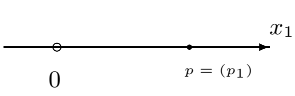
Przestrzenie kartezjańskie

0.1 Wstęp

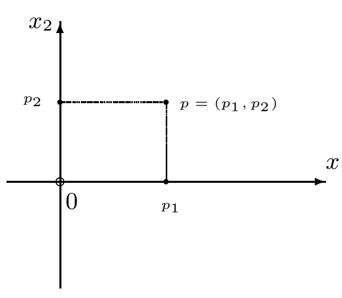
Rene Descartes (1596-1650 A.D.) rozpoczął naukę w 1607 roku w Kolegium Jezuitów, które skończył w roku 1615. W Kolegium Kartezjusz poznał filozofię starożytnych. W późniejszych latach opublikował nowy kierunek filozofii zwaną filozofią dualistyczną oraz stworzył podstawy Geometrii Analitycznej i wprowadził układ współrzęnych prostokątnych.

Kartezjański układ współrzędnych w przestrzeni euklidesowej tworzy przestrzeń kartezjańską n-wymiarową.

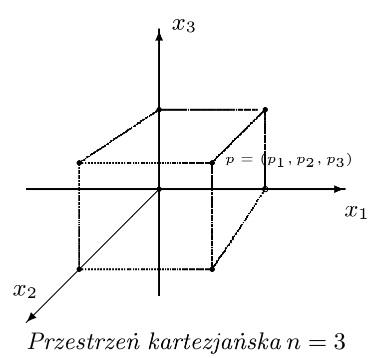
Na rysunkach niżej przestrzenie kartezjańskie dla wymarów $n = 1, 2, 3$.



Przestrzeń kartezjańska $n = 1$



Przestrzeń kartezjańska $n = 2$

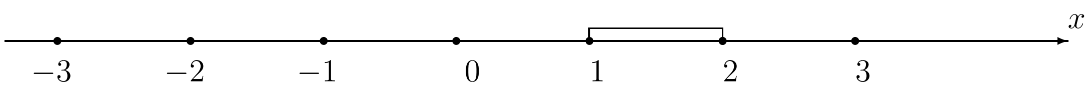


Przestrzeń kartezjańska $n = 3$

0.2 Przestrzeń kartezjańska jednowymiarowa $n = 1$

Oś liczbowa jest przestrzenią kartezjańską jednowymiarową, gdy $n = 1$.

Przykład 0.1 *Zaznacz na osi liczbowej te wartości x, które leżą pomiędzy liczbą 1 i liczbą 2.*



Przykład 0.2 *Zaznacz na osi liczbowej te wartości x, które leżą pomiędzy liczbą -2 i liczbą -1 lub liczbą 1 i liczbą 2.*

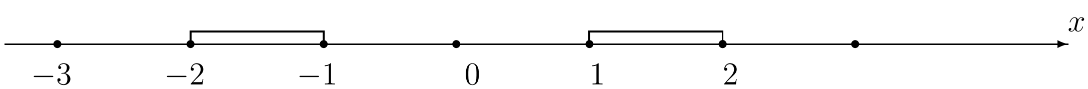
Jasne, że odcinki z włączeniem końców są odcinkami zamkniętymi określonymi przez nierówności słabe

$$[-1, -2] : \quad -2 \leq x \leq -1 \quad lub \quad [1, 2] :; \quad 1 \leq x \leq 2.$$

Natomiast odcinki bez końców są odcinkami otwartymi określonymi przez nierówności ostre

$$(-1, -2) : \quad -2 < x < -1 \quad lub \quad (1, 2) : \quad 1 < x < 2.$$

Niżej na rysunku zaznaczone są odcinki zamknięte



$$[-1, -2] : \quad -2 \leq x \leq -1 \quad lub \quad [1, 2] : \quad 1 \leq x \leq 2.$$

0.2.1 Odcinek

Punkty które leżą pomiędzy punktem a i punktem b, piszemy

$$a \leq x <\leq b, \quad lub \quad a < x < b$$

tworzą odcinek zamknięty $[a, b]$ z włączonym początkiem a i końcem odcinka b lub odcinek otwarty (a, b) bez końców a i b.
Na przykład dla $a = 1$ i $b = 2$ odcinek zamknięty z włączeniem końców określamy przez nierówność

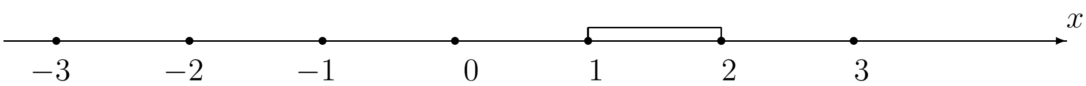
$$[a, b] : \qquad 1 \leq x \leq 2$$

oraz odcinek otwarty bez końców określamy przez nierówność ostrą

$$(a, b) : \qquad 1 < x < 2.$$

Niżej na rysunku zaznaczony jest odcinek zamknięty

$$[1,2]: \qquad 1 < x < 2$$



Przykład 0.3 *Zaznacz na osi liczbowej te wartości x dla których nierówność jest prawdziwa.*

$$3(x-1) < 2(x+1)$$

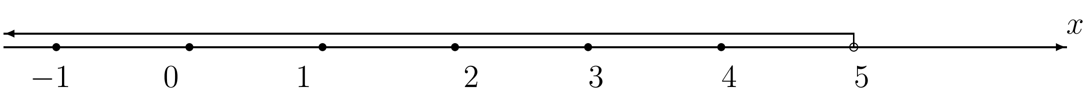
Rozwiązanie
Wykonujemy mnożenia prze 3 po lewej i przez 2 po prawej stronie nierówności

$$3x - 3 < 2x + 2$$

Rozwiązując nierówności, przenosimy niewiadomą x na lewą stronę nierówności ze znakiem przeciwnym, natomiast liczby przenosimy na prawą stronę nierówności również ze znakiem przeciwnym. W ten sposób otrzymamy rozwiązanie nierówności

$$3x - 2x < 2 + 3, \qquad x < 5.$$

Odpowiedź: Nierówność jest prawdziwa dla $x < 5$.
Na osi liczbowej zaznaczmy rozwiązanie



Nierównść ostra $x < 5$ bez punktu 5.

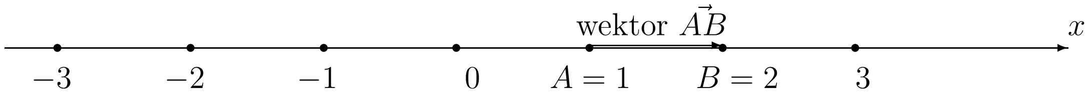
0.2.2 Wektory

Wektory w przestrzeni kartezjańskiej jednowymiarowej mają kierunek osi liczbowej, zwrot zgodny z oriętacją osi liczbowej albo zwrot przeciwny.

Wektor związany. Uporządkowaną parę punktów oznaczoną $\vec{AB}$ nazywamy wektorem związanym o początku w punkcie A i końcu w punkcie B. Zatem wektor związany w przestrzeni kartezjańskiej jednowymiarowej ma określone położenie i zwrot zaznaczony strzałką oraz długość $||\vec{AB}|| = |B - A|$.[1]

[1] Symbol $|B - A|$ oznacza wartość bezwzględną z liczby $B - A$

Na przykład na rysunku wektor $\vec{AB}$ jest związany z początkiem w punkcie $A = 1$ i z końcem w punkcie $B = 2$, leży na osi liczbowej i ma zwrot zaznaczony strzałką.



Wektor swobodny. W odróżnieniu od wektora związanego, którego położenie na osi liczbowej określone jest przez jego początek i koniec, wektor swobodny oznaczamy,

$$\vec{v} = [v]$$

nie ma określonego położenia na osi liczbowej. Natomiast, reprezentantem wektora swobodnego $\vec{v} = [v]$ jest każdy wektor związany $\vec{AB}$ o tej samej długości i zwrocie.

Długość wektora swobodnego równa jest $||\vec{v}|| = |v|$ wartości współrzednej v. Zwrot wektora swobodnego jest zgodny z oriętacją osi liczbowe, jeżeli jego współrzędna $v > 0$ jest dodatnia, natomiast jest przeciny do orięntacji osi, jeżeli współrzędna $v < 0$ jest ujemna. Wektor o długości równej zero redukuje się do punktu.
Na przykład, wektor zwązany $\vec{AB}$ o początku w punkcie $A = 1$ i końcu w punkcie $B = 2$, z poprzedniego przykładu, jest reprezentantem wektora swobodnego $\vec{v} = [1]$ o współrzędnej $v = 1$, o długości $||\vec{v}|| = |v| = 1$ i zwrocie wektora $\vec{AB}$ zgodnym z orientacją osi liczbowej.

0.2.3 Dodawanie i odejmowanie wektorów

Rozpatrzmy dwa wektory swobodne

$$\vec{v} = [v], \qquad \vec{w} = [w].$$

Suma wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest wektor

$$\vec{s} = [v + w]$$

o współrzędnej $s = v + w$ równej sumie współrzędnych wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$.
Na przykład, sumą wektorów

$$\vec{v} = [1], \qquad \vec{w} = [2].$$

jest wektor

$$\vec{s} = [1 + 2] = [3]$$

o współrzędnej $s = 3$ i o zwrocie zgodnym z osią liczbową.
Podobnie różnicą wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest wektor

$$\vec{r} = [v - w]$$

o współrzędnej $r = v - w$ równej różnicy współrzędnych wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$.
Na przykład, różnicą wektorów

$$\vec{v} = [1], \qquad \vec{w} = [2]$$

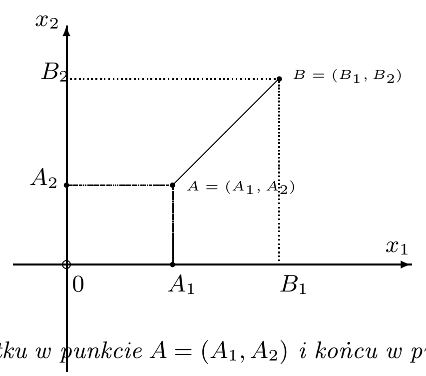
jest wektor

$$\vec{s} = [1 - 2] = [-1]$$

o współrzędnej $r = -1$ i zwrocie przeciwnym do oriętacji osi liczbowej.

0.3 Przestrzeń kartezjańska dwuwymiarowa $n = 2$

Płaszczyzna euklidesowa z prostokątnym układem współrzędnych na której leżą odcinki, wektory oraz figury płaskie jest przestrzenią kartezjańską dwuwymiarawą, gdy $n = 2$.



Odcinek $[A, B]$ o początku w punkcie $A = (A_1, A_2)$ i końcu w punkcie $B = (B_1, B_2)$

0.3.1 Wektory

W przestrzni kartezjańskiej dwuwymiarowej wyróżniamy wektory związane i wektory swobodne.

Wektor związany o początku w punkcie

$$A = (A_1, A_2)$$

i końcu w punkcie

$$B = (B_1, B_2)$$

jako para uporządkowanych punktów oznaczamy symbolem

$$\vec{AB} = [B_1 - A_1, B_2 - A_2].$$

Na przykład na rysunku wektor $\vec{AB} = [1, 2]$ jest związany z początkiem w punkcie

$$A = (1, 1)$$

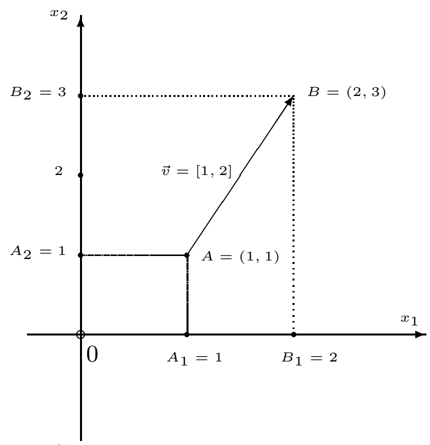
i z końcem w punkcie

$$B = (2, 3).$$

Zwrot wektora $\vec{AB} = \vec{v}$ jest zaznaczony na rysunku strzałką.
Na przykład na rysunku, wektor $\vec{AB} = \vec{v} = [v_A, v_B]$ związany z początkiem w punkcie $A = (1, 1)$ i z końcem w punkcie $B = (2, 3)$ ma współrzędne

$$v_A = B_1 - A_1 = 2 - 1 = 1, \qquad v_B = B_2 - A_2 = 3 - 1 = 2,$$

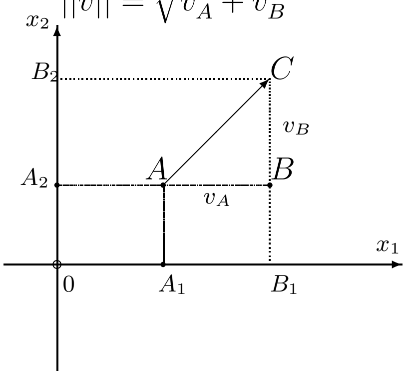
leży na prostej o równaniu $y = 2x - 1$ i ma zwrot zaznaczony strzałką.



Wektor $\vec{AB} = \vec{v} = [1, 2]$ w przestrzeni kartezjańskiej $n = 2$

Długość wektorara $\vec{v} = [v_A, v_B]$ obliczmy z trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$ stosując twierdzenie Pitagorasa

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_A^2 + v_B^2}$$



Długość wektora $\vec{v} = [v_A, v_B]$ obliczamy ze wzoru $||\vec{v}|| = \sqrt{v_A^2 + v_B^2}$

Na przykład, długość wektora $\vec{v} = [1, 1]$

$$||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Wektor swobodny. Pojęciem wektora swobodnego definiujemy korzystając z *relacji równoważności*, która w matematyce, fizyce filozofii i innych naukach odgrywa istotną rolę.

Definicja 0.1 *Dwa wektory zwiąne $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$ o początkach w punktach A, C i o końcach w punktach B, D są równoważne piszemy*

$$\vec{AB} \equiv \vec{CD}$$

wtedy i tylko wtedy, jeżeli mają tą samą długość

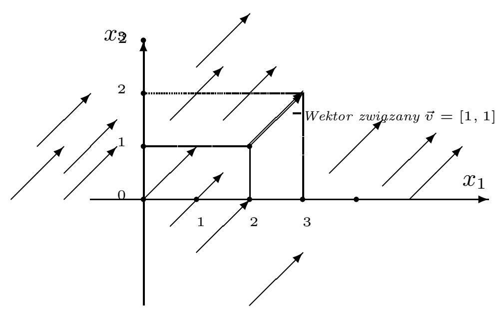
$$||\vec{AB}|| = ||\vec{CD}||,$$

ten sam kierunek i ten sam zwrot.

Definicja 0.2 *Wektorem swobodnym nazywamy klasę wektorów równoważnych.*

Zauważmy, że powyższa definicja wektora swobodnego określa klasę wektorów, nieskończenie wiele wektorów, wektorów o tej samej długości i o tym samym kierunku i zwrocie. Każdy wektor związany należący do tej klasy jest jej reprezentantem.
Zatem położenie reprezentanta wektora swobodnego na płaszczyźnie kartezjańskiej nie zmienia jego kształtu, długości, kierunku i zwrotu.

Przykład 0.4 *Na rysunku zaznaczony jest wektor swobodny $\vec{v} = [1, 1]$ jako klasa wektorów równoważnych reprezentowanych przez wektor związany z jego początkiem w punkcie $a = (2, 1)$.*



Długość wektora $\vec{v} = [1, 1]$ obliczamy ze wzoru $||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Patrząc na rysunek, intuicja nam podpowiada, że widzimy dużo wektorów, a nie jeden. Jednak to jest ten sam wektor tylko położony w różnych miejscach w przestrzeni kartezjańskiej.
Reprezentantem wektora swobodnego $\vec{v} = [1, 1]$ jest na przykład wektor związany o początku w punkcie $A = (2, 1)$ i końcu w punkcie $B = (3, 2)$. Jasne, ze każdy inny wektor o ustalonym początku jest również reprezentantem wektora swobodnego $\vec{v} = [1, 1]$.

0.3.2 Wersory

W prostokątnym układzie współrzędnych w 2-wymiarowej przestrzeni kartezjańskich wyróżniamy następujące wektory zwane wersorami osi

$$\vec{i} = [1, 0], \quad \vec{j} = [0.1],$$

Zatem, wersory mają kierunek i zwrot odpowiednich osi układu współrzędnych.
Długość każdego wersora

$$||\vec{i}|| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \quad ||\vec{j}|| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1,$$

jest równa 1.
Zauważmy, że każdy wektor $\vec{v} = [v_1, , v_2]$ w przestrzni kartezjańskiej możemy przedstawić jako kombinację liniową wersorów osi

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}.$$

Rzeczywiście, obliczamy kolejne składniki powyższej sumy wektorów

$$v_1 * \vec{i} = v_1 * [1, 0] = [1 * v_1, 0 * v_1] = [v_1, 0],$$

$$v_2 * \vec{j} = v_2 * [0, 1] = [0 * v_2, 1 * v_2] = [0, v_2].$$

Skąd wektor

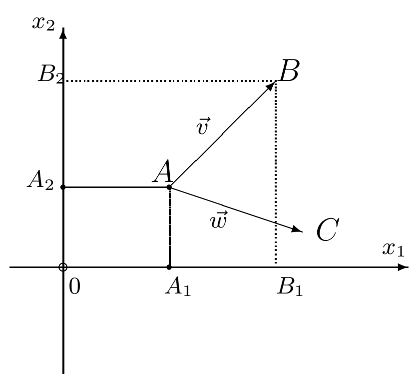
$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} = [v_1, 0] + [[0, v_2] = [v_1, v_2].$$

0.3.3 Dodawanie i odejmowanie wektorów.

Rozpatrzmy dwa wektory swobodne

$$\vec{v} = [v_1, v_2], \qquad \vec{w} = [w_1, w_2]$$

zaczepione we wspólnym punkcie $A = (A_1, A_2)$



Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2]$ obliczamy ze wzoru $||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Sumą wektorów

$$\vec{v} = [v_A, v_B] \quad i \quad \vec{w} = [w_A, w_B]$$

jest wektor $\vec{s}$ o współrzędnych równej sumie współrzędnych

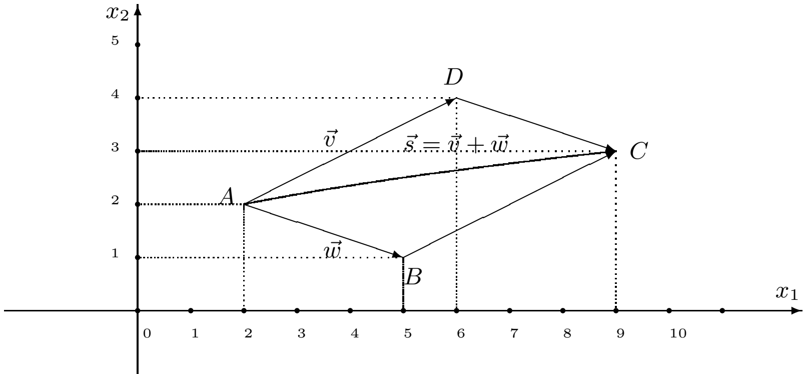
$$\vec{s} = \vec{v} + \vec{w} = [v_A, v_B] + [w_A, w_B] = [v_A + w_A, v_B + w_B]$$

Na przykład, suma wektorów

$$\vec{v} = [v_A, v_B] = [4, 2], \quad \vec{w} = [2, -1]$$

$$Suma\ \vec{s} = [4, 2] + [2, -1] = [7, 1]$$

Wektor $\vec{s}$ leży na przekątnej AC równoległoboku $ABCD$



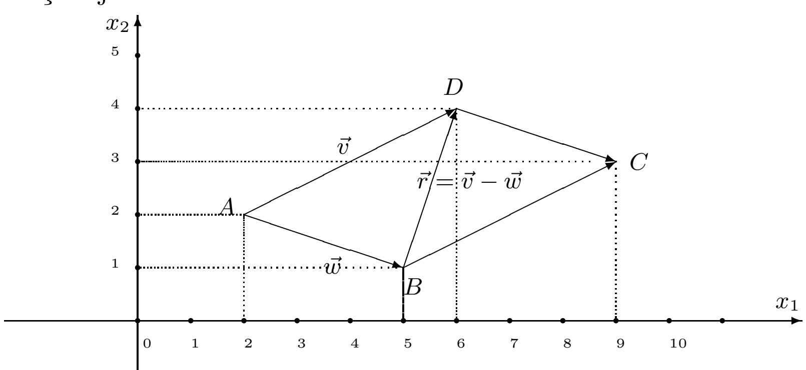
Zasada równoległoboku

Suma wektorów $\vec{s} = \vec{v} + \vec{w} = [4, 2] + [3 + (-1)] = [7, 1]$.

Różnica wektorów to jest wektor

$$\vec{r} = \vec{v} - \vec{w} = [v_A - w_A, v_B - w_B] = [4, 2] - [3, -1] = [1, 3]$$

leży na przekątnej BD



Zasada r.ownoległoboku $ABCD$

Różnica wektorów $\vec{r} = \vec{v} - \vec{w} = [4, 2] - [3 + (-1)] = [1, 3]$

0.3.4 Iloczyn skalarny wektorów.

Jednym z wielu istotnych pojęć w Geometri Kartezjańskiej jest iloczyn skalarny wektrów, swobodnych lub związanych. [2]
Długośċ, kierunk, zwrot wektorów i iloczyn skalarny nie zależą od ich położenia na płaszczyźnie kartezjańskiej.

[2] W matematyce wyższej pojęcie iloczynu skalarnego odnosi się nie tylko do wektorów w przestrzeniach kartezjańskich, odnosi się również do funkcji i abstrakcyjnych obiektów w przestrzeniach Hilberta.

Definicja 0.3 *Iloczyn skalarny wektora* $\vec{v} = [v_1, v_2]$ *przez wektor* $\vec{w} = [w_1, w_2]$ *jest liczbą*

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2.$$

Na przykład, obliczamy iloczyn skalarny wektorów $\vec{v} = [2, 3]$ i $\vec{w} = [-1, 2]$

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 2 * (-1) + 3 * 2 = 4.$$

Zauważmy, że wynik iloczynu skalarnego wektorów już nie jest wektorem. Mówimy wtedy, że operacja mnożenia skalarnego wektorów wyprowadza poza zbiór jej argumentów.
Iloczyn skalarny wektorów prostopadłych jest równy zero. Niżej podajemy warunek konieczny i dostateczny prostopadłości wektorów w formie następującego twierdzenia

Twierdzenie 0.1 *Wektory* $\vec{v}$ *i* $\vec{w}$ *są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, jeżeli ich iloczyn skalarny*

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2 = 0$$

jest równy zero.

Warunku dostateczny. Udowodnimy, że jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

jest równy zero to wektory $\vec{v} \perp \vec{w}$ są prostopadłe.
Istotnie, obliczmy kwadrat długości różnicy wektorów

$$\begin{aligned} ||\vec{r}||^2 = ||\vec{v} - \vec{w}||^2 &= (\vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) \\ &= (\vec{v}, \vec{v}) - 2(\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{w}) \\ &= ||\vec{v}||^2 - 2(\vec{v}, \vec{w}) + ||\vec{w}||^2 \end{aligned}$$

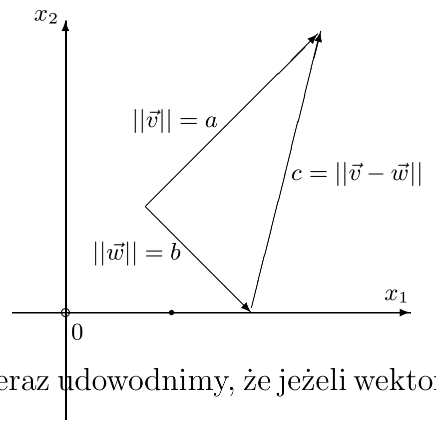
Skąd na podstawie założenia, że iloczy skalarny $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ wynika równość

$$||\vec{v} - \vec{w}||^2 = ||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa, powyższa równość oznacza, że trójkąt $\triangle\, ABC$ o bokach

$$a = ||\vec{v}||, \quad b = ||\vec{w}||, \quad c = ||\vec{v} - \vec{w}||$$

jest prostokątny. Zatem, wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe.



Warunek konieczny. Teraz udowodnimy, że jeżeli wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe to ich iloczy skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

jest równy zero.
Na podstawie twierdzenia Pitagorasa z założenia, że wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prosopadłe wynika, że trójkąt o bokach

$$a = ||\vec{v}||, \quad b = ||\vec{w}||, \quad c = ||\vec{v} - \vec{w}||$$

jest prostokątny.
Również na podstawie twierdzenia Pitagorasa kwadrat długości różnicy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$, to jest wektor $\vec{r}$, który leży na przeciwproatokątnej trójkąta prostokątnego, równy jest sumie kwadratów długości wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$

$$||\vec{v} - \vec{w}||^2 = ||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2. \tag{1}$$

Z drugiej strony obliczamy kwadrat długości różnicy

$$\begin{aligned} ||\vec{r}||^2 = ||\vec{v} - \vec{w}||^2 &= (\vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) \\ &= (\vec{v}, \vec{v}) - 2(\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{w}) \\ &= ||\vec{v}||^2 - 2(\vec{v}, \vec{w}) + ||\vec{w}||^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Porównując prawe strony równości (1) i (2)

$$||\vec{v} - \vec{w}||^2 = ||\vec{v}||^2 - 2(\vec{v}, \vec{w}) + ||\vec{w}||^2$$

otrzymamy iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

równy zero.
Koniec dowodu.

0.4 Przestrzeń kartezjańska trzywymiarowa $n = 3$.

Przestrzeń euklidesowa trzy wymiarowa z prostokątnym układem współrzędnych, gdy $n = 3$, jest przestrzenią kartezjańską. Położenie figur geometrycznych w przestrzeni kartezjańskiej określamy przez ich współrzędne.

0.4.1 Wektory

Podobnie jak w przestrzeni kartezjańskiej dwuwymiarowej, w przestrzni kartezjańskiej trzy wymiarowej wyróżniamy wektory związane i wektory swobodne.

Wektor związany o początku w punkcie

$$A = (A_1, A_2, A_3)$$

i końcu w punkcie

$$B = (B_1, B_2, B_3)$$

jako para uporządkowanych punktów oznaczamy symbolem

$$\vec{AB} = [B_1 - A_1, B_2 - A_2, B_3 - A_3].$$

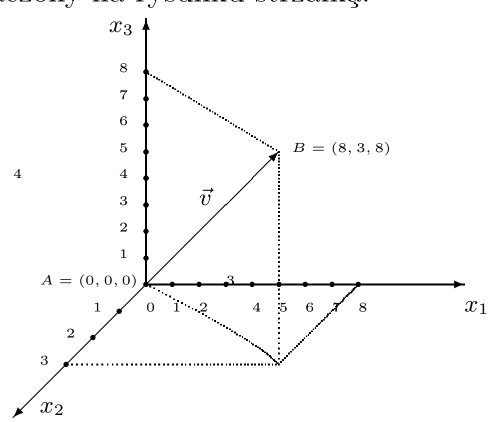
Na przykład na rysunku wektor $\vec{AB} = [8, 3, 8]$ jest związany z początkiem w punkcie

$$A = (0, 0, 0)$$

i z końcem w punkcie

$$B = (8, 3, 8).$$

Zwrot wektora $\vec{AB}$ jest zaznaczony na rysunku strzałką.



Przestrzeń kartezjańska $n = 3$. Wektor $\vec{v} = [8, 3, 8]$.

Ogólnie, długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]]$ oznaczona symbolem $||\vec{v}||$ równa jest

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

W przypadku wektora $\vec{v} = [8, 3, 8]$

$$||\vec{v}|| = \sqrt{8^2 + 3^2 + 8^2} = \sqrt{137}.$$

Zauważmy, że jeżeli wektor $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ pomnożymy przez liczbę α to długość wektora

$$\alpha * \vec{v} = |\alpha| * ||\vec{v}.$$

Istotnie wektor $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ mnożymy przez liczbę α pomnożąc każdą jego współrzędnę przez α

$$\alpha\vec{v} = [\alpha * v_1, \alpha * v_2, \alpha * v_3].$$

Wtedy długość wektora $\alpha * \vec{v}$ równa jest

$$||\alpha\vec{v}|| = \sqrt{\alpha^2 * v_1^2 + \alpha^2 * v_2^2 + \alpha^2 v_3^2} = |\alpha| * ||\vec{v}||.$$

Na przykład, pomnóżmy wektor $\vec{v} = [8, 3, 8]$ przez liczbę $\alpha = 3$. Wtedy dłogość wektora

$$3\vec{v} = [3 * 8, 3 * 3, 3 * 8]$$

równa jest

$$||\alpha\vec{v}|| = \sqrt{3^2 * 8^2 + 3^2 * 3^2 + 3^2 8^2} = \sqrt{8^2 + 3^2 + 8^2} = 3 * \sqrt{137}.$$

0.4.2 Wersory

W prostokątnym układzie współrzędnych w 3-wymiarowej przestrzeni kartezjańskich wyróżniamy następujące wektory zwane wersorami osi

$$\vec{i} = [1, 0, 0], \quad \vec{j} = [0.1, 0], \quad \vec{k} = [0, 0, 1].$$

Zatem, wersory mają kierunek i zwrot odpowiednich osi układu współrzędnych. Długość każdego wersora

$$||\vec{i}|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1, \quad ||\vec{j}|| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1, ||\vec{k}|| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

jest równa 1.
Zauważmy, że każdy wektor $\vec{v} = [v_1, , v_2, v_3]$ w przestrzni kartezjańskiej możemy przedstawić jako kombinację liniową wersorów osi

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}.$$

Rzeczywiście, obliczamy kolejne składniki powyższej sumy wektorów

$$v_1 * \vec{i} = v_1 * [1, 0, 0] = [1 * v_1, 0 * v_1, 0 * v_1] = [v_1, 0, 0],$$

$$v_2 * \vec{j} = v_2 * [0, 1, 0] = [0 * v_2, 1 * v_2, 0 * v_2] = [0, v_2, 0],$$

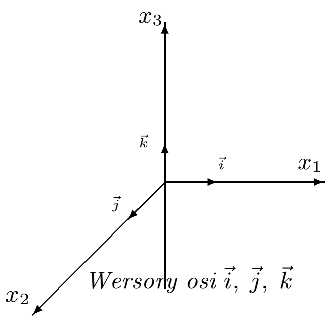
$$v_3 * \vec{k} = v_3 * [0, 0, 1] = [0 * v_3, 0 * v_3, 1 * v_3] = [0, 0, v_3].$$

Skąd wektor

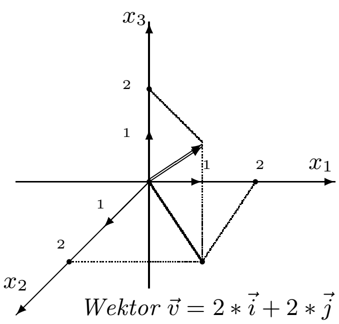
$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} = [v_1, 0, 0,] + [[0, v_2, 0] + [0, 0, v_3] = [v_1, v_2, v_3]$$

Niżej na rysunku wektor $\vec{v} = [2, 2, 2]$ przedstawiony jest jako kombinacja liniowa wersorów

$$\vec{v} = 2 * \vec{i} + 2 * \vec{j} + 2 * \vec{k}$$



Wersory osi $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$



Wektor $\vec{v} = 2 * \vec{i} + 2 * \vec{j} + 2 * \vec{k}$

Wektor swobodny. Pojęcie wektora swobodnego w przestrzeni kartezjańskiej nie zależy od wymiaru przestrzeni. Podobnie jak w przestrzeni dwuwymiarowej, wektor swobodny definiujemy korzystając z relacji równoważności.

Definicja 0.4 *Dwa wektory zwiąne* $\vec{AB}$ *i* $\vec{CD}$ *o początkach w punktach* A, C *i o końcach w punktach* B, D *są równoważne piszemy*

$$\vec{AB} \equiv \vec{CD}$$

wtedy i tylko wtedy, jeżeli mają tą samą długość

$$||\vec{AB}|| = ||\vec{CD}||,$$

ten sam kierunek i ten sam zwrot.

Podobnie jak w przestrzeni kartezjańskiej dwuwymiarowej wektor swobodny rozumiemy w sensie definicji

Definicja 0.5 *Wektorem swobodnym nazywamy klasę wektorów równoważnych.*

0.4.3 Dodawanie i odejmowanie wektorów.

Rozpatrzmy dwa wektory swobodne

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3], \qquad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3].$$

Sumą wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

jest wektor $\vec{s}$ o współrzędnych równej sumie współrzędnych

$$\vec{s} = \vec{v} + \vec{w} = [v_1, v_2, v_3] + [w_1, w_2, w_3] = [v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3]$$

Na przykład, sumą wektorów

$$\vec{v} \quad = \quad [4, 2, 1], \quad i \qquad \vec{w} = [2, -1, 3]$$

jest wektor

$$Suma \quad \vec{s} = [4, 2, 1] + [2, -1, 3] = [6, 1, 4]$$

Różnicą wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest wektor

$$\vec{s} = \vec{v} - \vec{w} = [v_1, v_2, v_3] - [w_1, w_2, w_3] = [v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3]$$

Na przykład, różnicą wektorów

$$\vec{v} \quad = \quad [4, 2, 1], \quad i \qquad \vec{w} = [2, -1, 3]$$

jest wektor

$$\vec{s} = [4, 2, 1] - [2, -1, 3] = [2, 3, -2]$$

0.4.4 Iloczyn skalarny wektorów.

Jednym z wielu istotnych pojęć w Geometri Kartezjańskiej jest iloczyn skalarny wektrów, swobodnych lub związanych. [3]
Długość, kierunk, zwrot i iloczyn skalarny wektorów nie zależą od ich położenia w przestrzeni kartezjańskiej.

Definicja 0.6 *Iloczyn skalarny wektora*

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$$

przez wektor

$$\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

jest liczbą

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + v_3 * w_3$$

Na przykład, obliczamy iloczyn skalarny wektora

$$\vec{v} = [2, 3, 2]$$

przez wektor

$$\vec{w} = [-1, 2, 3]$$

[3] W matematyce wyższej pojęcie iloczynu skalarnego odnosi się nie tylko do wektorów w przestrzeniach kartezjańskich, odnosi się również do funkcji i abstrakcyjnych obiektów w przestrzeniach Hilberta.

równy jest

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 2 * (-1) + 3 * 2 + 2 * 3 = 10$$

Zauważmy, że wynik iloczynu skalarnego wektorów już nie jest wektorem. Mówimy wtedy, że operacja mnożenia skalarnego wektorów wyprowadza poza zbiór jej argumentów.
Iloczyn skalarny wektorów prostopadłych jest równy zero. Niżej podajemy warunek konieczny i dostateczny prostopadłości wektorów w formie następującego twierdzenia

Twierdzenie 0.2 *Wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, jeżeli ich iloczyn skalarny*

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + v_3 * w_3 = 0$$

jest równy zero

Dowód powyższego twierdzenia jest taki sam jak twierdzenia (0.1) w przestrzeni kartezjańskiej dwuwymiarowej.

0.5 Zadania

Zadanie 0.1 *Zaznacz na osi liczbowej te wartości x dla których następujące nierówności*

$$(i) \quad 5(x-1) < 3(x+1)$$

$$(ii) \quad 4x - 6 \leq 10$$

są prawdziwe.

Zadanie 0.2 *Rozpatrz dwa wektory swobodne*

$$\vec{v} = [1, 2] \qquad i \qquad \vec{w} = [2, 1]$$

(*i*) *Znajdź wektor $\vec{s}$ sumy i wektor $\vec{r}$ różnicy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$*
(*ii*) *Narysuj wektor $\vec{s}$ sumy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ o wspólnym początku w punkcie $A = (1, 1)$.*
(*iii*) *Narysuj wektor $\vec{r}$ różnicy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ o wspólnym początku w punkcie $A = (1, 1)$.*

Zadanie 0.3 *Oblicz iloczyn skalarny wektorów*

$$(i) \quad \vec{v} = [3, 4], \qquad \vec{w} = [2, -1],$$

$$(ii) \quad \vec{v} = [2, 3], \qquad \vec{w} = [3, -2],$$

$$(iii) \quad \vec{v} = [-3, 2], \qquad \vec{w} = [4, 1],$$

$$(iv) \quad \vec{v} = [4, 5], \qquad \vec{w} = [5, -4].$$

Które z powyższych par wektorów są prostopadłe?

Zadanie 0.4 *Wykaż, że wektory*

$$\vec{v} = [1, 3], \qquad \vec{w} = [3, -1]$$

i wektory

$$\vec{p} = \vec{v} + \vec{w}, \qquad \vec{q} = \vec{q} = \vec{v} - \vec{w}$$

są prostopadłe.

Zadanie 0.5 *Wykaż, że jeżeli wektory*

$$\vec{v} = [v_1, v_2], \qquad \vec{w} = [w_1, w_2]$$

są prostopadłe $\vec{v} \perp \vec{w}$ to wektory

$$\vec{p} = \vec{v} + \vec{w}, \qquad \vec{q} = \vec{q} = \vec{v} - \vec{w}$$

są również prostopadłe $\vec{p} \perp \vec{q}$.

Zadanie 0.6 *Oblicz iloczyn skalarny wektorów*

$$\begin{array}{lll} (i) & \vec{v} = [3, 4, 1], & \vec{w} = [2, -1, 2], \\ (ii) & \vec{v} = [2, 3, 0], & \vec{w} = [3, -2, 1], \\ (iii) & \vec{v} = [-3, 2, -1], & \vec{w} = [4, 5, -2], \\ (iv) & \vec{v} = [4, 5, 1], & \vec{w} = [5, -4, 1]. \end{array}$$

Które z powyższych par wektorów są prostopadłe?

Zadanie 0.7 *Wykaż, że następujące pary wektorów*

$$\begin{array}{lll} (i) & \vec{v} = [1, 3, 1], & \vec{w} = [3, -1, 0] \\ (ii) & \vec{p} = \vec{v} + \vec{w}, & \vec{q} = \vec{q} = \vec{v} - \vec{w} \end{array}$$

są prostopadłe.

Zadanie 0.8 *Wykaż, że jeżeli wektory swobodne*

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3], \qquad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

są prostopadłe $\vec{v} \perp \vec{w}$ to wektory

$$\vec{p} = \vec{v} + \vec{w}, \qquad \vec{q} = \vec{q} = \vec{v} - \vec{w}$$

są również prostopadłe $\vec{p} \perp \vec{q}$.