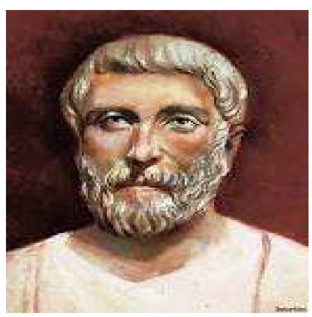
Twierdzenie Pitagorasa. Trȯjki pitagorejskie.

Pitagoras z Samos (572-497 B.C.) założył sławną Szkołę Pitagorejską Filozofii i Matematyki, ktȯra podobnie jak Szkoła Jońska Talesa wywarła duży wpływ na rozwȯj nauk ścisłych.
Z ȯwczesnego okresu czasu i zapisȯw historycznych można wnioskować, że Pitagoras był uczniem słynnego Talesa, stąd też znał nauki o przyrodzie z Jońskiej Szkoły filozofii.
Pitagoras zasłynął z znanego *Twierdzenia Pitagorasa*, ktȯrego dowodu w istocie nie podał. Zdumiewiające, że trȯjki liczb pitagorajskich były znane w Babilonie około 1000 lat przed Pitagorasem.
W filozofii, poprzez propagowanie instytucji rodziny i umiarkowania w pożądliwościach, stał w przeciwieństwie do wielu innych antycznych filozofȯw, ktȯrzy akceptowali rozwięzłe życie. Pitagoras nauczał i wyznawał zasadę

"*Nic w nadmiarze*".

Według Pitagorasa śpiew i muzyka to nalepsze forma ukojenia i wesela nieśmiertelnych dusz. Wyznawał przekonanie, że Muzyka budzi w sercu pragnienie dobrych czynȯw. Pitagorasowi zawdzięczamy skale muzyczne.



Ze źrȯdeł historycznych wiemy, że Pitagoras żył około 80 lat. Żoną Pitagorasa była Teano, rȯwnież grecki filozof, astronom i matematyk. To właśnie jej zawdzięczamy dziś książkę zatytułowaną "*Życie Pitagorasa*".

0.1 Związki miarowe w trȯjkącie prostokątnym

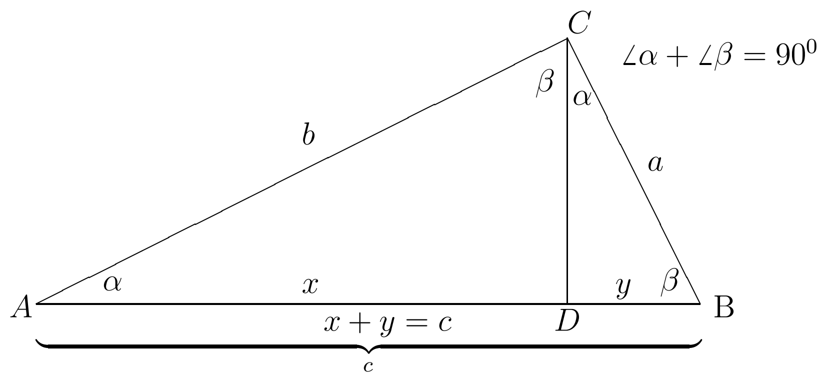
Twierdzenie Pitagorasa 0.1 *W trȯkącie prostokątnym suma kwadratȯw przyprostokątnych rȯwna jest kwadratowi przeciwprostokątnej*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Tutaj przez a i b oznaczone są przyprostokątne, literą c oznaczona jest przeciwprostokątna, (zobacz niżej rysunek.)

Dowód twierdzenia Pitagorasa.

Zauważmy, że odpowiednie trzy kąty $\alpha, \beta, 90^0$ trójkątów $\triangle\ ABC$ i $\triangle\ DBC$, zaznaczone na rysunku, są równe. Dlatego na podstawie 3-ej cechy podobieństwa trójkątów, [1] te trójkąty podobne.



Zatem boki trójkątów $\triangle\ ABC$ i $\triangle\ DBC$ są proporcjonalne. To znaczy, że na przeciw równych kątów leżą proporcjonalne boki:

$$\frac{a}{y} = \frac{c}{a}, \quad i \quad \frac{b}{x} = \frac{c}{b},$$

Skąd obliczamy

$$a^2 = y * c, \qquad b^2 = x * c$$

oraz sumę stron powyższych równości

$$a^2 + b^2 = (x + y) * c.$$

Ponieważ $x + y = c$ to w trójkącie prostokątnym $\triangle\ ABC$ suma kwadratów przyprostokątnych $a,\ b$ równa jest kwadratowi przeciwprostokątnej c, piszemy

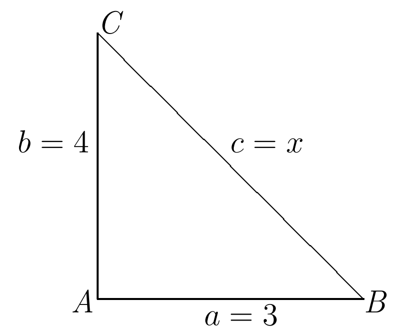
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Koniec dowodu.

Przykład 0.1 *Oblicz przeciwprostkątną x trójkąta prostokątnego o danych przypros-*

[1] *Trzecia cecha podobieństwa trójkątów: wszyskie trzy kąty są równe.*

tokątnych $a = 3$ *i* $b = 4$.



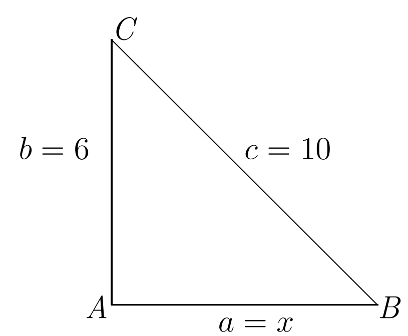
Trójkąt prostokątny ΔABC

Stosując twierdzenie Pitagorasa, dla danych $a = 3,\ b = 4$, obliczamy przeciwprostkątnej $c = x$

$$x^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$x = \sqrt{25} = 5.$$

Przykład 0.2 *Oblicz przyprostkątną* x *trójkąta prostokątnego*



Trójkąt prostokątny ΔABC

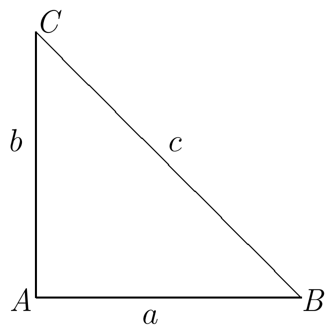
Z twierdzenia Pitagorasa dla danych $b = 6,\ c = 10$ *obliczamy przyprostkątną* $a = x$

$$x^2 = c^2 - b^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64, \qquad x = \sqrt{64} = 8.$$

Odpowiedź: przyprostokątna $a = 8$.

Przykład 0.3 *Sprawdź, że trójkąt o boku* $a = 12cm$*, boku* b *dłuższym o* $4cm$

od boku a i o boku c dłuższym o 8cm od boku a jest prostokątny.



Obliczamy boki trójkąta

$$a = 12, \qquad b = 12 + 4 = 16, \qquad c = 12 + 8 = 20.$$

Trójkąt $\triangle ABC$ jest prostokątny, jeżeli jego boki speniają tezę twierdzenia Pitagorasa

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Istotne dla boków $a = 12,\ b = 16,\ \ c = 20$, sprawdzamy, że

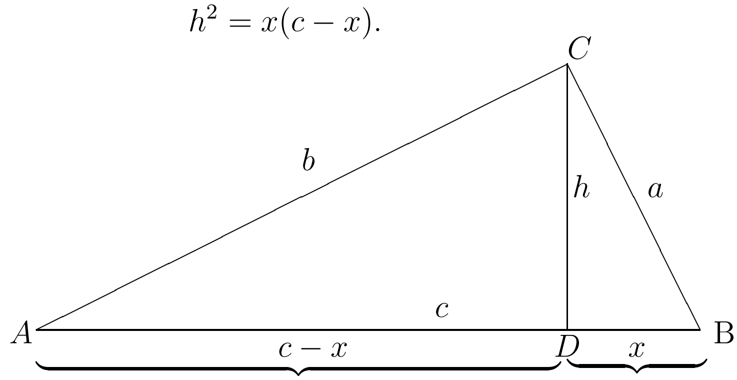
$$12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$$

Zatem trójkąt $\triangle ABC$ jest prostokątny.

0.1.1 Średnia geometryczna

Proporcje Talesa były znane w Szkole Pitagorejskiej w tym związek wysokości $h = |CD|$ poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną c jako średnia geometryczna pomiędzy rzutami $|AD| = c - x$ i $|DB| = x$ przyprostokątnych $a,\ b$ na przeciprostokątną

$$h^2 = x(c - x).$$



Istotnie, z podobieństwa trójkątów $\triangle ADC \approx \triangle DBC$ wynika proporcja

$$\frac{h}{c - x} = \frac{x}{h}.$$

Skąd wysokość

$$h^2 = x(c-x), \qquad h = \sqrt{x(c-x)}$$

jest średnią geometryczną rzutów $c-x$, x przyprostokątnych a, b na przeciwprostokątną c.

Przykład 0.1 *Oblicz rzuty a_c i b_c przyprostokątnych a, b na przeciwprostokątną c i wysokość h trójkąta prostokątnego poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną, jeżeli przyprostokątne $a = 3$ i $b = 4$.*

Rozwiązanie.
Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy przeciwprostokątną

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25,$$

$$c = \sqrt{25} = 5$$

oraz rzuty $a_c = x$, $b_c = x(c-x)$ i wysokość $h = x(c-x)$.
Mianowicie, z trójkątów $\triangle ADC$ i $\triangle DBC$ mamy związki pomiedzy rzutami a_c, b_c i wysokością h

$$h^2 = b^2 - (c-x)^2, \qquad i \quad h^2 = a^2 - x^2$$

$$zatem\ mamy\ rownanie$$

$$b^2 - (c^2 - 2*x + x^2) \quad = \quad a^2 - x^2,$$

$$skad$$

$$2*x = a^2 - b^2 + c^2,$$

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}$$

Podstawiając $a = 3$, $b = 4, c = 5$ obliczamy rzuty a_c, b_c

$$a_c = x = \frac{3^2 - 4^2 + 5^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$b_c = c - x = 5 - \frac{9}{5} = \frac{25-9}{5} = \frac{16}{5}.$$

Wysokść h jest średnią geometryczną rzutów $a_c = \dfrac{9}{5}$ i $b_c = \dfrac{16}{5}$, zatem

$$h = \sqrt{a_c * b_c} = \sqrt{\frac{9}{5} * \frac{16}{5}} = \frac{3*4}{5} = \frac{12}{5}.$$

0.2 Trójki pitagorejskie

Liczby całkowite a, b, c tworzą trójkę pitagorejską, jeżeli spełniają równość

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Na przykład liczby

$$a = 3, \quad b = 4 \quad c = 5,$$

tworzą trójkę pitagorejską, ponieważ

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Zauważmy, że jeżeli liczby naturalne a, b, c tworzą trójkę pitagorejską, to liczby

$$t * a, \quad t * b, \quad t * c$$

również tworzą trójkę pitagorejską dla dowolnej liczby naturalnej t.
Istotnie, mnożąc obie strony równości

$$a^2 + b^2 = c^2$$

przez t^2 otrzymamy równość

$$t^2 * a^2 + t^2 * b^2 = t^2 * c^2 \quad lub \quad (t * a)^2 + (t * b)^2 = (t * c)^2.$$

Na przykład, z trójki pitagorejskiej $3, 4, 5$, gdy $t = 2$, tworzymy trójkę pitagorejską

$$6, 8, 10.$$

Sprawdzamy, że

$$2^2 * 3^2 + 2^2 * 4^2 = 2^2 * 5^2, \quad lub \quad 6^2 + 8^2 = 10^2, \quad lub \quad 36 + 64 = 100.$$

Trójki pitagorejskie pierwotne. Trójkę pitagorejską a, b, c nazywamy *trójką pitagorejską pierwotną*, jeżeli liczby a, b, c są względnie pierwsze, to znaczy, że ich największy wspólny dzielnik

$$NWD(a, b, c) = 1$$

równy jest 1.
Na przykład liczby

$$3, 4, 5$$

tworzą trójkę pitagorejską pierwotną, ponieważ $NWD(3, 4, 5) = 1$.
Natomiast liczby

$$6, 8, 10$$

tworzą trójkę pitagorejską złożoną, gdyż ich największy wspólny dzielnik

$$NWD(6, 8, 10) = 2$$

jest większy od 1.

Twierdzenie 0.1 *Istnieje nieskończenie wiele trójek pitagorejskich pierwotnych. Dla dowolnych liczb naturalnych* $m > n$ *względnie pierwszych , gdy* $NWD(m, n) = 1$, *trójki liczb naturalnych* a, b, c, *gdzie*

$$a = m^2 - n^2$$
$$b = 2m * n$$
$$c = m^2 + n^2$$

są trójkami pitagorejskimi pierwotnymi.

Dowód. Sprawdzmy, że trójki liczbb a, b, c określonne wyżej spełniają równanie Pitagorasa

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Mianowicie, przez podstawienie do lewej i do prawej strony $a = m^2 - n^2$, $b = 2m * n$, $c = m + n$, równania Pitagorasa, obliczmy

$$\begin{aligned} (m-n)^2 + (2m\ n)^2 &= (m^4 - 2m^2\ n^2 + n^4) + 4m^2\ n^2 \\ &= m^4 + 2m^2\ n^2 + n^4 \\ & (m+n)^2. \end{aligned}$$

Skąd wynika, że liczby naturalne

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2m\ n, \quad c = m + n^2 \tag{1}$$

spełniają równanie Pitagorasa dla dowolnych liczb naturalnyc $m > n$. Zatem tworzą trójkę pitagorejską.
Jeżeli liczby naturalne m, n są względnie pierwsze to liczby określone wzorem (1) również są względnie pierwsze. Zatem liczby

$$a = m^2 - n^2$$
$$b = 2m * n$$
$$c = m^2 + n^2$$

tworzą trójkę pitagorejską pierwotną
Niżej w tabeli podajemy listę niektórych trójek pitagorejskich

Trójki pitagorejskie

m	n	a	b	c	$a^2 + b^2 = c^2$	*Sprawdzenie*
2	1	3	4	5	$3^2 + 4^2 = 5^2$	$9 + 16 = 25$
3	2	5	12	13	$5^2 + 12^2 = 13^2$	$25 + 144 = 169$
3	1	8	6	10	$8^2 + 6^2 = 10^2$	$64 + 36 = 100$
4	3	7	24	25	$7^2 + 24^2 = 25^2$	$49 + 576 = 625$
4	1	15	8	17	$15^2 + 8^2 = 17^2$	$225 + 64 = 289$
4	2	12	16	20	$12^2 + 16^2 = 20^2$	$144 + 256 = 400$
5	1	24	10	26	$24^2 + 10^2 = 26^2$	$576 + 100 = 676$

0.3 Konstrukcji odcinków przy pomocy cyrkla i linijki.

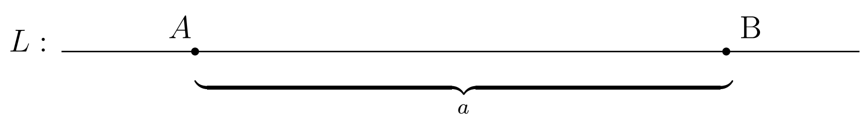
Konstrukcja odcinków o zadanej długości, w tym niektórych odcinków o długości niewymiernej, oparta jest na konstrukcji prostokąta o bokach a, b i na twierzenia Pitagorasa. Wtedy liczby naturalne a, b dobieramy tak, żeby przekątna prostokąta

$$l = \sqrt{a^2 + b^2}$$

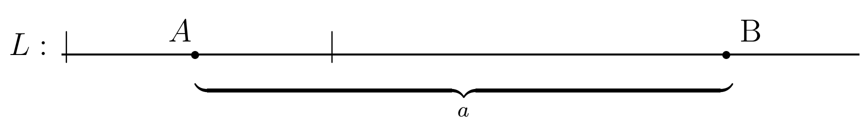
była odcinkiem konstruowanym.

Istotnym elementem konstrukcji odcinków o zadanej długości jest konstrukcja prostokąta o danych bokach a, b.
Konstrukcja prostokąta.

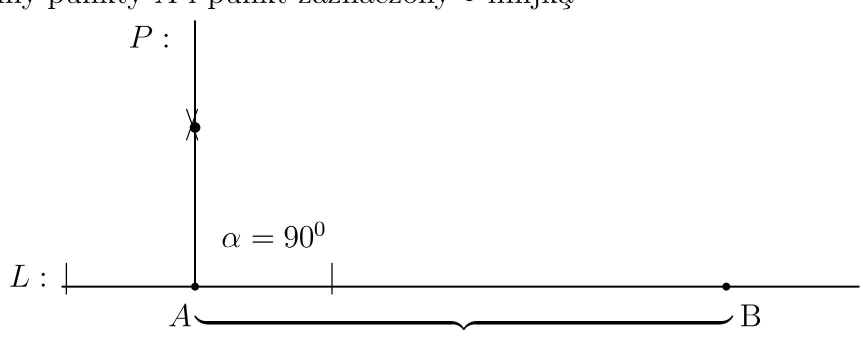
1. Na prostej L zaznaczamy cyrklem odcinek AB o długości a



2. Konstrukcja prostopadłej wystawionej w początku A odcinka AB.
Dowolną rozwartością cyrkla zaznaczamy dwa punkty symetryczne po obu stronach punktu A, jak niżej na rysunku

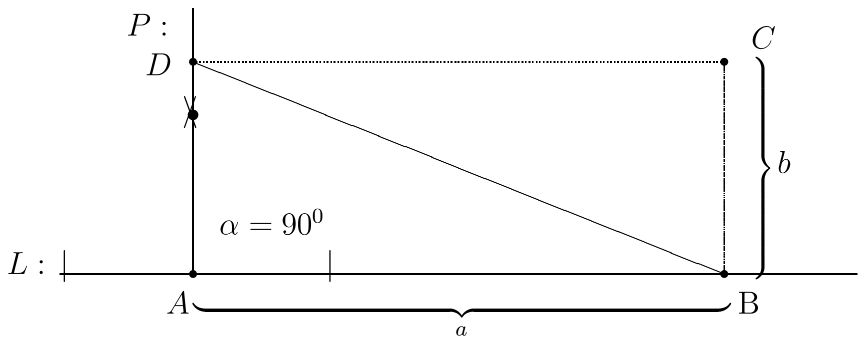


Następnie większą rozwartością cyrkla zakreślamy dwa łuki przecięcia.
Łączymy punkty A i punkt zaznaczony $\bullet$ linijką



W ten sposòb narysowaliśmy prostą P prostopadłą do Prostej L i kąt prosty $\alpha = 90^0$ pomiędzy tymi prostymi.
Teraz na prostej P rozwartością cyrkla ròwną bokowi prostokąta b odkładamy odcinel AD.

Następnie łączymy punkty D i B linijką.



Długość odcinka BD ròwna jest długości przekątnej

$$l = \sqrt{a^2 + b^2}$$

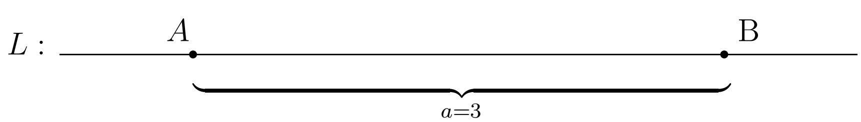
prostokąta $ABCD$ o bokachh a i b.

Przykład 0.2 *Podaj konstrukcję odcinka o długości* $l = \sqrt{13}$ *przy pomocy cyrkla i linijki.*

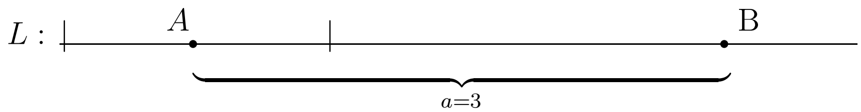
Rozwiązanie.
Napierw zauważmy, że

$$3^2 + 2^2 = 13$$

Zatem konstrukcję odcinka o długości $l = \sqrt{13}$ wykonamy stosujcac twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokąnego o przyprostokątnych $a = 3,\ b = 2$ i przeciwprostokątnej $c = \sqrt{13}$, według wyżej podanego schematu.
1. Na prostej L zaznaczamy cyrklem odcinek AB o długości $a = 3$

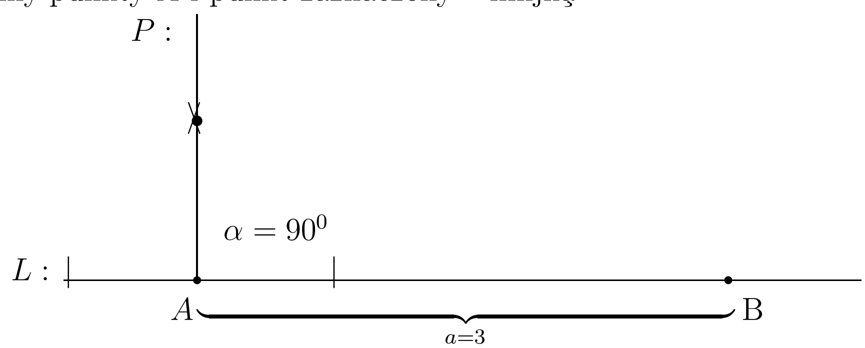


2. Konstrukcja prostopadłej wystawionej w początku A odcinka AB.
Dowolną rozwartością cyrkla zaznaczamy dwa punkty symetryczne po obu stronach punktu A

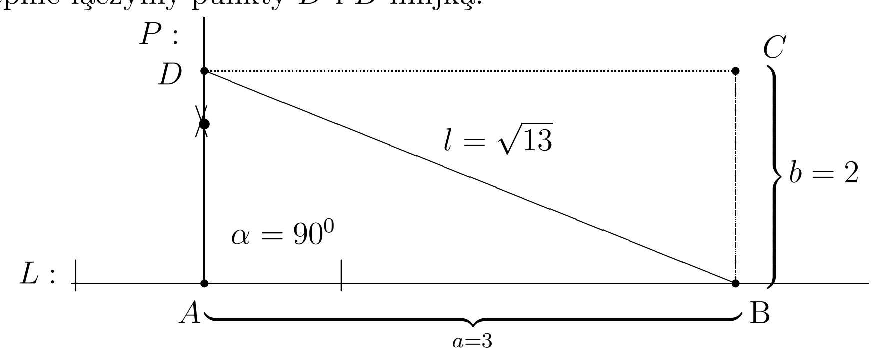


Następnie większą rozwartością cyrkla zakreślamy dwa łuki przecięcia.

Łączymy punkty A i punkt zaznaczony $\bullet$ linijką



W ten sposòb narysowaliśmy prostą P prostopadłą do Prostej L i kąt prosty $\alpha = 90^0$ pomiędzy tymi prostymi.
Teraz na prostej P rozwartością cyrkla ròwną bokowi prostokąta $b = 2$ odkładamy odcinel AD.
Następnie łączymy punkty D i B linijką.



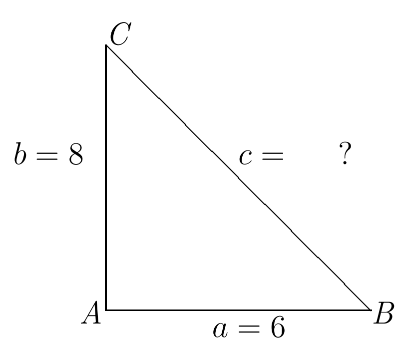
Długość odcinka BD ròwna jest długości przekątnej

$$l = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

prostokąta $ABCD$ o bokachh $a = 3$ i $b = 2$.

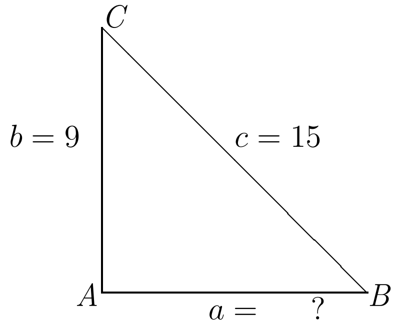
0.4 Zadania

Zadanie 0.1 *Oblicz przciwprostkątną c trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$ o przyprostokątnych $a = 6$ i $b = 8$.*



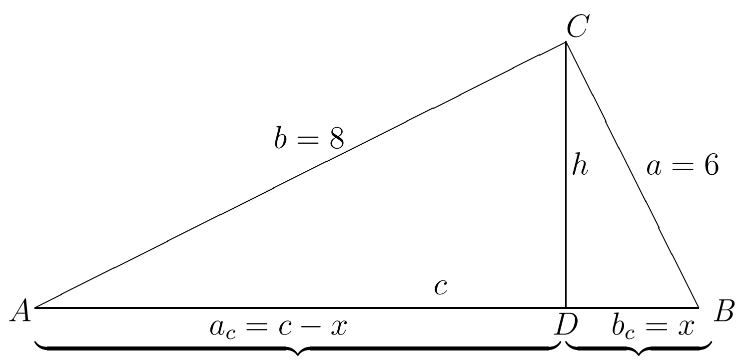
Trójkąt prostokątny ΔABC

Zadanie 0.2 *Oblicz przyprostkątną a trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$ o przyprostokątnej $b = 9$ i przeciwprostokątnej $c = 15$.*



Trójkąt prostokątny ΔABC

Zadanie 0.3 *Oblicz rzuty a_c i b_c przyprostokątnych a, b na przeciwprostokątną c i wysokość h trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$ poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną, jeżeli przyprostokątne $a = 6$ i $b = 8$.*



Zadanie 0.4 *Podaj konstrukcję odcinka o długości $l = \sqrt{17}$ przy pomocy cyrkla i linijki.*

Zadanie 0.5 *Podaj 10 trójek pitagorejskich a, b, c korzystając ze związków*

$$\begin{aligned} a &= m^2 - n^2 \\ b &= 2m * n \\ c &= m^2 + n^2 \end{aligned}$$

dla $m > n$, gdy $m > 5$.