Okręg i koło.
Miara kątowa i miara łukowa kątów.

0.0.1 Okrąg i koło

Okręgiem o środku w punkcie $p = (p_1, p_2)$ i promieniu R nazywamy zbiór punktów

$$x = (x_1, x_2)$$

równoodległych o R od punktu p, piszemy

$$okrag: \quad \{x = (x_1, x_2):\ ||p - x|| = R\}, \quad R = \sqrt{(p_1 - x_1)^2 + (p_2 - x_2)^2}.$$ [1]

Zatem, mamy równie okręgu

$$(p_1 - x_1)^2 + (p_2 - x_2)^2 = R^2. \tag{1}$$

Punkt $x = (x_1, x_2)$ leży na okręgu, jeżeli kwadrat jego odległości od ustalonego punktu

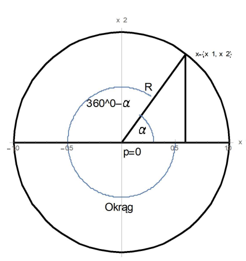
$$p = (p_1, p_2)$$

jest stały równy R^2.

Na przykład, równanie okręgu

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2. \tag{2}$$

To jest równanie okręgu w postaci kanonicznej o środku w począdku układu współrzędnych, w punkcie $p = (0, 0)$ i promieniu R



Obszar wewnątrz okręgu nazywamy kołem.

Na rysunku, zaznaczony jest środek okręgu punkt $p = (0, 0)$, promień okręgu R, średnica okręgu równa $2R$, kąt α pomiędzy średnicą i promieniem R.

[1] Czytamy zbiór punktów $x = (x_1, x_2)$ takich, że $||p - x|| = R$

Uzupałnienie kąta α do kąta pełnego równe jest $360^0 - \alpha$.
Obwód okręgu

$$obwod: \quad Ob = 2 * \pi * R,$$

pole koła

$$pole: \quad P = \pi * R^2,$$

i liczba niewymierna

$$\pi \approx \frac{314}{100} = 3.14.$$

0.0.2 Kąty. Miara kątowa i miara łukowa kąta

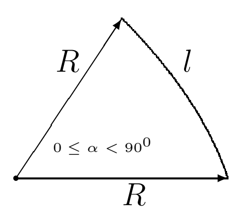
Miarą kątową są stopnie. Kąt pełny równy jest 360^0 stopni. Jeden stopień piszemy

$$1^0 \ \textit{równa się} \ \frac{1}{360}$$

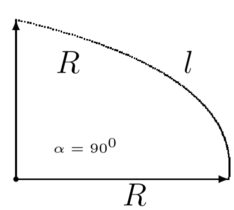
kąta pełnego.

Wyróżniamy następujące kąty:

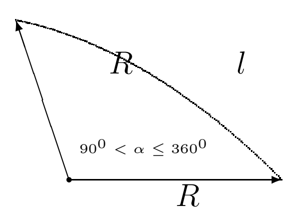
- kąt ostry $0 \leq \alpha < 90^0$.



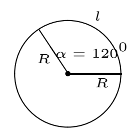
- kąt prosty $\alpha = 90^0$.



- kąt rozwarty $90^0 < \alpha \leq 360^0$.

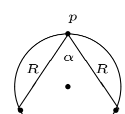


- kąt środkowy o wierzchołku w środku okręgu pomiędzy dwoma promieniami oparty na łuku l.



Kąt środkowy $\alpha = 120^0$.

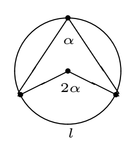
- Kątem wpisanym nazywamy kąt, którego wierzchołek leży na okręgu. Na rysunku zaznaczony jest kąt α wpisany w okrąg o wierzchołku p na okręgu pomiędzy dwoma cięciwami.



Kąt wpisany α *radianów.*

- Związek pomiędzy kątem środkowym i kątem wpisanym w okrąg sformuujemy w postaci następującego twierdzania

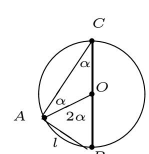
Twierdzenie 0.1 *Miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku l co kąt środkowy.*



Kąt wpisany α *radianów.*
Kąt środkowy 2α *radianów.*

Dowód
Rozpatrzmy trzy przypadki

1. środek okręgu leży na jednym z ramion kąta wpisanego opartego na łuku l



Kąt wpisany α radianów.

Kąt środkowy 2α radianów.

Zauważmy, że trójkąt równoramienny AOC o ramionach równych promieniowi okręgu R ma przy podstawie AC równe kąty α. Suma kątów w trójkącie równa jest 180^0. Zatem kąt

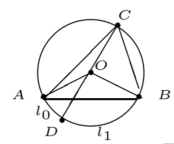
$$\angle AOC = 180^0 - 2\alpha$$

Natomiast kąt środkowy $\angle BOA$ jako dopełniający do kąta $\angle AOC$ równy jest

$$\angle BOA = 180^0 - \angle AOC = 180^0 - (180^9 - 2\alpha) = 2\alpha$$

Skąd kąt środkowy równy 2α jest dwa razy większy od kąta wpisanego α opartego na tym samym łuku l.

2. środek okręgu leży wewnątrz kąta wpisanego



Kąt wpisany $\angle DCA$.
Kąt środkowy $\angle DOA = 2\angle DCA$.

Zauważamy na wyżej podanym rysunku, że jedno ramie kątów środkowego $\angle DOA$ i wpisanego i $\angle DCA$, leży na średnicy okręgu DC. Oba te kąty oparte są na wspólnym łuku l_0. Zatem, jak w przypadku 1, kąt środkowy $\angle DOA$ jest dwa razy większy od kąta wpisanego $\angle DCA$, piszemy

$$\angle DOA = 2\angle DCA$$

Podobnie jedno ramie kątów środkowego $\angle BOD$ i wpisanego $\angle BCD$, leży na średnicy okręgu DC. Oba te kąty oparte są na łuku l_1. Zatem, jak w przypadku 1, kąt środkowy $\angle BOD$ jest dwa razy większy od kąta wpisanego $\angle BCD$, piszemy

$$\angle BOD = 2\angle BCD$$

Zauważmy również, że kąt środkowy $\angle BOA$ równy jest sumie kątów środkowych

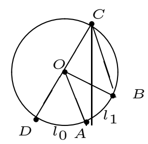
$$\begin{aligned}\angle BOA &= \angle DOA + \angle BOD \\ &= 2\angle DCA + 2\angle BCD \\ &= 2(\angle DCA + \angle BCD) = 2\angle BCA\end{aligned}$$

opartych na jednym wspólnym łuku $l = l_0 + l_1$.

Skąd wynika, że kąt środkowy $\angle BOA$ jest dwa razy większy od kąta wpisanego $\angle BCA$, piszemy równość

$$\angle BOA = 2\angle BCA$$

3. środek okręgu O leży na zewnątrz kąta wpisanego $\angle ACB$



Kąt wpisany $\angle ACD$ *.*
Kąt środkowy $\angle AOD = 2\angle ACD.$

Zauważamy na wyżej podanym rysunku, że jedno ramie kątów środkowego $\angle AOD$ i wpisanego i $\angle ACD$, leży na średnicy okręgu DC. Oba te kąty oparte są na wspólnym łuku l_0. Zatem, jak w przypadku 1, kąt środkowy $\angle AOD$ jest dwa razy większy od kąta wpisanego $\angle ACD$, piszemy

$$\angle AOD = 2\angle ACD$$

Podobnie jedno ramie kątów środkowego $\angle BOD$ i wpisanego $\angle BCD$, leży na średnicy okręgu DC. Oba te kąty oparte są na łuku $l_0 + l_1$. Zatem, jak w przypadku 1, kąt środkowy $\angle BOD$ jest dwa razy większy od kąta wpisanego $\angle BCD$, piszemy

$$\angle BOD = 2\angle BCD$$

Zauważmy również, że kąt środkowy $\angle BOA$ równy jest różnicy kątów środkowych BOD i AOD, piszemy

$$\begin{aligned}
\angle BOA &= \angle BOD - \angle AOD \\
&= 2\angle BCD - 2\angle ACD \\
&= 2(\angle BCD - \angle ACD) = 2\angle BCA
\end{aligned}$$

opartych na jednym wspólnym łuku l_1.

Skąd wynika, że kąt środkowy $\angle BOA$ jest dwa razy większy od kąta wpisanego $\angle BCA$, piszemy

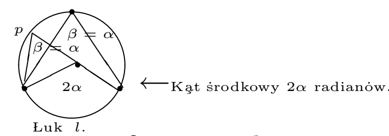
$$\angle BOA = 2\angle BCA$$

Z twierdzenia o kącie środkowym i kącie wpisanym w okrąg wynika następujący wniosek:

Wniosek 0.1 *Kąty wpisane w okąg oparte na tym samym łuku l są równe.*

Istotnie, jeżeli β jest kątem wpisanym opartym na łuku l o dowolnym wierzchołku p na okręgu to na podstawie twierdzenia o kącie środkowym i kącie wpisanym, kąt β jest równy połowie kąta środkowego równego 2α. piszemy

$$\beta = \alpha.$$



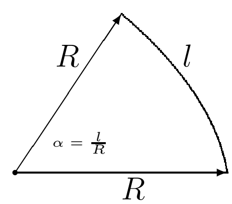
Kąt wpisany $\beta = \alpha$ radianów.

Zatem, kąt środkowy jest stały równy 2α, natomiast wierzchołek p kąta wpisanego może leżyć w dowolnym położeniu na okręgu.

0.0.3 Miara łukowa kąta.

Miarę łukową kąta środkowego α określamy jako stosunek długości łuku l opartego na kącie α do promienia R

$$\alpha = \frac{l}{R}$$



W istocie, miara łukowa kąta nie zależy od długowci promienia R. Dlatego możemy przyjąć $R = 1$.
Jednostdnostką miary łukowej kąta jest 1 radian. [2]

Definicja 0.1 *Jeden* 1 *radian to kąt środkowy oparty na łuku o długości promienia* R.

Kąt pełny ma $2 * \pi$ radianów, któremu w mierze kątowej odpowiada 360^0. Zatem, jeden stopnień

$$1^0 = \frac{2 * \pi}{360} = \frac{\pi}{180} radianow$$

natomiast

$$1 \; radian = \frac{180}{\pi} stopni.$$

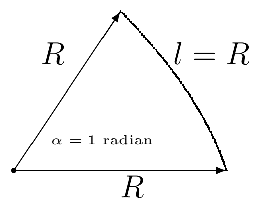
Przykład 0.1 *Oblicz miarę łukową kąta* 30^0.
Rozwiązanie. *Korzytamy z proporcji, kątowi* 180^0 *odpowiada miara łukowa tego kąta* π *radianów. Zatema kątowi* 30^0 *odpowiada miara łukowa* x *radianów. Tą proporcję zapisujemy równaniem*

$$\frac{\pi}{180} = \frac{x}{30}$$

[2] Nazwa radian pochodzi od słowa radius, to znaczy promień

Skąd obliczamy miarę łukową ką 30^0

$$x = \frac{30 * \pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

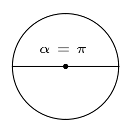


Kąt pełny, który w mierze kątowej ma 360^0 oparty jest na łuku $l = 2\pi * R$ równym obwodowi okręgu. Zatem miara łukowa kąta pełnego równa jest

$$\alpha = \frac{2\pi * R}{R} = 2\pi$$

Podobnie kąt półpełny, który w mierze kątowej ma 180^0 stopni oparty jest na łuku $l = \pi * R$ równym połowie obwodu okręgu. To znaczy, że miara łukowa kąta półpełnego równa jest

$$\alpha = \frac{\pi * R}{R} = \pi \quad radianow$$



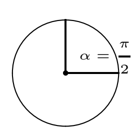
Kąt półpełny $\alpha = \pi$ *radianów.*

Również kąt prosty, który w mierze kątowej ma 90^0 stopni oparty jest na łuku

$$l = \frac{2\pi * R}{4} = \frac{\pi * R}{2}$$

równym czwartej części obwodu okręgu. To znaczy, że miara łukowa kąta prostego równa jest

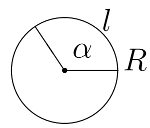
$$\alpha = \frac{2\pi * R}{4R} = \frac{\pi}{2} \quad radianow.$$



Kąt prosty $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *radianów.*

0.0.4 Długość łuku .

Długość łuku l opartego na kącie środkowym α w okręgu o promieniu R



Kąt środkowy α *radianów*

obliczamy z następującą proporcji:

$$\frac{dlugosc\ luku}{obwodu\ okregu} = \frac{kat\ srodkowy\ \alpha\ oparty\ na\ luku\ l}{kata\ pelnego}$$

$$\frac{l}{2\pi R} = \frac{\alpha}{360^0}, \quad dla \quad \alpha \quad w\ stopniach$$

$$\frac{l}{2\pi R} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad dla \quad \alpha \ \ w \ \ radianach$$

Skąd długość łuku

$$l = \frac{\pi * R * \alpha}{180} \quad dla\ \ \alpha\ w\ stopniach$$

$$lub$$

$$l = \alpha * R \quad dla\ \ \alpha\ w\ radianach.$$

Przykład 0.2 *Oblicz długość łuku l opartego na kącie środkowym α w okręgu o promieniu $R = 3$, jeżeli*

$$(i) \quad \alpha = 45^0, \qquad (ii) \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Rozwiązanie. Długość łuku l obliczamy z proporcji

$$(i) \quad \frac{l}{2\pi * 3} = \frac{45}{360} = \frac{1}{8}, \quad dla \quad \alpha = 45^0$$

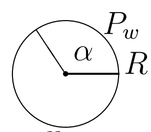
$$l = \frac{2 * \pi * 3}{8} = \frac{3 * \pi}{4}$$

$$(ii) \quad \frac{l}{2\pi * 3} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{1}{8} \quad dla \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$l = \frac{2 * \pi * 3}{8} = \frac{3 * \pi}{4}$$

0.0.5 Pole wycinka kołowego.

Pole wycinka kołowego P_w opartego na kącie środkowym α w okręgu o promieniu R



Kąt środkowy α radianów

obliczamy z następującą proporcji:

$$\frac{pole\ wycinka\ kolowego}{pole\ okregu} = \frac{kat\ srodkowy\ \alpha\ oparty\ na\ luku\ l}{kata\ pelnego}$$

$$\frac{P_w}{\pi R^2} = \frac{\alpha}{360^0}, \quad dla \quad \alpha \quad w\ stopniach$$

$$\frac{P_w}{\pi R^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad dla \quad \alpha \quad w \quad radianach$$

Skąd pole wycinka kołowego

$$P_w = \frac{\pi * R^2 * \alpha}{360} \quad dla\ \ \alpha\ w\ stopniach$$

$$lub$$

$$P_w = \frac{R^2 * \alpha}{2} \quad dla\ \ \alpha\ w\ radianach.$$

Przykład 0.3 *Oblicz pole wycinka kołowego P_w opartego na kącie środkowym α w okręgu o promieniu $R = 3$, jeżeli*

$$(i) \quad \alpha = 45^0, \qquad (ii) \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Rozwiązanie. Pole wycinka kołowego P_w obliczamy z proporcji

$$(i) \quad \frac{P_w}{\pi * 3^2} = \frac{45}{360} = \frac{1}{8}, \quad dla \quad \alpha = 45^0$$

$$P_w = \frac{\pi * 3^2}{8} = \frac{9 * \pi}{8}$$

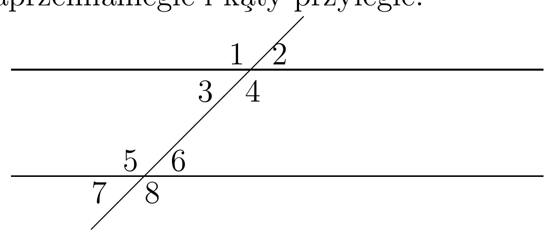
$$(ii) \quad \frac{P_w}{\pi * 3^2} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{1}{8} \quad dla \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$P_w = \frac{\pi * 3^2}{8} = \frac{9 * \pi}{8}$$

0.0.6 Proste równoległe. Kąty wierzchołkowe, odpowiadające, przyległe i naprzeciwległe.

Konstrukcja prostych równoległych. Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt oparta jest na rysowaniu równoległoboku. [3]

Opis konstrukcji: stwiamy nóżkę cyrkla w danym punkcje i zakreślamy okrąg, który przecina daną prostą w dwóch punktach. Łączymy pierwszy punkt przecięcia z danym punktem linijką. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla w drugim punkcie i tym samym promieniem zakreślamy drugi okrąg. Łączymy punkt przecięcia okręgów z danym punktem liniką. Widzimy, że w ten sposób narysowaliśmy prostą równoległą.
Na niżej danym rysunku mamy zaznaczone kąty wierzchołkowe, kąty odpowiadające, kąty naprzemianległe i kąty przyległe:



Dwie linie proste równoległe przecięte trzcią prostą

Kąty parami równe:

- kąty wierzchołkowe

$$\angle 1 = \angle 4, \quad \angle 2 = \angle 3, \quad \angle 5 = \angle 8, \quad \angle 6 = \angle 7$$

- kąty odpowiadające

$$\angle 1 = \angle 5, \quad \angle 3 = \angle 7, \quad \angle 2 = \angle 6, \quad \angle 4 = \angle 8$$

- kąty naprzemianległe wewnętrzne

$$\angle 3 = \angle 6, \quad \angle 4 = \angle 5,$$

- kąty naprzemianległe zewnętrzne

$$\angle 1 = \angle 8, \quad \angle 2 = \angle 7,$$

- kąty przyległe

$$\angle 1 \; i \; \angle 2, \quad \angle 3 \; i \; \angle 4, \quad \angle 1 \; i \; \angle 3, \quad \angle 2 \; i \; \angle 4$$

$$\angle 5 \; i \; \angle 6, \quad \angle 7 \; i \; \angle 8, \quad \angle 5 \; i \; \angle 7, \quad \angle 6 \; i \; \angle 8$$

[3] Zasada równoległoboku

0.1 Zadania

Zadanie 0.1 *Jeden z kątów wierzchołkowych równy jest* 30^0.

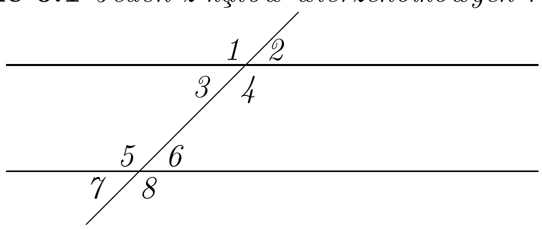


Fig. 4. Dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą

Oblicz wszystkie kąty
(a) wierchołkowe
(b) naprzemianległe
(c) odpowiadające
(d) przyległe
Zaznacz wartości wszystkich kątów na rysunku

Zadanie 0.2 *Wykaż, że suma kątów w dowolnym trójkącie równa jest* 180^0 *stopni, lub* π *radianów korzystając z własności kątów naprzemianległych.*

Konstrukcja prostych prostopadłych. Opis położenia prostych na płaszczyźnie zacznijmy od konstrukcji prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzacej przez dany punkt.
Stawiamy nóżkę cyrkla w danym punktcje i zakreślamy łuki przecinające daną prostą. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla w pierwszym punkcie przeciecia i zakreślamy okrąg, podobnie stawiamy nóżkę cyrkla w drugim punkcie przecięcia i zakreślamy drugi okrąg. Łączymy punkty przecięcia okręgów linijką. Widzimy, że w ten spób narysowaliśmy prostą prostopadłą do danej prostej i przechodzącą przez dany punkt.

Zadanie 0.3 *Narysuj prostą prostopadłą do prostej na rysunku i przechodzącej przez dany ponkt, według powyżeszego opisu.*

Zadanie 0.4 *Narysuj prostą równoległą do prostej na rysunku i przechodzącej przez dany ponkt*

Zadanie 0.5 *Oblicz kąt wpisany w okrąg wiedząc, że kąt środkowy oparty na tym samym łuku równy jest* 80^0. *Podaj odpowiedź w radianach.*

Zadanie 0.6 *Oblicz kąt wpisany w okrąg o promieniu* $R = 2$ *oparty na łuku* $l = \frac{\pi}{3}$.

Zadanie 0.7 *Oblicz miarę łukwą kątów*

$$(i) \quad 30^0, \qquad (ii) \quad 45^0, \qquad (iii) \quad 60^0$$

Zadanie 0.8 *Oblicz miarę łukwą kątów*

$$(i) \quad 120^0, \qquad (ii) \quad 150^0$$

Zadanie 0.9 *Oblicz długość łuku* l *opartego na kącie środkowym* α *w okręgu o promieniu* $R = 4$, *jeżeli*

$$(i) \quad \alpha = 30^0, \qquad (ii) \quad \alpha = 60^0, \qquad (iii) \quad \alpha = 120^0.$$

Zadanie 0.10 *Oblicz długość łuku* l *opartego na kącie środkowym* α *w okręgu o promieniu* $R = 5$, *jeżeli*

$$(i) \quad \alpha = \frac{\pi}{6}, \qquad (ii) \quad \alpha = \frac{\pi}{3}, \qquad (iii) \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

Zadanie 0.11 *Oblicz pole wycinka kołowego* P_w *opartego na kącie środkowym* α *w okręgu o promieniu* $R = 5$, *jeżeli*

$$(i) \quad \alpha = 30^0, \qquad (ii) \quad \alpha = 60^0, \qquad (iii) \quad \alpha = 120^0.$$

Zadanie 0.12 *Oblicz pole wycinka kołowego* P_w *opartego na kącie środkowym* α *w okręgu o promieniu* $R = 5$, *jeżeli*

$$(i) \quad \alpha = \frac{\pi}{6}, \qquad (ii) \quad \alpha = \frac{\pi}{3}, \qquad (iii) \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

Prof. dr Tadeusz STYŠ — Warszawa, grudzień 17, 2018 rok