Układy rȯwnaṅ liniowych.

0.1 Metoda eliminacji Gaussa

Uniwersalna metoda eliminacji Gaussa stosuje się z powodzeniem[1] do rozwiązywania układȯw n rȯwnaṅ liniowych z n niewiadomymi w skoṅczonej ilości operacji arytmetycznych, jeżeli operacje arytmetyczne wykonywane są zmałymi błędami zaokrąṅ. Ilośċ operacji arytmetycznych potrzebna do znalezienia rozwiązania n rȯwnaṅ z n niewiadomymi jest proporcjonalna do n^3.
Na przykład, jeżeli rozwiązujemy 1000 rȯwnaṅ z 1000 niewiadomymi to ilośċ operacji arytmrtycznych potrzebna do rozwiązania tego układu dla $n = 1000$ is rȯwna około $k * 1000^3 \approx 1000000$, dla pewnej stałej k.
Zacznijmy opis metody eleliminacji Gaussa od układu dwȯch rȯwnaṅ z dwiema niewiadomymi w postaci ogȯlnej

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_{23} \end{aligned} \tag{1}$$

Układ rȯwnaṅ (1) piszemy rȯwnież w postaci wektorowej

$$A\vec{x} = \vec{a},$$

w ktȯrej wektor-kolumna niewiadomych$\vec{x}$ i wektor-kolumna prawych stron $\vec{a}$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{a} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

oraz macierz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{(2\times 3)}$$

Example 0.1 *Rozwiąż układ dwȯch rȯwnaṅ liniowych z dwiema niewiadomymi* x_1 *i* x_2

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 = 12 \quad | * \ 3 \\ 6x_1 + 5x_2 = 27. \end{aligned} \tag{2}$$

Rozwiązanie.
Pierwszy krok eleminacji. W pierwszym kroku eleminacji eliminujemy niewiadomą x_1 z drugiego rȯwnania.

[1]Dla układȯw stabilnych

Żeby wyeliminować niewiadomą x_1 z drugiego rȯwnania, mnożymy pierwszwe rȯwnanie w układzie (2) przez współczynnik

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{6}{2} = 3,$$

i dejmujemy stronami od drugiego rȯwnania.
Wten sposȯb otrzymamy zredukowany układ dwȯch rȯwnań Gaussa eliminacj

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 12 \\ x_2 &= 3, \end{aligned} \tag{3}$$

Skąd obliczamy

$$x_2 = 3,$$

$$3x_1 + 2 * 3 = 2, \quad 3x_1 = 12 - 6 = 6,$$

$$x_1 = \frac{6}{3} = 2.$$

Sprawdzenie metodą starożytnych przez podstawienie rozwiązania $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$ do układu rȯwnań (2)[2]

$$\begin{aligned} 3 * 2 + 2 * 3 &= 12 \\ 6 * 2 + 5 * 3 &= 27 \end{aligned}$$

Example 0.2 *Rozwiąż układ trzech rȯwnań liniowch z trzema niewiadomymi x_1 i x_2*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 20 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 29 \end{aligned} \tag{4}$$

Rozwiązanie.

Pierwszy krok eleminacji. W pierwszym kroku eleminacji eliminujemy niewiadomą x_1 z drugiego rȯwnania i z rȯwnania trzeciego układu (4).
Żeby wyeliminować niewiadomą x_1 z drugiego rȯwnania, mnożymy pierwszwe rȯwnanie układu (4) przez współczynnik

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2},$$

[2]Metoda starożytnych polega na podstawieniu rozwiązania do orginalnego układu rȯwnań, nie zależnie od sposobu rozwiązania.

i dejmujemy stronami od drugiego równania. Wtedy otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 20| * \frac{3}{2} \\ -\frac{17}{2}x_2 - 4x_3 &= -29 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 29 \end{aligned} \tag{5}$$

Podobnie dejmujemy stronami od trzeciego równania równanie pierwsze pomnożone przez współczynnik

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{6}{2} = 3,$$

Po elminacji niewiadomej x_1 z drugiego i z trzeciego równania otrzymamy pierwszy zredukowany układ równań liniowych

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 20| * \frac{6}{2} = 3 \\ -\frac{17}{2}x_2 - 7x_3 &= -38 \\ -5\,x_2 - 7x_3 &= -31 \end{aligned} \tag{6}$$

Drugi krok eleminacji. W drugim kroku eleminacji eliminujemy niewiadomą x_2 z traciego równania układu (6) .
Żeby wyeliminować niewiadomą x_3 z trzeciego równania układu (6) , mnożymy drugie równanie równanie przez współczynnik

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{-5}{-\frac{17}{2}} = \frac{10}{17},$$

i dejmujemy stronami od trzeciego równania układu (6).
W ten sposób otrzymamy zredukowany system trzech równań Gaussa eliminacji

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 20| * \frac{6}{2} = 3 \\ -\frac{17}{2}x_2 - 7x_3 &= -29| * \frac{10}{17} \\ -\frac{49}{17}x_3 &= -\frac{147}{17} \end{aligned}$$

Skąd obliczamy

$$49x_3 = 147, \qquad x_3 = \frac{147}{49} = 3$$

$$-\frac{17}{2}x_2 - 7*3 = -38, \qquad -17x_2 = -38*2 + 7*3*2 = -76 + 42 = -34,$$

$$x_2 = \frac{-34}{-17} = 2,$$

$$2x_1 + 3*2 + 4*3 = 20, \quad 2x_1 = 20 - 6 - 12 = 2,, \quad x_1 = \frac{2}{2} = 1.$$

Sprawdzenie metodą starożytnych przez podstawienie rozwiązania $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ i $x_3 = 3$ do układu równań (4)[3]

$$\begin{aligned} 2*1 + 3*2 + 4*3 &= 20 \\ 3*1 - 4*2 + 2*3 &= 1 \\ 6*1 + 4*2 + 5*3 &= 29 \end{aligned}$$

Example 0.3 *Rozwiąż układ czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi* $x_1,\ x_2,\ x_3$ *i* x_4

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 4 \qquad | \, m_{21} = 2 \, | \, m_{31} = 3 \, | \, m_{41} = 4 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= -7 \\ 6x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 &= 1 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 7 \end{aligned} \tag{7}$$

Pierwszy krok eliminacji. W pierwszym kroku eliminacji Gaussa eliminujemy niewiadomą x_1 z drugiego, trzeciego i z czwartego równania układu (7).
Żeby wyeliminować niewiadomą x_1 z drugiego równania układu (7), mnożymy pierwszwe równanie przez współczynnik

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{4}{2} = 2$$

i dejmujemy stronami od drugiego równania.
W ten sposòb otrzymamy drugie zredukowane równanie

$$-5x_2 - 7x_3 + 4x_4 = -15.$$

Żeby wyeliminować niewiadomą x_1 z trzeciego równania, mnożymy pierwszwe równanie przez współczynnik

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{6}{2} = 3$$

[3]Metoda starożytnych polega na podstawieniu rozwiązania do orginalnego układu równań, nie zależnie od sposobu rozwiązania.

i odejmujemy tronami ròwnania.
W ten sposòb otzymamy trzecie zredukowane ròwnanie

$$x_2 - 15x_3 + 8x_4 = -11.$$

Żeby wyeliminowaċ niewiadomą x_1 z czwartego ròwnania, mnożymy pierwszwe ròwnanie przez współczynnik

$$m_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}} = \frac{8}{2} = 4$$

i odejmujemy stronamy ròwnania.
W ten sposòb otrzymamy czwarte zredukowane ròwnanie

$$-2x_2 - 15x_3 + 10x_4 = -9.$$

Po wykonaniu pierwszego kroku eleiminacji niewiadomej x_1 otrzymamy
Pierwszy zredukowany układ ròwnań liniowych

$$\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & -3x_4 & = & 4 \\ & -5x_2 & -7x_3 & +4x_4 & = & -15 \qquad \mid m_{32} = -\frac{1}{5} \mid m_{42} = \frac{2}{5} \\ & x_2 & -15x_3 & +8x_4 & = & -11 \\ & -2x_2 & -15x_3 & +10x_4 & = & -9 \end{array} \tag{8}$$

Drugi krok eliminacji. W drugim kroku eliminacji Gaussa eliminujemy niewiadomą x_2 z ròwnania trzeciego i z ròwnania czwartego układu (8).
Żeby wyeliminowaċ niewiadomą x_2 z trzeciego ròwnania, mnożymy drugie ròwnanie w zredukowanym układzie ròwnań (8) przez współczynnik

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{1}{-5}$$

i odejmujemy od ròwnania trzeciego.
W ten sposòb otrzymamy zredukowane ròwnanie trzecie

$$-\frac{82}{5}x_3 + \frac{44}{5}x_4 = -14.$$

Żeby wyeliminowaċ niewiadomą x_2 z czwartego ròwnania, mnożymy drugie ròwnanie w zredukowanym układzie ròwnań (8) przez współczynnik

$$m_{42} = \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{-2}{-5}$$

i odejmujemy od ròwnania czwartego.
W ten sposòb otrzymamy zredukowane ròwnanie czwarte

$$-\frac{61}{5}x_3 + \frac{42}{5}x_4 = -3.$$

Po wykonaniu drugie kroku eliminacji otrzymamy następujący zredukowany układ równań liniowych

$$\begin{array}{rrrrrrrrl} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 = & 4 & \\ & - & 5x_2 & - & 7x_3 & + & 4x_4 = & -15 & \\ & & & - & \dfrac{82}{5}x_3 & + & \dfrac{44}{5}x_4 = & -14 & \mid m_{43} = \dfrac{61}{82} \\ & & & - & \dfrac{61}{5}x_3 & + & \dfrac{42}{5}x_4 = & -3 & \end{array} \tag{9}$$

Trzeci krok eleminacji. W trzecim kroku eleminacji eliminujemy niewiadomą x_3 z czwartego równania.
Żeby wyeliminować niewiadomą x_3 z czwartego równania, mnożymy trzecie równanie przez współczynnik

$$m_{43} = \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = \frac{61}{82}$$

i dejmujemy stronami od czwartego równania.
W ten sposób otrzymamy zredukowane czwarte równanie

$$\frac{76}{41}x_4 = \frac{304}{41}.$$

W rezultacie eliminacji kolejnych niewiadomych x_1, x_2 i x_3 dojszliśmy do trzeciego zredukowanego układu równań liniowych.
Trzeci układ zredukowany

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 4 \\ & - & 5x_2 & - & 7x_3 & + & 4x_4 & = & -15 \\ & & & - & \dfrac{82}{5}x_3 & + & \dfrac{44}{5}x_4 & = & -14 \\ & & & & & & \dfrac{76}{41}x_4 & = & \dfrac{304}{41} \end{array} \tag{10}$$

Zauważmy, że trzeci zredukowany układ równań liniowych ma postać trójkątną górną i jego rozwiązanie łatwo znajdujemy przez podstawienie zaczynając od końca.
Istotnie, z czwartego równania znajdujemy

$$x_4 = \frac{\frac{304}{41}}{\frac{76}{41}} = 4,$$

z trzeciego równania znajdujemy

$$x_3 = -\frac{5}{82}(-14 - \frac{44}{5}4) = 3,$$

z drugiego rȯwnania znajdujemy

$$x_2 = -\frac{1}{5}(-15 + 7*3 - 4*4) = 2,$$

i z pierwszego rȯwnania zndajdujemy

$$x_1 = \frac{1}{2}(4 - 1*2 - 4*3 + 3*4) = 1.$$

W systemie `Mathematica` program

```
n=4;
a={{2,1,4,-3,4},{4,-3,1,-2,-7},{6,4,-3,-1,1},{8,2,1,-2,7}};
     fi[a_,i_]:=ReplacePart[a,a[[i]]-      a[[s]]*a[[i,s]]/a[[s,s]],i];
     iter[a_,s_]:=Fold[fi,a,Range[s+1,n]];

     Do[a=iter[a,s],{s,1,n}];
     MatrixForm[a]
```

oblicza macierz trȯjkątną gȯrną

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & -7 & 4 & -15 \\ 0 & 0 & -\frac{82}{5} & \frac{44}{5} & -14 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{76}{41} & \frac{304}{41} \end{array}$$

Rȯwnie:z w w systemie *Mathematica* rozwiązanie $x = \{1, 2, 3, 4\}$ układu rȯwnań (7) znajdziemy wykonując następujący program

```
x=Table[0,{i,1,n}]; x[[n]]=a[[n,n+1]]/a[[n,n]];
Do[x[[n-i]]=(a[[n-i,n+1]]-
Sum[a[[n-i,j]]*x[[j]],{j,n-i+1,n}])/a[[n-i,n-i]],{i,1,n-1}];
```

Teraz, podajmy metodę eliminacji Gaussa w zastosowaniu do układu n rȯwnań z n niewiadomymi.

0.2 Metoda eliminacji Gaussa w ogȯlnej formie

Dowolny układ rȯwnań liniowych piszemy w następującej ogȯlnej formie

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2n+1} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = a_{3n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{nn+1} \end{array} \tag{11}$$

lub w formie wektorowej

$$A\vec{x} = \vec{a},$$

gdzie wektor niewiadomych $\vec{x}$ i wektor danych prawych stron $\vec{a}$:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad a = \begin{bmatrix} a_{1n+1} \\ a_{2n+1} \\ a_{3n+1} \\ \vdots \\ a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

oraz macierz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Zakładamy, że macierz A jest nieosobliwa, to znaczy jej wyróżnik $\Delta \neq 0$ jest różny od zera. Wtedy układ równań liniowych (11) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Teraz podamy ogólny schemat rozwiązania układu równań liniowych (11)
Pierwszy krok eliminacji. W pierwszym kroku eliminacji eliminujemy niewiadomą x_1 z drugiego, trzeciego, i z ...,n-th równania, jeżeli $a_{11} \neq 0$.
Żeby wyeliminować niewiadomą x_1 z drugiego równania,trzecie itd..., aż do równania n-tego mnożymy pierwsze równanie w układzie (11) przez współczynnik

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

i odejmujemy stronami pierwsze równanie od drugiego, trzeciego i od i-tego równania dla $i = 2, 3, \ldots, n$.
W ten sposób dojdziemy do pierwszego zredukowanego układu r ownań
Pierwszy zredukowany układ równań

$$\begin{aligned} a_{11}^{(0)}x_1 + \quad & a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(0)}x_n = a_{1n+1}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2n+1}^{(1)} \\ & a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(1)}x_n = a_{3n+1}^{(1)} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n = a_{nn+1}^{(1)} \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie

$$a_{ik}^{(0)} = a_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1,$$

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ik}^{(0)} - m_{i1}a_{1k}^{(0)}, \qquad i = 2, 3, \ldots, n; \quad k = 2, 3, \ldots, n+1.$$

Drugi zredukowany układ rȯwnań
Drugi krok eliminacji. W drugim kroku eliminacji eliminujemy niewiadomą x_2 z trzeciego, i z ...,n-th rȯwnania, jeżeli $a_{22}^{(1)} \neq 0$.
Żeby wyeliminować niewiadomą x_1 z trzeciego, czwrtego rȯwnania, itd..., aż do rȯwnania n-tego mnożymy drugie w układzie (12) przez współczynnik

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad i = 3, 4, \ldots, n$$

i odejmujemy stronami drugie rȯwnanie od trzeciego i od i-tego rȯwnania dla $i = 2, 3, \ldots, n$.
W ten sposȯb dojdziemy do drugiego zredukowanego układu rȯwnań liniowych

Drugi zredukowany układ rȯwnań

$$\begin{array}{rrr}
a_{11}^{(0)}x_1 + & a_{12}^{(0)}x_2 + & a_{13}^{(0)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(0)}x_n = a_{1n+1}^{(0)} \\
 & a_{22}^{(1)}x_2 + & a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2n+1}^{(1)} \\
 & & a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = a_{3n+1}^{(2)} \\
 & & a_{43}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{4n}^{(2)}x_n = a_{4n+1}^{(2)} \\
 & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & & a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n = a_{nn+1}^{(2)}
\end{array} \tag{13}$$

gdzie

$$a_{ik}^{(2)} = a_{ik}^{(1)} - m_{i2}a_{2k}^{(1)}, \quad i = 3, 4, \ldots, n, \quad k = 3, 4, \ldots, n+1.$$

Kontynuujemy eleminacje kolejnych niewiadomych $x_3, x_4 \ldots, x_{n-1}$, jeżeli współczynniki that $a_{33}^{(2)} \neq 0,\ a_{44}^{(3)} \neq 0,\ a_{55}^{(4)} \neq 0,\ \ldots\ a_{n-1n-1}^{(n-2)} \neq 0.$
W ostatnim kroku eliminacji dojdziemy do ostatniego układu rȯwnań liniowych
Ostatni zredukowany układ eliminacji Gaussa

$$\begin{array}{rrrcr}
a_{11}^{(0)}x_1 + & a_{12}^{(0)}x_2 + & a_{13}^{(0)}x_3 + & \cdots & +a_{1n}^{(0)}x_n = a_{1n+1}^{(0)} \\
 & a_{22}^{(1)}x_2 + & a_{23}^{(1)}x_3 + & \cdots & +a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2n+1}^{(1)} \\
 & & a_{33}^{(2)}x_3 + & \cdots & +a_{3n}^{(2)}x_n = a_{3n+1}^{(2)} \\
 & & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & & & & a_{nn}^{(n-1)}x_n = a_{nn+1}^{(n-1)}
\end{array} \tag{14}$$

gdzie

$$a_{ik}^{(s)} = a_{ik}^{(s-1)} - m_{is}a_{sk}^{(s-1)}, \quad m_{is} = \frac{a_{is}^{(s-1)}}{a_{ss}^{(s-1)}}.$$

$$s = 1, 2 \ldots, n-1, \quad i = s+1, s+2, \ldots, n, \quad k = s+1, s+2, \ldots, n+1.$$

Zauważmy, że ostatni zredukowany układ równań liniowych (**??**) ma postać trójkątną górną i jego rozwiązanie łatwo znajdujemy przez podstawienie zaczynając od końca.

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{a_{nn+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \\ x_i &= \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}}[a_{in+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)}x_j], \end{aligned} \tag{15}$$

dla $i = n-1, n-2, \ldots, 1$.
W systemie *Mathematica* rozwiązanie układu równań liniowych dostaniemy wykonując jedną instrukcję

```
LinearSolve[A,b]
```

gdzie dana macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}_{(n \times n)}$$

i dana kolumna prawych stron

$$b = \begin{bmatrix} a_{1n+1} \\ a_{2n+1} \\ a_{3n+1} \\ \cdots \\ a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

Na przykład, przy aktynym systemie *Mathematica*, wprowadzamy macierz A wymiarów 4×4 jako listę w nawiasach klamrowych jak niżej

```
n=4;
     A={{2,1,4,-3,4},{4,-3,1,-2,-7},
        {6,4,-3,-1,1},{8,2,1,-2,7}};
```

oraz wektor prawych stron

```
b={4,-7,1,7}
```

Następnie wykonujemy *Mathematica* instrukcję

```
LinearSolve[A,b]
```

W rezultacie otrzymamy rozwiązanie w formie listy

```
{1,2,3,4}
```

Zadanie 0.1 *Rozwiąż układ czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi* $x_1,\ x_2,\ x_3$ *i* x_4

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = & 35 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 & = & 22 \\ 8x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 4x_4 & = & 26 \\ 9x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 & = & 34 \end{array} \tag{16}$$

Sprawdź rozwiązanie metodą starożytnych.

Prof. dr Tadeusz STYŠ Warszawa, listopad 3, 2018