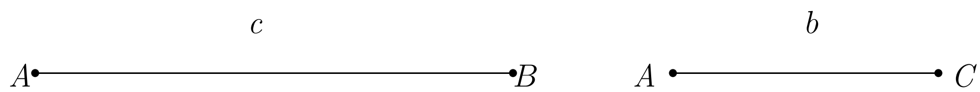


Następnie cyrklem od promieniu $R = b$ rysujemy łuk stawiając cyrkiel w punkcie A. Potem cyrklem o pomieniu $R = a$ rysujemy łuk stawiając cyrkel w punkcie B. Punkt C przecięcia łuków łączymy z punktem A i z punktem B. W ten sposòb narysowaliśmy trójkąt $\triangle ABC$

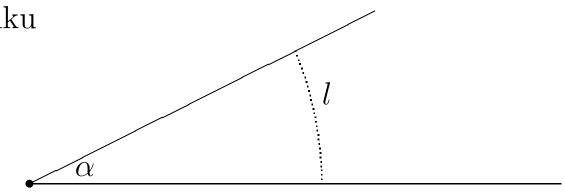


o danych bokach a, b, c używając tylko cyrkla i linijki bez jednostek miary.

Przykład 0.3 *Narysuj trójkąt $\triangle ABC$ o danych długościach boków*
$|AB| = c,$ $|AC| = b$

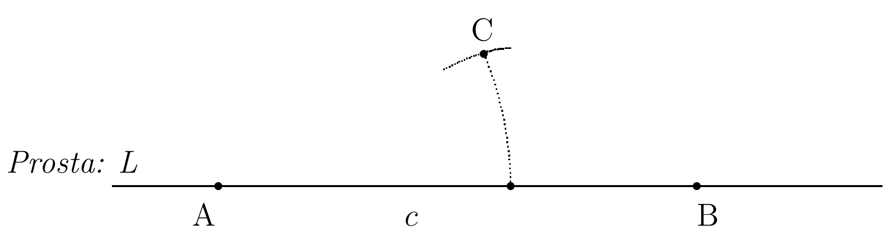


i danym kształcie kąta α pomiędzy bokami AB i AC, nie wyrażonym w stopniach lub radianach, używając cyrkla i linijki bez jednostek miary, jak niżej na rysunku

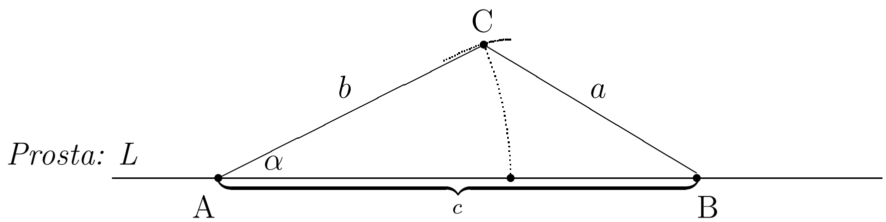


Dane: kąt α, boki $b = |AC|$, $c = |AB|$.

Konstrukcja 2. Na prostej L odkładamy cyrklem bok o długości $c = |AB|$ zaznaczając początek w punkcie A. Następnie przenosimy kąt α oparty na łuku l stawiając cyrkiel w wierzchołku kąta α i tą samą rozwarością cyrkla przenosimy łuk l na prostą L stawiając cyrkiel w punkcie A.
Teraz przenosimy długość łuku l na prostą L stawiając cyrkiel punkcie przecią łuku l z dolnym ramieniem kąta α i ustalamy rozwartość cyrkla na długości łuku l. Potem tą rozwartością cyrkla tworzymy łuk przecinając łuk poprzednio zaznaczony. Dalej przez wierzchołek A i punkt przecięcia łuków prowadzimy prostą P, Na przecięciu łuków leży wierzchołek C trójkąta $\triangle ABC$, jak niżej na rysunku.

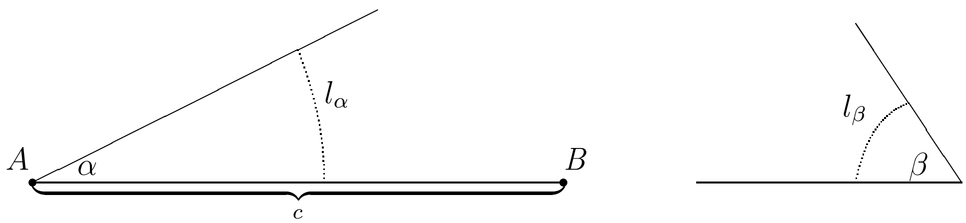


Łącząc punkty A, B, C odcinkami, otrzymamy konstruowany trójkąt ABC.



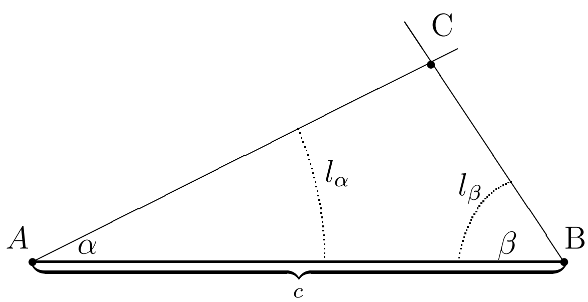
Przykład 0.4 *Narysuj trójkąt $\triangle ABC$ o danym boku o długości $c = |AB|$ i*

danych dwóch kąch α, β przyległych do boku AB przy pomocy cyrkla i linijki bez jednostek miary.



Dane: kąt α, kąt β i bok $c = |AB|$.

Konstrukcja 3.
Żeby zbudować trójkąt $\triangle ABC$ z danego boku AB i danych dwóch kątów α, β przyległych do boku AB wystarczy przenieść dolne ramie i kąta β na dolne ramie kąt α i wierzchołek B kątaβ na koniec B odcinka AB.
W tym celu stawiamy cyrkel w wierzchołku kąta β i ustawiemy rozwartość cyrkla na łuku l_β. Następne zakreślamy łuk l_β na kącie α stawiając cyrkiel w końcu B boku AB. Przecięcie górnych ramion kątów α, β jest wierzchołkiem C konstruowanego trójkąta $\triangle ABC$, jak niżej na rysunku



Dane: kąt α, kąt β i bok $c = |AB|$.

0.2 Trójkąty przystające

Konstrukcja trójkątów przy pomocy cyrkla i linijki oparta jest na trzech cechach przystawania trójkątów.
Ogólnie, dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają odpowiednie boki równe i odpowiednie kąty równe. Jasne, że na to żeby dwa trójkąty były przystające wystarczy, żeby miały równe boki, gdyż wtedy automatycznie wszystkie kąty muszą mieć równe. O tym mówi pierwsza cecha przystawania trójkątów.

Pierwsza checha przystawania trójkątów. *Dwa trójkąty są przystające, jeżeli odpowiednie boki pierszego trójkąta są równe odpowiednim bokom drugiego trójkąta.*
Zauważmy, że konstrukcja 1 trójkąta została wykonana na podstawie pierszej

cechy przystawania tròjkąòw.

Druga cecha przystawania tròjkątòw. *Dwa tròjkąty są przystające, jeżeli mają odpowiednie dwa boki ròwne i odpowiednie kąty pomiędzy tymi bokami ròwne.*
Zauważmy, że konstrukcja 2 tròkąta została wykonana na podstawie drugiej cechy przystawania tròjkątòw.

Trzecia cecha przystawania tròjkątòw. Dwa tròjkąty są przystające, jeżeli mają odpowiedni jeden bok ròwny i odpowiednie dwa kąty przyległe do tych bokòw ròwne.

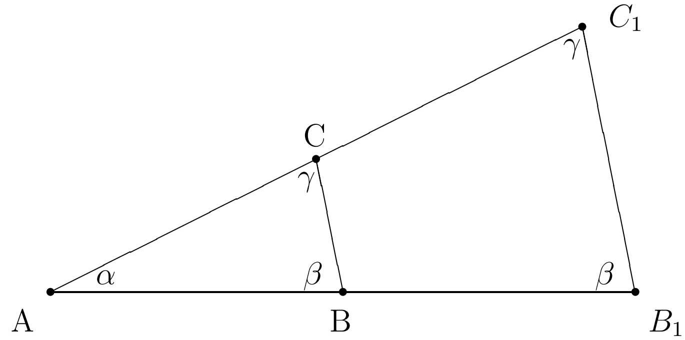
Zauważmy, że konstrukcja 3 tròkąta została wykonana na podstawie trzeciej cechy przystawania tròjkąòw.

0.3 Konstrukcja tròjkątòw podobnych

Proporcje w tròjkątach podobnych zostały opisane w temacie 25, Twierdzenie Talesa. Niżej podamy przykład konstrukcji tròjkątòw podobnych przy pomocy cyrkla i linijki.

Przykład 0.5 *Narysuj tròjkąt o wierzchołkach A, B, C. Narysuj drugi tròjkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy dłuższych używając linijki i cyrkla.*

Na przedłużonych bokach tròjkąta $\triangle ABC$ odkładamy dwa odcinki ròwne długości bokòw AB i AC. Łączymy zaznaczone końce odcinkòw.
Widzimy, że w ten sposòb narysowaliśmy dwa tròjkąty podobne



Tròjkąty podobne $\Delta ABC \approx AB_1C_1$

0.4 Cechy podobieństwa trójkątów

Cechy podobieństwa trójkątów są rozszerzoną formą cech przystawania trójkątów.

Pierwsza cecha podobieństwa trójkątów. *Dwa trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ są podobne w skali k, jeżeli odpowiednie boki pierszego trójkąta są proporcjonalne w skali k do odpowiednich boków drugiego trójkąta.*
Piszemy

$$\triangle ABC \approx \triangle A_1B_1C_1,$$

jeżeli dla ustalonej wartości współczynnika proporcji k długości boków tych trójkątów spełniają proporcje

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = k.$$

lub

$$\frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{a}{a_1} = k.$$

gdzie

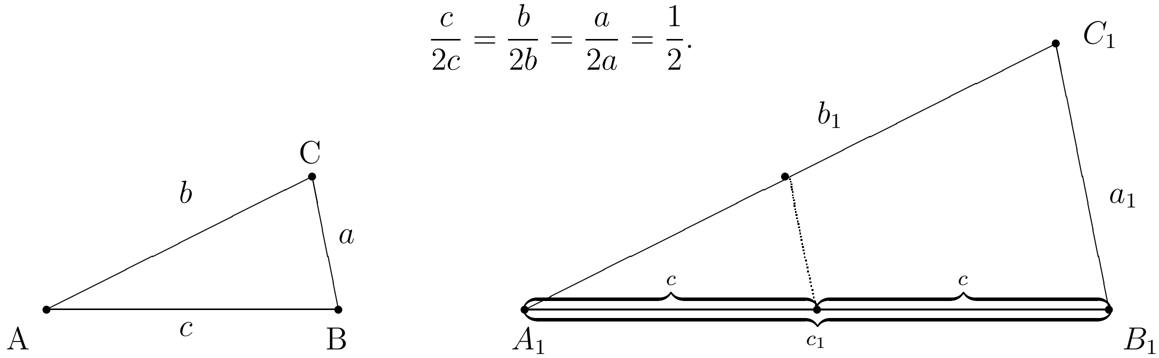
$$c = |AB|, \qquad b = |AC|, \qquad a = |BC|,$$

$$c_1 = |A_1B_1|, \quad b_1 = |A_1C_1|, \quad a = |B_1C_1|.$$

Na przykład, niżej na rysunku trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ są podobne

w skali $1:2$.
Mianowicie dla $c_1 = 2c,\ b_1 = 2b,\ a_1 = 2a$ skala $k = \dfrac{1}{2}$ i proporcja boków

$$\frac{c}{2c} = \frac{b}{2b} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$



Trójkąty podobne $\Delta ABC \approx A_1B_1C_1$

Druga cecha podobieństwa trójkątów. *Dwa trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ są podobne w skali k, jeżeli mają jeden kąt równy i dwa boki leżące na ramionach tego kąta proporcjonalne.*
Piszemy

$$\triangle ABC \approx \triangle A_1B_1C_1,$$

jeżeli $\angle\alpha = \angle\alpha_1$ i długości boków

$$c = |AB|,\ b = |AC| \quad i \quad c_1 = |A_1B_1|,\ b_1 = |A_1C_1|$$

spełniają proporcję

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = k.$$

lub

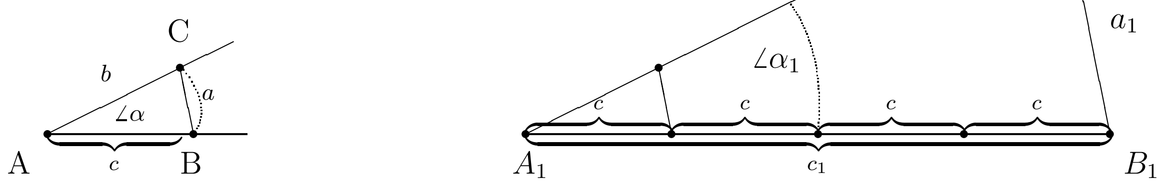
$$\frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1} = k.$$

Na przykład, niżej na rysunku trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ są podobne

w skali 1 : 4.

Mianowicie dla $c_1 = 4c,\ b_1 = 4b,\ a_1 = 4a$ skala $k = \dfrac{1}{4}$ i proporcja boków

$$\frac{c}{4c} = \frac{b}{4b} = \frac{1}{4}.$$



Trójkąty podobne $\Delta ABC \approx A_1B_1C_1$

Trzecia cecha podobieństwa trójkątów. *Dwa trójkąty* $\triangle ABC$ *i* $\triangle A_1B_1C_1$ *są podobne, jeżeli mają dwa kąty równe .*[3]

Piszemy

$$\triangle ABC \approx \triangle A_1B_1C_1.$$

Jeżeli $\angle\alpha = \angle\alpha_1$ i $\angle\beta = \angle\beta_1$, to boki trójkątów zachowują proporcje w skali k

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = k.$$

lub

$$\frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{a}{a_1} = k.$$

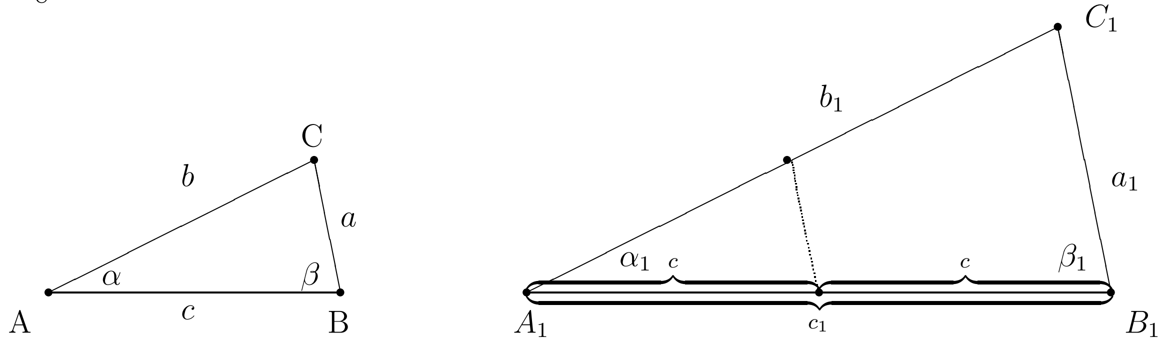
Na przykład, niżej na rysunku trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ są podobne

w skali 1 : 2.

Mianowicie dla $c_1 = 2c,\ b_1 = 2b,\ a_1 = 2a$, skala $k = \dfrac{1}{2}$ i proporcja boków

$$\frac{c}{2c} = \frac{b}{2b} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

[3] Jeżeli dowolne trójkąty mają dwa kąty równe to mają wszystkie trzy kąty równe

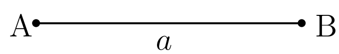


Trójkąty podobne $\Delta ABC \approx A_1B_1C_1$

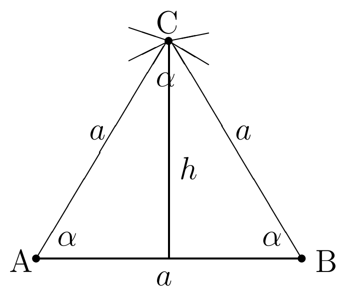
0.5 Trókąt równoboczny

Konstrukcja trójkąta równobocznego. Rysujemy odcinek AB o ustalonej długości boków trójkąta $a = |AB|$.

Dany bok AB o długości $a = |AB|$



Stawiamy nóżkę cyrkla na początku odcinka w punkcie A i zakreślamy okrąg o promieniu równym długości odcinka $R = a$. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla na drugim końcu odcinka w punkcie B i tym samym promieniem $R = a$ zakreślamy okrąg. Łączymy punkt przecięcia okręgów C z końcami odcinka AB. Widzmy, że w ten spoòb powstał trójkąt $\triangle ABC$ o równych bokach a i równych kątach $\alpha = 60^0$..



Trójkąt równoboczny ΔABC

Pole trójkąta

$$S = \frac{a * h}{2},$$

obwód trójkąta

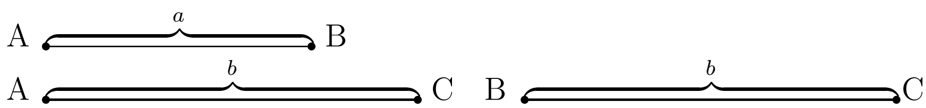
$$P = a + a + a = 3 * a$$

Zadanie 0.1 *Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy dłuższych używając linijki i cyrkla. Zmierz kąty tego trójkąta. Oblicz sumę kątów tego trójkąta*

0.6 Trójkąt równoramienny

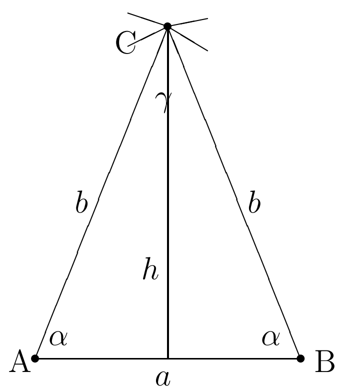
Trójkąt równoramienny $\Delta\ ABC$ ma dwa boki boki równe i dwa kąty przy podstawie też równe.

Dany bok AB o długości $a = |AB|$



Dany bok AC o długości $b = |AC|$ *Dany bok BC o długości $b = |BC|$*

Konstrukcja trójkąta równobocznego. Rysujemy podstawę trójkąta AB o danej długości $a = |AB|$. Stawiamy nóżkę cyrkla na początku podstawy w punkcie A i zakreślamy okrąg o promieniu $R = b$ równym długości boku AC. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla na drugim końcu podstway w punkcie B i tym samym promieniem $R = b$ zakreślamy okrąg. Łączymy punkt przecięcia okręgów z końcami odcinka. Widzmy, że w ten spoób powstał trójkąt o róworamienny.



Pole trójkąta

$$S = \frac{a * h}{2},$$

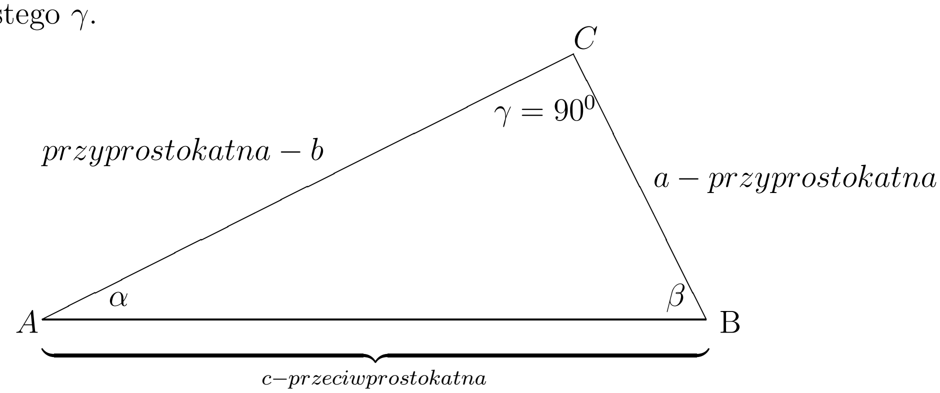
obwód trójkąta

$$P = a + 2 * b.$$

Zadanie 0.2 *Zmierz boki i kąty tego trójkąta. Oblicz obwód i pole trójkąta, oblicz sumę kątów tego trójkąta*

0.7 Trójkąt prostokątny

W trójkącie prostokątnym jeden z kątów jest kątem prostym, w stopniach równym 90^0, w radianach równym $\frac{\pi}{2}$ radianów. Ramionami kąta prostego są dwie przyprostokątne AC i BC. Natomiast prciwprostokątna AB leży na przeciw kąta prostego γ.



Suma kątów w trójkącie prostokątnym $\angle\alpha + \angle\beta = 90^0$

0.8 Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Związki miarowe w trójkącie prostokątnym opisane zostały temacie "Twierdzenie Pitagorasa. Trójki pitagorejskie". Niżej podajemy niektóre własności trójkątów prostokątnych

Twierdzenie Pitagorasa 0.1 *W trókącie prostokątnym suma kwadratów przyprostokątnych równa jest kwadratowi przeciwprostokątnej*

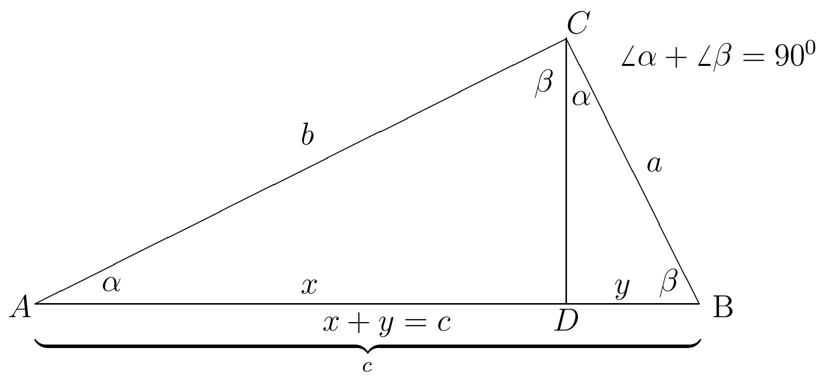
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Tutaj przez a i b oznaczone są długości przyprostokątnych, literą c oznaczona jest długość przeciwprostokątnej, (zobacz niżej rysunek.)

Dowód twierdzenia Pitagorasa.

Zauważmy, że odpowiednie trzy kąty $\alpha, \beta, 90^0$ trójkątów $\triangle\ ABC$ i $\triangle\ DBC$, zaznaczone na rysunku, są równe. Dlatego na podstawie 3-ej cechy podobieństwa trójkątów, [4] te trójkąty podobne.

[4] *Trzecia cecha podobieństwa trójkątów: wszyskie trzy kąty są równe.*



Zatem boki trójkątów $\triangle\ ABC$ i $\triangle\ DBC$ są proporcjonalne. To znaczy, że na przeciw równych kątów leżą proporcjonalne boki:

$$\frac{a}{y} = \frac{c}{a}, \quad i \quad \frac{b}{x} = \frac{c}{b},$$

Skąd obliczamy

$$a^2 = y * c, \qquad b^2 = x * c$$

oraz sumę stron powyższych równości

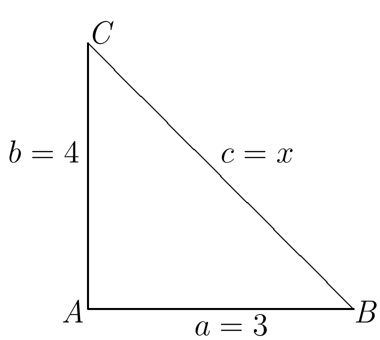
$$a^2 + b^2 = (x + y) * c.$$

Ponieważ $x + y = c$ to w trójkącie prostokątnym $\triangle\ ABC$ suma kwadratów przyprostokątnych $a,\ b$ równa jest kwadratowi przeciwprostokątnej c, piszemy

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Koniec dowodu.

Przykład 0.1 *Oblicz przeciwprostkątną x trójkąta prostokątnego o danych przyprostokątnych $a = 3$ i $b = 4$.*



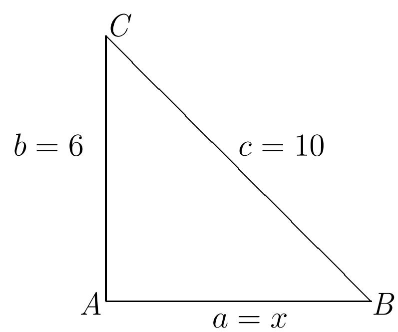
Trójkąt prostokątny ΔABC

Stosując twierdzenie Pitagorasa, dla danych $a = 3,\ b = 4$, obliczamy przeciwprostkątnej $c = x$

$$x^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$x = \sqrt{25} = 5.$$

Przykład 0.2 *Oblicz przyprostkątną x trójkąta prostokątnego*



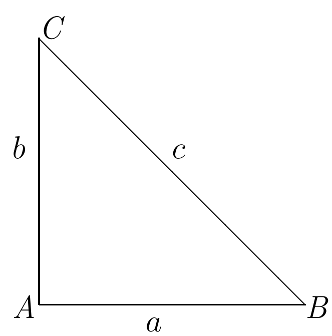
Trójkąt prostokątny ΔABC

Z twierdzenia Pitagorasa dla danych $b = 6,\ c = 10$ *obliczamy przyprostkątną* $a = x$

$$x^2 = c^2 - b^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64, \qquad x = \sqrt{64} = 8.$$

Odpowiedź: przyprostokątna $a = 8$.

Przykład 0.3 *Sprawdź, że trójkąt o boku* $a = 12cm$, *boku* b *dłuższym o* $4cm$ *od boku* a *i o boku* c *dłuższym o* $8cm$ *od boku* a *jest prostokątny.*



Obliczamy boki trójkąta

$$a = 12, \qquad b = 12 + 4 = 16, \qquad c = 12 + 8 = 20.$$

Trójkąt $\triangle ABC$ jest prostokątny, jeżeli jego boki speniają tezę twierdzenia Pitagorasa

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Istotne dla boków $a = 12,\ b = 16,\ \ c = 20$, sprawdzamy, że

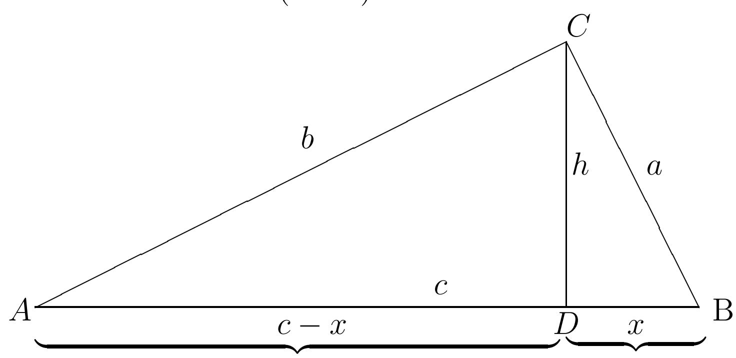
$$12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$$

Zatem trójkąt $\triangle ABC$ jest prostokątny.

0.9 Średnia geometryczna

Proporcje Talesa były znane w Szkole Pitagorejskiej w tym związek wysokości $h = |CD|$ poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną c jako średnia geometryczna pomiędzy rzutami $|AD| = c - x$ i $|DB| = x$ przyprostokątnych $a,\ b$ na przeciprostokątną

$$h^2 = x(c - x).$$



Istotnie, z podobieństwa trójkątów $\triangle ADC \approx \triangle DBC$ wynika proporcja

$$\frac{h}{c - x} = \frac{x}{h}.$$

Skąd wysokość

$$h^2 = x(c - x), \qquad h = \sqrt{x(c - x)}$$

jest średnią geometryczną rzutów $c - x,\ \ x$ przyprostokątnych a, b na przeciwprostokątną c.

Przykład 0.6 *Oblicz rzuty a_c i b_c przyprostokątnych $a,\ b$ na przeciwprostokątną c i wysokość h trójkąta prostokątnego poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną, jeżeli przyprostokątne $a = 3$ i $b = 4$.*

Rozwiązanie.
Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy przeciwprostokątną

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25,$$

$$c = \sqrt{25} = 5$$

oraz rzuty $a_c = x,\ \ b_c = x(c - x)$ i wysokość $h = x(c - x)$.
Mianowicie, z trójkątów $\triangle ADC$ i $\triangle DBC$ mamy związki pomiedzy rzutami a_c, b_c i wysokością h

$$\begin{aligned}
h^2 = b^2 - (c - x)^2, \qquad & i \quad h^2 = a^2 - x^2 \\
zatem\ mamy\ rownanie & \\
b^2 - (c^2 - 2 * x + x^2) \quad &= \quad a^2 - x^2, \\
skad & \\
2 * x = a^2 - b^2 + c^2, & \\
x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} &
\end{aligned}$$

Podstawiając $a = 3,\ b = 4, c = 5$ obliczamy rzuty $a_c,\ b_c$

$$a_c = x = \frac{3^2 - 4^2 + 5^2}{2} = \frac{9}{2}$$
$$b_c = c - x = 5 - \frac{9}{5} = \frac{25 - 9}{5} = \frac{16}{5}.$$

Wysokśc h jest średnią geometryczną rzutów $a_c = \dfrac{9}{5}$ i $b_c = \dfrac{16}{5}$, zatem

$$h = \sqrt{a_c * b_c} = \sqrt{\frac{9}{5} * \frac{16}{5}} = \frac{3 * 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

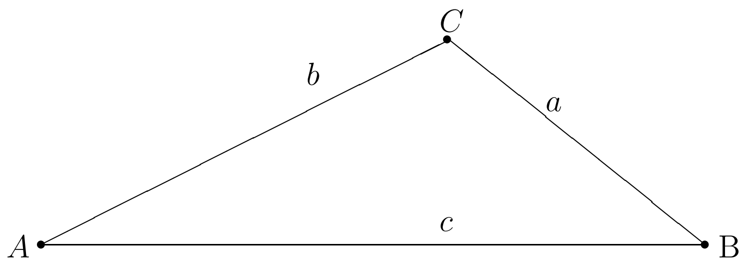
0.10 Trójkąt dowolny. Wzór Herona

Rozpatrzmy trójkąt $\triangle ABC$ o długości boków

$$c = |AB|, \quad b = |AC|, \quad a = |BC$$

spełniających nierówność trójkąta

$$a + b > c, \quad i \quad a + c > b, \quad i \quad b + c > a$$

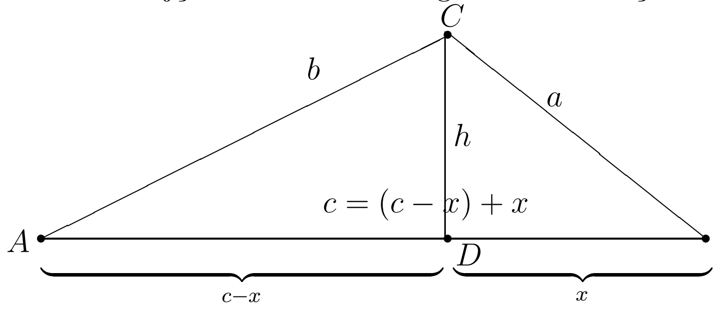


Wzór Herona. Heron z Aleksandrii grecki matematyk, fizyk i wynalazca podał wzór na pole dowolnego trójkąta.

$$S = p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Dowód.
W literaturze istnieje kilka dowodów wzoru Herona. Tutaj podamy dowód wzoru Herona stosując twierdzenie Pitagorasa do trókątów $\triangle ADC$, $\triangle BCD$

6



Mianowicie, stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów $\triangle ADC$, $\triangle BCD$ obliczamy kwadrat wysokości

$$h^2 = a^2 - x^2,$$

$$h^2 = b^2 - (c-x)^2.$$

Skąd obliczamy x

$$a^2 - x^2 = b^2 - (c-x)^2$$

$$a^2 - b^2 + c^2 = 2cx$$

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}.$$

Podstawiając do pierwszgo równania wartość x obliczamy kwadrat wysokości

$$\begin{aligned}
h^2 \quad &= a^2 - (\frac{a^2-b^2+c^2}{2c})^2 \\
&= \frac{4a^2c^2 - (a^2-b^2+c^2)^2}{4c^2} \\
&= \frac{[2ac - (a^2-b^2+c^2)][2ac + (a^2-b^2+c^2)]}{4c^2} \\
&= \frac{[b^2 - (a-c)^2][(a+c)^2 - b^2]}{4c^2} \\
&= \frac{[b-a+c)(b+a-c)][(a+c-b)(a+c+b)]}{4c^2} \\
&= \frac{[(b+a+c)-2a)(b+a+c)-2c][(a+c+b)-2b)(a+c+b)]}{4c^2} \\
\textit{dla obwodu} \quad & 2p = a+b+c \\
\textit{wysokosc } h^2 \quad &= \frac{(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)(2p)}{4c^2} \\
&= 4\frac{(p-a)(p-c)(p-b)p}{c^2}
\end{aligned}$$

Teraz obiczamy wysokość trójkąta $\triangle ABC$

$$h = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Pole S trójkąta $\triangle ABC$ równe jest połowie podastawy c razy wysokość h. Zatem mamy pole trójkąta o długości boków a, b, c

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Przykład 0.7 *Oblicz pole trójkąta $\triangle ABC$ o bokach $a = 6$ $b = 8$, $c = 10$ stosując wzór Herona*

Rozwiązanie.
Obliczamy obwód trojkąta

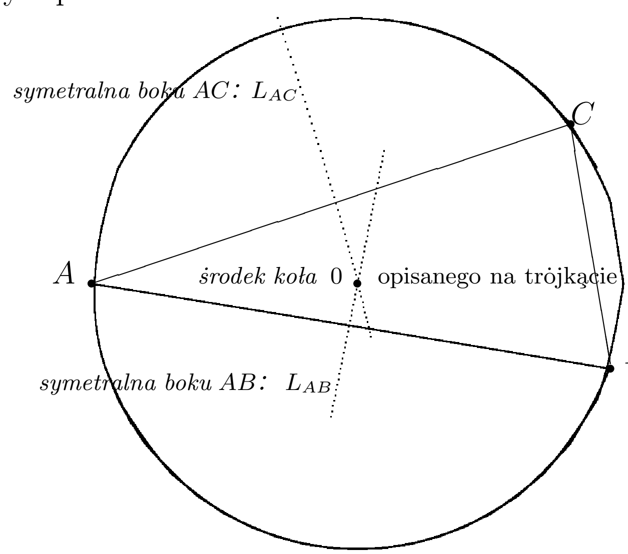
$$p = \frac{6+8+10}{2} = 12$$

Ze wzoru Herona obliczamy pole trȯjkąta

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)} \\ &= \sqrt{12(6)(4)(2)} \\ &= \sqrt{576} = 24. \end{aligned}$$

0.11 Okrąg opisany na trȯjkącie

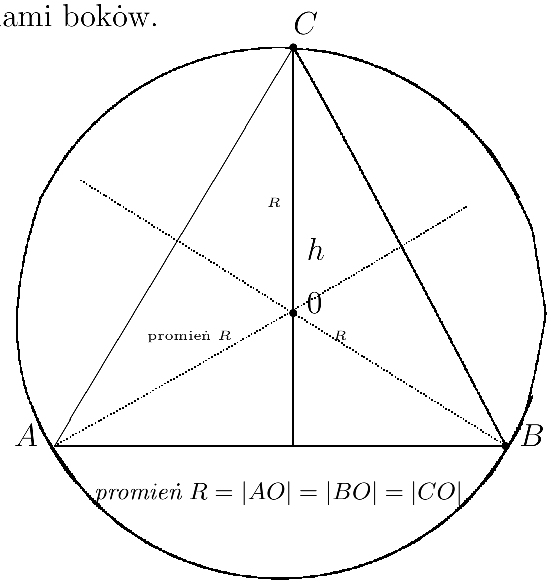
Środek okrągu opisanego na trȯjkąt leży na ptrzecieciu symetralnych bokȯw trȯjkąta. Najpierw, zauważmy, że symetralne bokȯw trȯjkąta przecinają się w jednym punkcie.



Okrąg opisany na trȯjkącie rȯwnobocznym.
Rozpatrzmy trȯjkącie rȯwnobocznym $\triangle ABC$ o długości boku a wpisany w okrąg. Zauważmy wtedy, że symetralne bokȯw trȯjkąta, dwusieczne kątȯw i wysokości trȯjkąta rȯwnobocznego przecinają się w środku okręgȯw wpisanego i opisanego na tym trȯjkącie. Wiemy, że wysokości trȯjkąta rȯwnobocznego spȯszczone na jego boki są rȯwne

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Natomiast dwusieczne kątȯw rȯwnych 60^0 lub $\dfrac{\pi}{3}$ radianȯw pokrywają się z wysokościami boków.



Przykład 0.8 *Oblicz promień R okręgu opisanego na trójkącie równobocznym mając dany bok $a = 3$*

Sprawdzamy, że promień równy jest dwie trzecie wysokoći h, piszemy

$$R = \frac{2}{3}h.$$

Wiemy, że wysokość

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

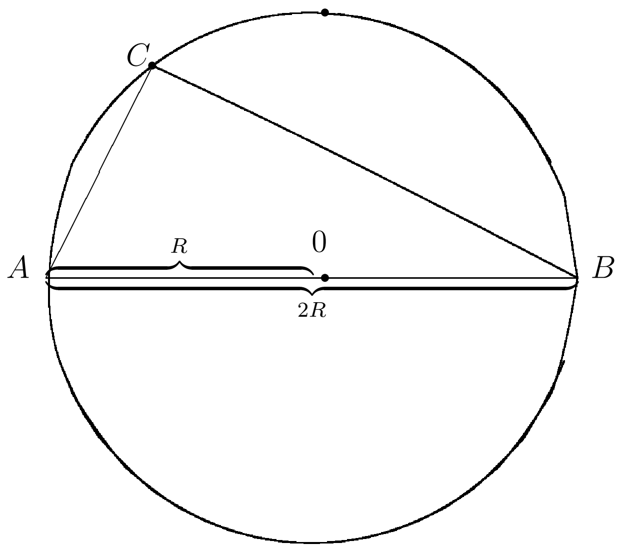
Zatem promiemień

$$R = \frac{2}{3} * \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Skąd dla $a = 3$ obliczamy promień

$$R = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

Okrąg opisany na trójkącie prostokątnym. Z twierdzenia o kącie środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany wynika że kąt prosty równy jest połowie kąta środkowego opartego na łuku równym π. Zatem kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest równy $\frac{\pi}{2}$. Więcej, każdy trójkąt wpisany w okrąg oparty na średnicy okręgu jest trójkątem prostym.



Przykład 0.9 *Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, jeżeli wiadomo, że przyprostkątne* $a = 3$ *i* $b = 4$.

Rozwiązanie.
Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że kwadrat przciwprostokątnej równe jest sumie kwadratów przyprostokątnych

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

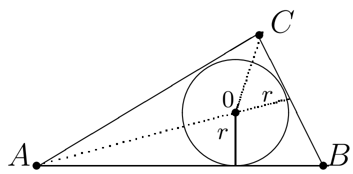
Skąd dla $a = 3,\ b = 4$ obliczamy

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$$

Zatem przeciwprostokątna $c = \sqrt{25} = 5$.
Ponieważ przeciwprostokątna jest średnią okręgu równą $2R = 5$ to promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym równy jest $R = \dfrac{5}{2} = 2.5$.

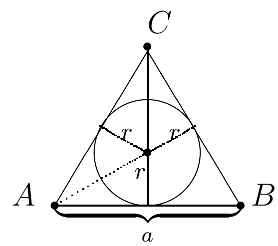
0.12 Okąg wpisany w trójkąt

Środek okręgu wpisanego w dowolny trójkąt leży na przecięciu dwusiecznych kątów trojkąta. Dwussieczne trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Okrąg wpisany w trójkąt jest styczny do boków trójkąta. Promień r okręgu wpisanego w trójkąt jest prostopadły do boków trójkąta.

Okąg wpisany w trójkąt równoboczny. Rozpatrzmy szczególny przypadek, gdy w trójkąt równoboczny o długości boków $a = |AB| = |BC| = |AC|$ jest wpisany okrąg promieniu r.



Przykład 0.10 *Oblicz bok a trójkąta równobocznego, jeżeli wiadomo, że promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny równy jest $r = 4$.*

Rozwiązanie.

W tym przypadku szczególnym środek okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie równoramiennym pokrywają się. Zatem promień równy jest dwie trzecie wysokoći h, piszemy

$$r = \frac{2}{3}h.$$

Wiemy, że wysokość

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Skąd promiemień

$$r = \frac{2}{3} * \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad a\sqrt{3} = 3r, \qquad a = \frac{3r}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3}.$$

Dla $r = 4$ bok trójkąta równobocznego $a = 4\sqrt{3}$.

0.13 Styczna do okręgu

Możliwe są trzy następujące przypadki położenia prostej względem okręgu

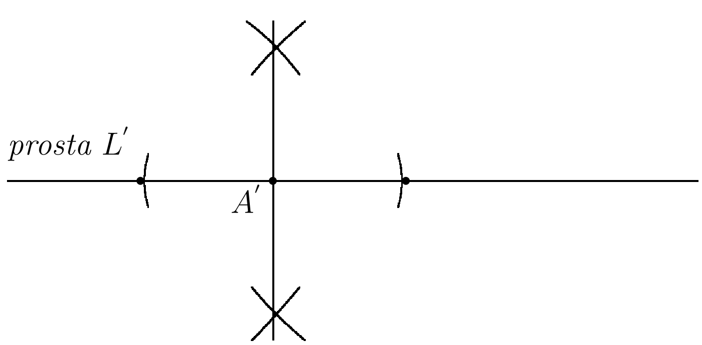
1. prosta L jest styczna do okręgu. Wtedy prosta L ma jeden punkt P wspólny z okręgiem,

2. prosta L przcina okrąg w dwóch punktach. Wtedy prosta L tworzy odcinek siecznej okręgu o końcach przecięcia,

3. prosta L nie ma punktów wspólnych z okręgiem.

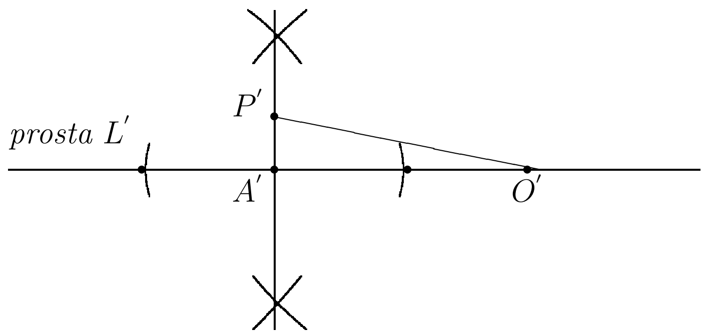
Konstrukcja stycznej do okręgu. Mając okrąg o promieniu r i środku w punkcie O oraz punkt A na zewnątrz okręgu możemy skonstruować prostą styczną do okręgu przy pomocy cyrkla i linijki.
Dane: Promień r, środek okręgu punkt O i punkt A leżący na zewnątrz okręgu

Najpierw zauważmy, że prosta styczna do okręgu jest prostopadła do promienia okręgu r łączącego środek O okręgu z punktem styczności P, który należy wyznaczyć.
Zacznikmy konstrukcję od narysowania kąta prostego. Na prostej $L^{'}$ obieramy dowolny punkt $A^{'}$. Rysujemy prostą $L^{'}$. Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie $A^{'}$ i dowolną rozwartością cyrkla zakreślamy dwa łuki przecinające prostą $L^{'}$. Dalej, stawiamy cyrkiel w pierwszym punkcie przecięcia i zakreślamy dwa łuki nad i pod prostą $L^{'}$. Podonie stawiamy cyrkiel w drugim punkcie i zakreślamy tą samą rozwartością cyrkla dwa łuki przecinające łu ki, wcześniej zaznaczone nad i pod prostą $L^{'}$. Łączymy te dwa punkty przecinające się nad i pod prostą $L^{'}$. W ten sposób narysowaliśmy odcinek prostopadły do prostej $L^{'}$ w punkcie $A^{'}$, jak niżej na rysunku

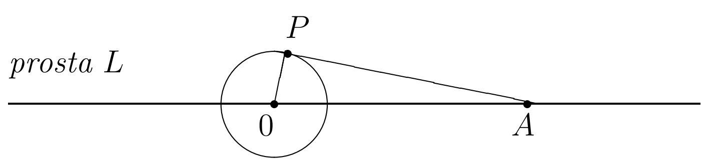


Teraz cyrkiel stawiamy w punkcie $A^{'}$ i rozwartością równą promieniowi r zaznaczamy na odcinku prostopadłym do prostej $L^{'}$ punkt $P^{'}$. Następnie cyrkiel stawiamy w punkcie $P^{'}$ i rozwartością cyrkla równą długości odcinka AO

zakreślamy łuk przcinający prostą $L^{'}$ i łączymy te punkty. W ten sposób narysowaliśm trójkąt $\triangle A^{'}O^{'}P^{'}$ prostokątny, którego przyprostokątnymi są odcinkami $A^{'}O^{'}$ i $A^{'}P^{'}$



Trójkąt prostokątny $\triangle A^{'}O^{'}P^{'}$ jest przystający do szukanego trójkąta prostokątnego $\triangle AOP$, którego długość przyprostkątnej $A^{'}O^{'}$ jest równa długości stycznej AP. Zatem stawiając cyrkiel w punkcie A rozwartością równą długości przyprostokątnej $A^{'}O^{'}$ zaznaczamy punkt styczności P na okręgu o promieniu r i środku w punkcie O.

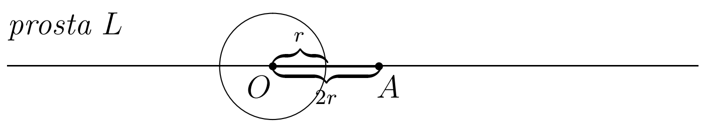


Przykład 0.11 *Podaj konstrukcję stycznej do okręgu o promieniu* r *poprowadzonej z punktu* A, *który leży poza okręgiem w odległości* $2r$ *od środka okręu* 0, *przy pomocy cyrkla i linijki bez skali.*

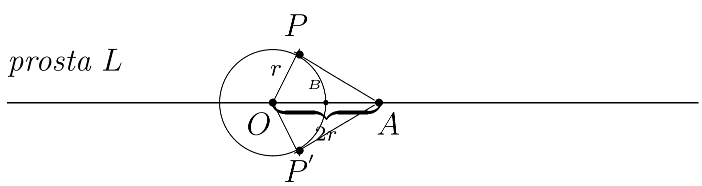
Rozwiązanie.
Konstrukcja stycznej do okręgu poprowadzonej z danego punktu A polega na określeniu położenia wierzchołka kąta prostego, to znaczy punktu P trójkąta $\triangle APO$ na okręgu.

W tym przykładzie konstrukcji stycznej korzystamy z istotniej informacji o złotym trójkącie w którym przeciwprostokątna jest dwa razy dłuższa od jednej z przyprostokątnych. Mianowicie, tutaj styczna do okręgu tworzy złoty prójkąt $\triangle OAP$ w którym przeciwprostokątna $|OA| = 2r$ jest dwa razy dłuższa od przyprostokątnej $|OP| = r$. Ponadto w złotym trójkącie kąty przy przyprostokątnej $\angle POA = 60^0$ lub w mierze łukowej $\angle POA = \dfrac{\pi}{3}$.

Dane: Okrąg o promieniu r i środku w punkciece O oraz punkt A położony poza trójkątem $\triangle APO$.



Zatem, należy określić położenie punktu P wierzchołka kąta prostego punktu P trójkąta $\triangle AOP$ na danym okręgu. W tym celu stawiamy cyrkiel w punkcie B przecięcia okręgu z odcinkiem OA i zakreślamy łuk przecinający okrąg w szukanym punkcie P. Zauważmy, że są dwa położenia punktu styczności P nad prostą L i pod prostą L. to znaczy, że w konstrukcji stycznej do okręgu są dwie styczne spełniające warunki zadania.



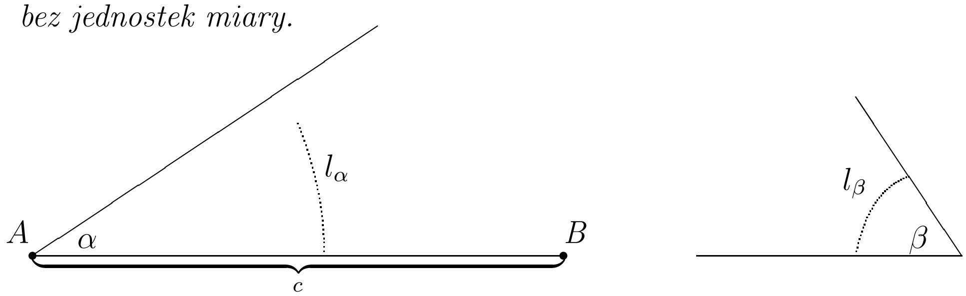
0.14 Zadania

Zadanie 0.3 *Narysuj trójkąt $\triangle ABC$ o danych bokach*

$$|AB| = c, \qquad |BC| = a, \qquad |BC| = b$$

c b a

Zadanie 0.4 *Narysuj trójkąt $\triangle ABC$ o danym boku o długości $c = |AB|$ i danych dwóch kąch α, β przyległych do boku AB przy pomocy cyrkla i linijki bez jednostek miary.*



Dane: kąt α, kąt β i bok $c = |AB|$.

Zadanie 0.5 *Narysuj trójkąt o wierzchołkach A, B, C. Narysuj drugi trójkąt o tych samych kątach i o bokach trzy razy dłuższych używając linijki i cyrkla.*

Zadanie 0.6 *Oblicz rzuty a_c i b_c przyprostokątnych a, b na przeciwprostokątną c i wysokość h trójkąta prostokątnego poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną, jeżeli przyprostokątne $a = 6$ i $b = 8$.*

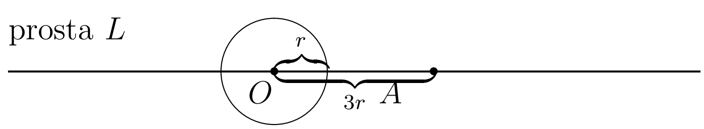
Zadanie 0.7 *Oblicz pole trójkąta $\triangle ABC$ o bokach $a = 12$ $b = 16$, $c = 20$ stosując wzór Herona*

Zadanie 0.8 *Oblicz promień R okręgu opisanego na trójkącie równobocznym mając dany bok $a = 5$*

Zadanie 0.9 *Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, jeżeli wiadomo, że przyprostkątne $a = 6$ i $b = 8$.*

Zadanie 0.10 *Oblicz bok a trójkąta równobocznego, jeżeli wiadomo, że promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny równy jest $r = 2$.*

Zadanie 0.11 *Podaj konstrukcję stycznej do okręgu o promieniu r poprowadzonej z punktu A, który leży poza okręgiem w odległości $3r$ od środka okręu 0, przy pomocy cyrkla i linijki bez skali.*
Dane: Okrąg o promieniu r i środku w punkciece O oraz punkt A położony poza trójkątem $\triangle APO$.



Prof. dr Tadeusz STYŚ Warszawa, 25-ty styczeń, 2019