System liczbowy dziesiętny.

0.1 Wstęp

Ogólna forma systemów pozycyjnych liczbowych ma postać wielomianu

$$\alpha_{n-1}\rho^{n-1} + \alpha_{n-2}\rho^{n-2} + \cdots + \alpha_2\rho^2 + \alpha_1\rho + \alpha_0, \tag{1}$$

gdzie liczbę naturalną $\rho \geq 2$ nazywamy podstawą systemu liczbowego. Natomiast współczynniki $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, ..., \alpha_1, \alpha_0$ nazywamy cyframi systemu liczbowego. Cyfry systemu liczbowego o podstawie ρ są to liczby jednocyfrowe:

$$0, 1, 2, 3, ..., \rho - 1$$

z których tworzone są liczby systemu. Ilość cyfr zależy od podstawy ρ i jest równa ρ.
Samą liczbę x piszemy umownie jako następujący ciąg cyfr

$$x = (\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0)_\rho$$

W przypadku systemu dziesiętnego, który jest powszechnie używany, nawias z indeksem ρ opuszczamy

$$(\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0)_\rho.$$

Wtedy liczbę dziesiętną piszemy bez nawiasu

$$x = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0$$

jako ciąg współczynników wielomianu (1).

0.2 Przykłady zapisu liczb w różnych systemach

Przykład 0.1 *W systemie dziesiętnym $\rho = 10$. Liczbę*

$$x = 2 * 10 + 4 = 24$$

piszemy bez nawiasu $x = 24$

Przykład 0.2 *W systemie binarnym $\rho = 2$. Tą samą liczbę*

$$x = 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 = 24$$

piszemy z nawiasem $x = (10000)_2$

Przykład 0.3 *W systemie oktalnym $\rho = 8$. Tą samą liczbę*

$$x = 3 * 8 + 0 = 24$$

piszemy z nawiasem $x = (30)_8$

0.3 System dziesiętny. Decymalny

W systemie dziesiętnym podstawa $\rho = 10$. Wtedy dla $\rho = 10$ wielomian jest wyrażeniem algebraicznym

$$a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \cdots + a_1 10 + a_0 = a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0$$

Współczynniki tego wyrażenia są cyframi $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$, gdzie
α_0 oznacza ilość jedności liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^0 = 10^0$.
α_1 oznacza ilość dziesiątek liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^1 = 10$.
α_2 oznacza ilość setek liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^2 = 10^2$.
α_3 oznacza ilość tysięcy liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^3 = 10^3$.
....
α_{n-1} oznacza współczynnik przy potędze $\rho^{n-1} = 10^{n-1}$.
Najbardziej znacząca cyfra jest zawsze większa lub równa 1, $\alpha_{n-1} \geq 1$.
Cyfry systemu dziesiętnego

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

są jednocześnie liczbami jednocyfrowymi
Liczby dwucyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_1 * 10 + a_0 = a_1a_0$$

gdzie cyfrą dziesiątek jest współczynnik a_1, cyfrą jedności jest współczynnik a_0

Przykład 0.4 *Liczba* $x = 57$

*5*10+7= 57*

Tytaj cyfra dziesiątek $a_1 = 5$, *cyfra jedności* $a_0 = 7$.

Liczby trzycyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_2 * 100 + a_1 * 10 + a_0 = a_2a_1a_0$$

lub w zapisie potęgi podstawy 10, piszemy

$$100 = 10 * 10 = 10^2, \;\; 10^1 = 10, \;\; 10^0 = 1$$

wtedy liczba trzycyfrowa ma ogólną postać

$$a_2 * 10^2 + a_1 * 10^1 + a_0 * 10^0 = a_2a_1a_0$$

Przykład 0.5 $x = 348$

$$3 * 10^2 + 4 * 10^1 + 8 * 10^0 = 348$$

gdzie cyfra setek $a_2 = 3$, *cyfra dziesiątek* $a_1 = 4$, *cyfra jedności* $a_0 = 8$.

Ogólnie liczby n-cyfrowe w pozycyjnym systemie dziesiętnym zapisujemy jako współczynniki wyrażenia algebraicznego

$$a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + a_{n-3}10^{n-3} + \cdots + a_1 10 + a_0 = a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0$$

gdzie potęga podstawy 10

$$\begin{aligned}
&10^1 = \underbrace{10}_{1} \\
&10^2 = \underbrace{10 * 10}_{2} \\
&10^3 = \underbrace{10 * 10 * 10}_{3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&10^{n-3} = \underbrace{10 * 10 * 10 * ... * 10}_{n-3} \\
&10^{n-2} = \underbrace{10 * 10 * 10 * ... * 10}_{n-2} \\
&10^{n-1} = \underbrace{10 * 10 * 10 * ... * 10}_{n-1}
\end{aligned}$$

oznacza liczbę 10 pomnożoną przez siebie 1 raz lub 2 razy lub 3 razy itd...$n-3$ razy $n-2$ razy i $n-1$ razy. Liczba 10 pomnożona przez siebie zero razy $10^0 = 1$.

Przykład 0.6 *Niech $n = 4$, wtedy liczbę czterocyfrowa x=7831.*
piszemy w postaci wyrażenia arytmetycznego

$$7 * 1000 + 8 * 100 + 3 * 10 + 1 = 7831$$

lub w symbolach potegi $1000 = 10 * 10 * 10 = 10^3, \quad 100 = 10 * 10 = 10^2, \quad 10 = 10^1, \quad 10^0 = 1$

$$7 * 10^3 + 8 * 10^2 + 3 * 10^1 + 1 = 7831$$

gdzie cyfra tysięcy $a_3 = 7$, cyfra setek $a_2 = 8$, cyfra dziesiątek $a_1 = 3$, cyfra jedności $a_0 = 1$.

0.4 Operacje arytmetyczne w systemie dziesiętnym

Operacje arytmetyczne w systemie dziesiętnym wykonujemy w kolejności:
mnożenie, dzielenie, dodawanie i odejmowanie.
Ten porządek wykonywania operacji arytmetycznych może być zmieniony przez nawiasy.

0.4.1 Dodawanie

Tabliczka dziesiętnego dodawania

	Dodawanie				dziesiętne					
+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Dodawanie dziesiętne pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 0.7 *Wykonaj dodawanie liczb dziesiętnych* 25 *i* 13

Wykonujemy pisemne dodawanie $25 + 13$, stosując tabliczkę dziesiętnego dodawania.

$$\begin{array}{cc} & 25 \\ + & 13 \\ & -- \\ & 38 \end{array}$$

Przykład 0.8 *Wykonaj dodawanie liczb dziesiętnych* 89 *i* 56

Wykonujemy pisemne dodawanie $25 + 13$, stosując tabliczkę dziesiętnego dodawania.

$$\begin{array}{cc} & 89 \\ + & 56 \\ & -- \\ & 145 \end{array}$$

0.4.2 Odejmowanie

Tabliczka dziesiętnego odejmowania

	Odejmowanie				dziesiętne					
-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Odejmowanie pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 0.9 *Wykonaj odejmowanie liczb dziesiętnych* 29 *i* 18

Wykonujemy pisemne oktalne odejmowanie $29 - 18$, stosując tabliczkę odejmowania.

$$\begin{array}{rr} & 29 \\ - & 18 \\ & -- \\ & 11 \end{array}$$

Przykład 0.10 *Wykonaj odejmowanie liczb dziesiętnych* 629 *i* 354

Wykonujemy pisemne oktalne odejmowanie $629 - 354$, stosując tabliczkę odejmowania.

$$\begin{array}{rr} & 629 \\ - & 354 \\ & -- \\ & 275 \end{array}$$

0.4.3 Mnożenie

Tabliczka mnożenia

	Mnożenie				dziesiętne					
*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Mnożenie pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 0.11 *Wykonaj mnożenie pisemne liczb dziesiętnych* 49 *i* 15

Wykonujemy pisemne binarne mnożenie $49 * 15$, stosując tabliczkę mnożenia i dodawania.

$$
\begin{array}{r}
49 \\
* \; 15 \\
- - - \\
245 \\
49 \\
- - - \\
735
\end{array}
$$

Przykład 0.12 *Wykonaj mnożenie pisemne liczb dziesiętnych* 345 *i* 123

Wykonujemy pisemne mnożenie $345 * 123$, stosując tabliczkę mnożenia i dodawania.

$$
\begin{array}{r}
345 \\
* \; 123 \\
- - - \\
1035 \\
690 \\
345 \\
- - - \\
42435
\end{array}
$$

0.4.4 Dzielenie

Dzielenie pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 0.13 *Wykonaj dzielenie pisemne liczb dziesiętnych* 345 *podziel przez* 5

Wykonujemy pisemne dzielenie 345 : 5.

$$
\begin{array}{l}
\quad 69 \\
- - - \\
\;\; 345 : 5 \\
-30 \\
\;-- \\
\quad 45 \\
\quad 45 \\
\; - - - \\
\quad =
\end{array}
$$

Przykład 0.14 *Wykonaj pisemne dzielenie liczb dziesiętnych* 1659 *przez* 21

Wykonujemy pisemne dzielenie 1659 : 21.

$$
\begin{array}{l}
\quad 79 \\
- - - \\
\;\; 1659 : 21 \\
-147 \\
\;-- \\
\quad 189 \\
\quad 189 \\
- - -- \\
\quad =
\end{array}
$$

0.5 Liczby parzyste

Własności liczb parzystych:

1. Liczby parzyste mają cyfry jedności 0 lub 2 lub 4 lub 6 lub 8.
   Na przkład liczby
   $$120,\ 132,\ 134,\ 156,\ 178$$
   mają odpowiednio cyfry jedności
   $$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$$
2. Liczby parzyste są podzielne przez 2, zatem mają ogólną postać
   $$n = 2 * k, \quad \text{dla} \;\; k = 0, 1, 2, 3, ...;$$
   Na przykład
   $$
   \begin{array}{ll}
   k = 0, & n = 2 * 0 = 0, \\
   k = 1, & n = 2 * 1 = 2, \\
   k = 2, & n = 2 * 2 = 4, \\
   .... & ..... \\
   k = 8, & n = 2 * 8 = 16, \\
   k = 26, & n = 2 * 26 = 52.
   \end{array}
   $$

3. Suma, różnica i iloczyn liczb parzystych jest liczbą parzystą
   Na przykład:
$$a = 8, \quad b = 6,$$
$$a + b = 8 + 6 = 14, \quad a - b = 8 - 6 = 2, \quad a * b = 8 * 6 = 48$$

0.6 Liczby nieparzyste

Własności liczb nieparzystych:

1. Liczby nieparzyste mają cyfry jedności 1 lub 3 lub 5 lub 7 lub 9.
   Na przkład liczby
$$121, \ 133, \ 135, \ 157, \ 179$$
   mają odpowiednio cyfry jedności
$$1, \ 3, \ 5, \ 7, \ 9$$

2. Liczby nieparzyste mają ogólną postać
$$n = 2 * k + 1, \quad \text{lub} \ \ n = 2 * k - 1, \quad \text{dla} \ \ k = 0, 1, 2, 3, ...;$$
   Na przykład
$$\begin{array}{lll} k = 0, & n = 2 * 0 + 1 = 1, & lub \ \ n = 2 * 0 - 1 = -1 \\ k = 1, & n = 2 * 1 + 1 = 3, & lub \ \ n = 2 * 1 - 1 = 1 \\ k = 2, & n = 2 * 2 + 1 = 5, & lub \ \ n = 2 * 2 - 1 = 3 \\ .... & ..... & \\ k = 8, & n = 2 * 8 + 1 = 17, & lub \ \ n = 2 * 8 - 1 = 15 \\ k = 26, & n = 2 * 26 + 1 = 53 & lub \ \ n = 2 * 26 - 1 = 51 \\ . & & \end{array}$$

3. Iloczyn liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą
   Na przykład:
$$5 * 7 = 35, \quad 7 * 11 = 77, \quad 9 * 15 = 105$$

4. Suma lub różnica dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą. Podaj przykład.

5. Natomiast suma lub różnica liczby nieparzystej i liczby parzystej jest liczbą nieparzysta. Podaj przykład.

0.7 Ćwiczenia

Zadanie 0.1 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 51. Znajdz te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne liczby nieparzyste to

$$2n+1, \quad 2n+3, \quad 2n+5.$$

Ich suma

$$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5) = 6n+9 = 51$$

Obliczamy n:

$$6n+9=51, \qquad 6n=42, \qquad n=42:6=7$$

Obliczmy trzy kolejne liczby parzyste

$$2n+1=2*7+1=15, \quad 2n+3=2*7+3=17, \quad 2n+5=2*7+5=19.$$

Sprawdzenie:

$$15+17+19=51$$

Zadanie 0.2 *Suma pięciu kolejnych liczb parzystych równa jest 200. Znajdz te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne liczby parzyste to

$$2n-4, \quad 2n-2, \quad 2n, \quad 2n+2, \quad 2n+4.$$

Ich suma

$$(2n-4)+(2n-2)+2n+(2n+2+(2n+4) = 10n = 200$$

Obliczamy n:

$$10n=200, \qquad n=200:10=20$$

Obliczmy pięć kolejnych liczb parzystych

$$2n-4=2*20-4=36, \quad 2n-2=2*20-2=38, \quad 2n=2*20=40,$$
$$2n+2=2*20+2=42, \quad 2n+4=2*20+4=44.$$

Sprawdzenie:

$$36+38+40+42+44=200.$$

Zadanie 0.3 *Suma czterech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 160. Znajdz te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne cztery liczby nieparzyste to

$$2n-3, \quad 2n-1, \quad 2n+1 \quad 2n+3.$$

Ich suma

$$(2n-3)+(2n-3)+(2n+1)+(2n+3)=8n=160$$

Obliczamy n:

$$8n=160, \quad \text{to} \quad n=160:8=20$$

Obliczmy cztery kolejne liczby nieparzyste

$$2n-3=2*20-3=37, \quad 2n-1=2*20-1=39,$$

$$2n+1=2*20+1=41, \quad 2n+3=2*20+3=43.$$

Sprawdzenie:

$$37+39+41+43=160$$

Zadanie 0.4 *Oblicz sumę*

$$S_{10}=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc} S_{10} & = & 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \\ S_{10} & = & 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 \\ --- & ... & -------------------- \\ 2*S_{10} & = & \underbrace{11+11+11+11+11+11+11+11+11+11}_{10\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{10} używając jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

$$S_{10}=10*11:2=55$$

Zadanie 0.5 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb naturalnych*

$$S_n=1+2+3+\cdots+n$$

Podaj przkład zastosowania tego wzoru.używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy równości stronami, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc} S_n & = & 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n \\ S_n & = & n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1 \\ --- & ... & -------------------- \\ 2*S_n & = & \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_n.

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{10}

$$S_{10} = \frac{10 * 11}{2} = 55$$

Zadanie 0.6 *Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb parzystych*

$$S_{10} = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości

$$\begin{array}{ccc} S_{20} & = & 2 + 4 + +6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 \\ S_{20} & = & 20 + 18 + 16 + 14 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 \\ - - - & ... & - \\ 2 * S_{20} & = & \underbrace{22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22}_{10\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{20}

$$S_{20} = 10 * 22 : 2 = 110 \quad \text{lub } \mathrm{S}_{20} = \frac{10 * 22}{2} = 110$$

Zadanie 0.7 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb parzystch*

$$S_n = 2 + 4 + \cdots + (2n - 2) + 2n$$

Podaj przkład zastosowania tego wzoru.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości

$$\begin{array}{cccccccc} S_{2n} & = & 2+ & 4+ & 6+ & \cdots + & 2n-2+ & 2n \\ S_{2n} & = & 2n+ & (2n-2)+ & (2n-4)+ & \cdots + & 4+ & 2 \\ - - - & ... & - - - & - - - & - - - & \cdots & - - - & - - - \\ 2 * S_{2n} & = & (2n+2)+ & (2n+2)+ & (2n+2)+ & \cdots + & (2n+2)+ & (2n+2) \\ & & \multicolumn{6}{c}{\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{n\ skladnikow\ sumy}} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{2n}.

$$S_{2n} = \frac{n(2n+2)}{2} = \frac{2n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{20}

$$S_{20} = \frac{10 * 22}{2} = 10 * 11 = 110$$

Zadanie 0.8 *Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb nieparzystych*

$$S_{19} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy równości stronami:

$$\begin{array}{ccc}
S_{19} & = & 1 \ \ + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 \\
S_{19} & = & 19 + 17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 \\
--- & ... & ------------------- \\
2 * S_{19} & = & \underbrace{20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20}_{10\ skladnikow\ sumy}
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{19} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{19} = 10 * 20 : 2 = 100 \quad \text{lub} \ \ \mathrm{S}_{19} = \frac{10 * 20}{2} = 100$$

Zadanie 0.9 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb nieparzystch*

$$S_n = 1 + 3 + \cdots + (2n - 3) + (2n - 1)$$

Podaj przkład zastosowania tego wzoru.używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{cccccccc}
S_{2n-1} & = & 1+ & 3+ & 5+ & \cdots + & (2n-3)+ & (2n-1) \\
S_{2n-1} & = & (2n-1)+ & (2n-3)+ & (2n-5)+ & \cdots + & 3+ & 1 \\
--- & ... & --- & --- & --- & \cdots & --- & --- \\
2 * S_{2n-1} & = & 2n+ & 2n+ & 2n+ & \cdots + & 2n+ & 2n
\end{array}$$

$$\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{n\ skladnikow\ sumy}$$

Skąd obliczmy sumę S_{2n-1}.

$$S_{2n-1} = \frac{n * 2n}{2} = n * n = n^2$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{19}

$$S_{19} = 10 * 10 = 100$$

Zadanie 0.10 *Udowodnij, że wyrażenie algebraiczne*

$$a^2 + (a + 2)(a + 2) + (a + 4)(a + 4) + 1$$

jest podzielne przez 12 *dla każdej nieparzystej liczby a.*

Rozwiązanie:
Ponieważ liczba a jest nieparzysta to dla pewnego n

$$a = 2 * n - 1$$

gdyż dla każdej liczby nieprazystej jest naturalne n, takie że

$$a = 2 * n - 1$$

Podstawiając do tego wyrażenia algebraicznego

$$a = 2 * n - 1$$

otrzymamy

$$\begin{aligned}
&a^2 + (a+2)(a+2) + (a+4)(a+4) + 1 = \\
&= (2*n-1)(2*n-1) + (2*n-1+2)(2*n-1+2) + (2*n-1+4)(2*n-1+4) + 1 = \\
&= (4*n*n-4*n+1) + (2*n+1(2*n+1) + (2*n+3)(2*n+3) + 1 = \\
&= (4*n^2-4*n+1) + (4*n^2+4*n+1) + (4*n^2+12*n+9) = \\
&= 12*n^2 + 12*n + 12 = \\
&= 12*(n^2+n+1)
\end{aligned}$$

Dla każdej nieparzystej liczby $a = 2*n-1$ to wyrażenie rozkłada się na czynniki 12 razy (n^2+n+1). Zatem to wyrażenie algebraiczne jest podzielne przez 12 dla każdej nieparzystej wartości parametru a.

Zadanie 0.11 *Ile różnych liczb parzystych trzycyfrowych można utworzyć z cyfr* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$*?*

Rozwiązanie:
Liczby parzyste utworzone z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ mają trzy cyfry jedności
2 lub 4 lub 6
Napiszmy wszystkie różne liczby parzyste dwucyfrowe, które mają cyfrę jedności
2 lub 4 lub 6

12	14	16
22	24	26
32	34	36
42	44	46
52	54	56
62	64	66
72	74	76

Niżej podane są wszystkie różne liczby parzyste trzycyfrowe, które mają cyfrę jedności 2

112	212	312	412	512	612	712
122	222	322	422	522	622	722
132	232	332	432	532	632	732
142	242	342	442	542	642	742
152	252	352	452	552	652	752
162	262	362	462	562	662	762
172	172	372	472	572	672	772

Niżej podadane są wszystkie różne liczby parzyste trzycyfrowe, które mają cyfrę jedności 4

114	214	314	414	514	614	714
124	224	324	424	524	624	724
134	234	334	434	534	634	734
144	244	344	444	544	644	744
154	254	354	454	554	654	754
164	264	364	464	564	664	764
174	174	374	474	574	674	774

Niżej podane są wszystkie różne liczby parzyste trzycyfrowe, które mają cyfrę jedności 6

116	216	316	416	516	616	716
126	226	326	426	526	626	726
136	236	336	436	536	636	736
146	246	346	446	546	646	746
156	256	356	456	556	656	756
166	266	366	466	566	666	766
176	176	376	476	576	676	776

Teraz liczymy wszystkie liczby parzyste utworzone z cyfr 1,2,3,4,5,6,7.
W tabeli pierwszej z cyfrą jedności 2 jest ich 7*7=49
Podobnie, w tabeli drugiej z cyfrą jedności 4 jest ich 7*7=49
oraz w tabeli trzeciej z cyfrą jedności 6 jest ich 7*7=49
Zatem w razem w trzech tabelach jest rżnych liczb parzystych

$$7 * 7 * 3 = 49 * 3 = 147$$

Zadanie 0.12 *Ile różnych liczb nieparzystych trzycyfrowych można utworzyć z cyfr* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$*?*

Rozwiązanie:
Liczby nieparzyste utworzone z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ mają cztery cyfry jedności 1 lub 3 lub 5 lub 7
Napiszmy wszystkie różne liczby nieparzyste dwucyfrowe, które mają cyfrę

jedności 1 lub 3 lub 5 lub 7

11	13	15	17
21	23	25	27
31	33	35	37
41	43	45	47
51	53	55	57
61	63	65	67
71	73	75	77

Podobnie jak w rozwiązaniu zadania 0.2 tworzymy cztery tablice dla liczby z cyfrą jedności $1, 3, 5, 7$. Każda z czterech tablic zawiera 7*7=49 liczb nieparzystych. Ilość liczb nieparzstych utworzonych z cyfr $1, , 2, 3, 4, 5, 6, 7$ jest

$$4 * 49 = 196$$

0.8 Zadania

Zadanie 0.13 *Wykonaj dodawanie pisemne liczb dziesiętnych* 1659 *i* 421

Zadanie 0.14 *Wykonaj odejmowanie pisemne liczb* $1659 - 421$

Zadanie 0.15 *Wykonaj mnożenie pisemne liczb dziesiętnych* $345 * 21$

Zadanie 0.16 *Wykonaj dzelenie pisemne liczb dziesiętnych* 1722 *przez* 21

Zadanie 0.17 *Suma trzech kolejnych liczb parzystych równa jest 84. Znajdz te liczby.*

Zadanie 0.18 *Ile róznych liczb dwucyfrowych parzystych można utworzyć z cyfr 1,2,3,4,5,6,7 ??*

Zadanie 0.19 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 51. Znajdz te liczby.*

Zadanie 0.20 *Ile różnych liczb trzycyfrowych nieparzystych można utworzyć z cyfr 1,2,3,4,5,6,7 ??*

Zadanie 0.21 *Oblicz sumę*

$$S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Zadanie 0.22 *Podaj wór ogólny na sumę n kolejnych liczb naturalnych.*

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Zadanie 0.23 *Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb parzystych*

$$S_{10} = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$$

używając tylko jednej operacji mnożenia.

Zadanie 0.24 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb parzystych*

$$S_{2n} = 2 + 4 + 6 + ... + 2n$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Zadanie 0.25 *Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb nieparzystych*

$$S_{10} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

używając tylko jednej operacji mnożenia.

Zadanie 0.26 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb nieparzystych*

$$S_{2n+1} = 1 + 3 + 5 + ... + 2n + 1$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Zadanie 0.27 *Udowodnij, ze wyrażenie algebraiczne*

$$a^2 + (a + 2)(a + 2) + (a + 4)(a + 4) + 1$$

jest podzielne przez 12 dla każdej liczby naturalnej i nieparzystej a.

Zadanie 0.28 *Pomiędzy cyfry liczby 18519 wstaw cyfre 2, żeby otrzymać*

(a) *liczbę największą*

(b) *liczbę najmiejszą*

Zadanie 0.29 *Suma trzech kolejnych liczb parzystych równa jest 84. Znajdz te liczby.*

Zadanie 0.30 *Suma czterech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 180. Znajdz te liczby.*

Zadanie 0.31 *Suma pięciu kolejnych liczb parzystych równa jest 180. Znajdz te liczby.*

Zadanie 0.32 *Oblicz sumę*

$$S_{15} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$$

używając jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Zadanie 0.33 *Oblicz sumę*

$$S_{16} = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16$$

używając jednei operacji mnożenia.

Zadanie 0.34 *Oblicz sumę*

$$S_{21} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21$$

używając jednej opercji mnożenia.

Zadanie 0.35 .

(a) *Oblicz sumę 20-stu wyrazów ciągu*

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60.$$

(b) *Podaj wzór ogólny na sumę n-wyrazów ciągu*

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \cdots, 3n.$$

(c) *Stosując ten wzór oblicz sumę 15-stu wyrazów tego ciągu.*

Zadanie 0.36 *Udowodnij, że wyrażenie algebraiczne*

$$(a + 1)(a + 1) + 4$$

jest podzielne przez 4 *dla każdej liczby parzystej* a.