System liczbowy binarny.

0.1 Wstęp

Ogòlna forma systemów pozycyjnych liczbowych ma postać wielomianu

$$\alpha_{n-1}\rho^{n-1} + \alpha_{n-2}\rho^{n-2} + \cdots + \alpha_2\rho^2 + \alpha_1\rho + \alpha_0, \tag{1}$$

gdzie liczbę naturalną $\rho \geq 2$ nazywamy podstawą systemu liczbowego. Natomiast współczynniki $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, ..., \alpha_1, \alpha_0$ nazywamy cyframi systemu liczbowego. Cyfry systemu liczbowego o podstawie ρ są to liczby jednocyfrowe:

$$0, 1, 2, 3, ..., \rho - 1$$

z ktòrych tworzone są liczby systemu. Ilość cyfr zależy od podstawy ρ i jest równa ρ.
Samą liczbę x piszemy umownie jako następujący ciąg cyfr

$$x = (\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0)_\rho$$

W przypadku systemu dziesiętnego, ktòry jest powszechnie używany, nawias z indeksem ρ opuszczamy

$$(\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0)_\rho.$$

Wtedy liczbę dziesiętną piszemy bez nawiasu

$$x = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0$$

jako ciąg współczynnikòw wielomianu (1).

0.2 Przykłady zapisu liczb w ròżnych systemach

Przykład 0.1 *W systemie dziesiętnym $\rho = 10$. Liczbę*

$$x = 2 * 10 + 4 = 24$$

piszemy bez nawiasu $x = 24$

Przykład 0.2 *W systemie binarnym $\rho = 2$. Tą samą liczbę*

$$x = 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 = 24$$

piszemy z nawiasem $x = (10000)_2$

Przykład 0.3 *W systemie oktalnym $\rho = 8$. Tą samą liczbę*

$$x = 3 * 8 + 0 = 24$$

piszemy z nawiasem $x = (30)_8$

0.3 System dwòjkowy. Binarny

W systemie pozycyjnym binarnym podstawa $\rho = 2$. Wielomian jest wyrażeniem algebraicznym

$$a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \cdots + a_1 2 + a_0 = (a_{n-1}a_{n-2}...a_1 a_0)_2$$

Wtedy mamy tylko dwie cyfry $0, 1$ a współczynniki

$$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$$

przyjmuj wartoci 0 lub 1.
Na przykład, liczba binarna czterocyfrowa

$$x = \alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0 = 1010$$

ma
ilość jedności $2^0 = 1,\ \alpha_0 = 0,$
ilość dwòjek $2^1,\ \alpha_1 = 1,$
ilość kwadratòw dwòjek $2^2,\ \alpha_2 = 1$
ilość kubikòw dwòjek $2^3,\ \alpha_3 = 1.$
Zauważmy, że w systemie dziesiętnym podstawą jest liczba 10. W systemie dziesiętnym piszemy liczby używając 10-ciu cyfr

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Natomiast w systemie binarnym podstawą jest liczba 2. W binarnym systemie jest dwie cyfry

$$0, 1,$$

ktòre są jednocześnie liczbami jednocyfowymi binarnymi.
Liczby binarne dwucyfrowe piszemy w ogòlnej postaci

$$a_1 * 2 + a_0 = (a_1 a_0)_2$$

gdzie cyfrą dwòjek jest współczynnik a_1, cyfrą jedności jest współczynnik a_0

Przykład 0.4 *Liczba binarna* $\quad x = (11)_2$

$$1 * 2 + 1 = (11)_2.$$

Tytaj cyfrą dwòjek jest współczynnik $a_1 = 1$, *cyfra jedności współczynnik* $a_0 = 1$. *Wartość tej liczby binarnej w zapisie dziesiętnym jest ròwna* 3.

Liczby binarne trzycyfrowe piszemy w ogòlnej postaci

$$a_2 * 2^2 + a_1 * 2^1 + a_0 * 2^0 = (a_2 a_1 a_0)_2$$

gdzie kolejne potęgi dwòjki

$$2 * 2 = 2^2, \quad 2^1 = 2, \quad 2^0 = 1.$$

Przykład 0.5 *Na przykład liczbę binarną $x = (101)_2$ w ogólnym zapisie piszemy*

$$a_2 * 2^2 + a_1 * 2^1 + a_0 * 2^0 = (a_2 a_1 a_0)_2,$$
$$1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = (101)_2,$$

gdzie cyfra binarna $a_2 = 1$ jest współczynnikiem przy 2^2,
cyfra binarna $a_1 = 0$ jest współczynnikiem przy 2,
cyfra binarna jedności $a_0 = 1$.
Wartość tej liczby binarnej

$$(101)_2 = 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 5$$

w zapisie dziesiętnym jest równa 5.

Ogólnie liczby n-cyfrowe w pozycyjnym systemie binarnym zapisujemy jako współczynniki wyrażenia algebraicznego

$$a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + a_{n-3}2^{n-3} + \cdots + a_1 2 + a_0 = (a_{n-1}a_{n-2}...a_1 a_0)_2$$

gdzie kolejne potęgi podstawy 2 są:

$$\begin{aligned}
&2^1 = \underbrace{2}_{1}\\
&2^2 = \underbrace{2 * 2}_{2}\\
&2^3 = \underbrace{2 * 2 * 2}_{3}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&2^{n-3} = \underbrace{2 * 2 * 2 * ... * 2}_{n-3}\\
&2^{n-2} = \underbrace{2 * 2 * 2 * ... * 2}_{n-2}\\
&2^{n-1} = \underbrace{2 * 2 * 2 * ... * 2}_{n-1}
\end{aligned}$$

Tutaj $2^1,\ 2^2,\ 2^3$, , , 2^{n-1} oznacza liczbę 2 pomnożoną przez siebie 1 raz lub 2 razy lub 3 razy itd...$n-3$ razy $n-2$ razy i $n-1$ razy. Liczba 2 pomnożona przez siebie zero razy $2^0 = 1$.

Przykład 0.6 *Niech $n = 5$, wtedy liczbę binarną pięciocyfrową $x = (10101)_2$. piszemy w postaci wyrażenia arytmetycznego*

$$1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = (10001)_2$$

gdzie wpsółczynnik przy 2^4 jest równy $a_4 = 1$,
wpsółczynnik przy 2^3 jest równy $a_3 = 0$,
wpsółczynnik przy 2^2 jest równy $a_2 = 0$,
wpsółczynnik przy 2^1 jest równy $a_1 = 0$,
i wpsółczynnik jedności binarnych, przy 2^0 jest równy $a_0 = 1$.

0.4 Przeliczanie liczb dziesiętnym na liczby binarnym

Każdą liczbę dziesiętną można przeliczyć na liczbę binarną. To przeliczanie jest proste. Mianowicie, dzielimy liczbę dziesiętną przez 2 i zapisujemy resztę. Następnie część całkowitą tego dzielenia dzielimy przez 2 i zapisujemy resztę. Dalej kontynuujemy dzielenie części całkowitych przez 2 zapisując ich reszty tak długo aż w wyniku dzielenia przez 2 otrzymamy część całkowitą równą 0. Liczbę binarną otrzymujemy pisząc reszty z dzielenia w kolejności zaczynają od ostatniej reszty i kończąc na pierwszej reszcie jako cyfrze binarnej jedności. Zobaczmy przeliczanie liczb dziesiętnych na binarne na przykładach.

Przykład 0.7 *Przelicz liczbę dziesiętną $x = 9$ na liczbę binarną*
Wykonujemy dzielenia liczby dziesiętnej $x = 9$ przez 2

$$\begin{array}{lll}
\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2} & reszta\ r_0 = 1 & bo \quad 9 = 2 * 4 + 1 \\
\frac{4}{2} = 2 & reszta\ r_1 = 0 & bo \quad 4 = 2 * 2 + 0 \\
\frac{2}{2} = 1 & reszta\ r_2 = 0 & bo \quad 2 = 2 * 1 + 0 \\
\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} & reszta\ r_3 = 1 & bo \quad 1 = 2 * 0 + 1
\end{array}$$

Pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej otrzymamy liczbę binarną

$$(r_3 r_2 r_1 r_0)_2 = (1001)_2$$

Powtórzmy kolejne dzielenia liczby 9 *przez* 2 *według innego stosowanego schematu*

Liczba $x/2$	*Reszta z dzielenia przez 2*
$9/2 = 4$	1
$4/2 = 2$	0
$2/2 = 1$	0
$1/2 = 0$	1

W wyniku otrzymujemy liczbę binarną pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$(1001)_2$$

Sprawdzenie:

$$(1001)_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 8 + 1 = 9.$$

Przykład 0.8 *Przelicz liczbę dziesiętną $x = 15$ na liczbę binarną*

Wykonujemy dzielenia liczby dziesiętnej $x = 15$ przez 2

$$\begin{array}{lll} \frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2} & reszta\, r_0 = 1 & bo \quad 15 = 2 * 7 + 1 \\ \frac{7}{2} = 3 & reszta\, r_1 = 1 & bo \quad 7 = 2 * 3 + 1 \\ \frac{3}{2} = 1 & reszta\, r_2 = 1 & bo \quad 2 = 2 * 1 + 1 \\ \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} & reszta\, r_3 = 1 & bo \quad 1 = 2 * 0 + 1 \end{array}$$

Pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej otrzymamy liczbę binarną

$$(r_3 r_2 r_1 r_0)_2 = (1111)_2$$

Powtórzmy kolejne dzielenia liczby 15 przez 2 według stosowanego innego schematu

Liczba $x/2$	|	*Reszta z dzielenia przez* 2
======	=	================
$15/2 = 7$	|	1
$7/2 = 3$	|	1
$3/2 = 1$	|	1
$1/2 = 0$	|	1

W wyniku otrzymujemy liczbę binarną pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$(1111)_2$$

Sprawdzenie:

$$(1111)_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15.$$

0.5 Schemat ogólny przeliczania liczb z sytemu dziesiętnego na binarny

Podobnie jak w wyżej w podanych przykładach, w schemacie ogólnym dzielimy liczbę dziesiętną x przez 2.

$$\frac{x}{2} = k_0 + \frac{r_0}{2}, \quad x = 2 * k_0 + r_0$$

gdzie k_0 to całość i r_0 to reszta z dzielenia x przez 2
Ogólnie

$$\frac{k_i}{2} = k_{i+1} + \frac{r_{i+1}}{2}, \quad k_i = 2 * k_{i+1} + r_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, ..., m.$$

gdzie k_{i+1} to całość i r_{i+1} to reszta z dzielenia k_i przez 2 dla $i = 0, 1, 2, ..., m$

0.6 Algorytm

Zapiszmy powyższe kolejne dzielenia w następującym schemacie

Liczba x	*Reszta*
==========	====
$x/2 = k_0 + r_0/2$	r_0
$k_0/2 = k_1 + r_1/2$	r_1
$k_1/2 = k_2 + r_2/2$	r_2
$k_2/2 = k_3 + r_3/2$	r_3
$\cdots$	$\cdots$
$k_{m-2}/2 = k_{m-1} + r_{m-1}/2$	r_{m-1}
$k_{m-1}/2 = 0 + r_m/2$	r_m

W wyniku otrzymujemy liczbę binarną pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = (r_m r_{m-1} r_{m-2} ... r_1 r_0)_2$$

0.7 Dowód Alegorytmu

[1] Zauważmy, że wyżej podany algorytm prowadzi do przeliczenia liczby dziesiętnej x na liczbę binarną.
Z tego algorytmu znajdujemy

$$\begin{array}{lll|l}
x & = & 2k_0 + r_0 & k_0 = 2k_1 + r_1 \\
 & = & 2^3 k_2 + 2^2 r_2 + 2r_1 + r_0 & k_2 = 2k_3 + r_3 \\
 & = & 2^4 k_3 + 2^3 r_3 + 2^2 r_2 + 2r_1 + r_0 & k_3 = 2k_4 + r_4 \\
 & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
 & = & 2^{m-1} k_{m-2} + 2^{m-2} r_{m-2} + \cdots + 2^2 r_2 + 2r_1 + r_0 & k_{m-2} = 2k_{m-1} + r_{m-1} \\
 & = & 2^m k_m + 2^{m-1} r_{m-1} + \cdots + 2^2 r_2 + 2r_1 + r_0 & k_{m-1} = 2k_m + r_m \\
 & = & 2^m r_m + 2^{m-1} r_{m-1} + \cdots + 2^2 r_2 + 2r_1 + r_0 & k_m = r_m \\
 & = & (r_m r_{m-1} r_{m-2} ... r_2 r_1 r_0)_2 &
\end{array}$$

[1] Dowód można pominąć. Zanajomość dowodu algorytmu jest nie konieczna w przeliczaniu

Zastosujmy powyższy algorytm przeliczając liczbę dziesiętną $x = 256$ na binarną.

Liczba x/2	|	*Reszta z dzielenia przez 2*
======	=	================
$256/2 = 128$	|	0
$128/2 = 64$	|	0
$64/2 = 32$	|	0
$32/2 = 16$	|	0
$16/2 = 8$	|	0
$8/2 = 4$	|	0
$4/2 = 2$	|	0
$2/2 = 1$	|	0
$1/2 = 0$	|	1

W wyniku otrzymujemy liczbę binarną pisząc reszty z powyższej tabeli w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = 256 = (100000000)_2$$

Sprawdzenie:

$(100000000)_2 = 1*2^8+0*2^7+0*2^6+0*2^5+0*2^4+0*2^3+0*2^2+0*2^1+0*2^0 = 256.$

0.8 Operacje arytmetyczne w systemie binarnym

Operacje arytmetyczne w systemie binarnym dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wykonujemy w podobny sposòb jak w systemie dziesiętnym. Przypominamy, że w systemie dziesiętnym uzupełniamy do podstawy $\rho = 10$ wykonując operacje na liczbach (cyfrach dziesiętnych),$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Natomiast w systemie binarnym uzupełniamy do podstawy $\rho = 2$ wykonując operacje na liczbach (cyfrach binarnych) $0, 1$.

0.8.1 Binarne dodawanie

Tabliczka binarnego dodawania

+	0	1
0	0	1
1	1	$(10)_2$

Binarna suma

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = (10)_2 = 1 * 2^1 + 0 * 2^0$$

Dodawanie binarne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 0.9 *Wykonaj dodawanie binarne liczb dziesiętnych* 5 *i* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $5 = (101)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne dodawanie 101 + 11, stosując tabliczkę binarnego dodawania.

$$\begin{array}{cr} & 101 \\ + & 11 \\ & ---\\ & 1000 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5 + 3 = (101)_2 + (11)_2 = (1000)_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 = 8.$$

Przykład 0.10 *Wykonaj dodawanie binarne liczb dziesiętnych* 5 *i* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $5 = (101)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne dodawanie 101 + 11, stosując tabliczkę binarnego dodawania.

$$\begin{array}{cr} & 101 \\ + & 11 \\ & ---\\ & 1000 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5 + 3 = (101)_2 + (11)_2 = (1000)_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 = 8.$$

0.8.2 Binarne odejmowanie

Tabliczka binarnego odejmowania

-	0	1
1	0	-1
1	1	0

Binarna różnica

$$\begin{array}{l} 0 - 0 = 0 \\ 0 - 1 = -1 \\ 1 - 0 = 1 \\ 1 - 1 = 0 \end{array}$$

Odejmowanie binarne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 0.11 *Wykonaj dodawanie binarne liczb dziesiętnych* 5 *i* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $5 = 101)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne odejmowanie $(101)_2 - (11)_2$, stosując tabliczkę binarnego odejmowania.

$$\begin{array}{cr} & 101 \\ - & 11 \\ & --- \\ & 10 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5 - 3 = (101)_2 - (11)_2 = (10)_2 = 1 * 2^1 + 0 * 2^0 = 2.$$

0.8.3 Binarne mnożenie

Tabliczka binarnego mnożenia

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Binarny iloczyn

$$\begin{array}{c} 0 * 0 = 0 \\ 0 * 1 = 0 \\ 1 * 0 = 0 \\ 1 * 1 = 1 \end{array}$$

Mnożenie binarne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 0.12 *Wykonaj mnożenie binarne liczb dziesiętnych* 5 *i* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $5 = (101)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne mnożenie $(101)_2 * (11)_2$, stosując tabliczkę binarnego mnożenia i dodawania.

$$\begin{array}{cr} & 101 \\ * & 11 \\ & --- \\ & 101 \\ & 101 \\ & --- \\ & 1111 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5 * 3 = (101)_2 * (11)_2 = (1111)_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 15.$$

0.8.4 Binarne dzielenie

Dzielenie binarne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 0.13 *Wykonaj dzielenie binarne liczb dziesiętnych* 15 *podziel przez* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $15 = (1111)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne dzielenie $(101)_2 : (11)_2$, stosując tabliczkę binarnego dzielenia i dodawania.

$$\begin{array}{l}
\ \ 101\\
------\\
\ \ 1111 : 11\\
\ \ 11\\
--\\
\ \ = 11\\
\ \ \ \ \ 11\\
---\\
\ \ \ \ \ \ \ =
\end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5 : 3 = (101)_2 : (11)_2 = (101)_2 = 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 5.$$

0.9 Liczby binarne parzyste i nieparzyste

Podobnie jak w systemie dziesiętnym, liczby binarne parzyste i nie parzyste poznajemy po cyfrze jedności. Mianowicie, jeżeli cyfra jedności liczby binarnej jest równa 0 to liczba binarna jest parzysta, w przeciwnym przypadku, jeżeli cyfra jedności liczby binarnej jest 1 to liczba binarna jest nieparzysta.

0.9.1 Liczby binarne parzyste

1. Liczby binarne parzyste mają cyfry jedności 0.
   Na przkład liczby binarne

   $$10,\ 110,\ 1010,\ 110110,\ 111110110$$

   mają cyfrę jedności 0, dlatego są parzyste.

2. Liczby binarne parzyste są podzielne przez binarne 10, zatem mają ogólną postać [2]

   $$n = 10 * k, \quad \text{dla} \ \ k = 0, 10, 100, 110, 1000, ...;$$

[2] Tutaj binarne liczby $(10)_2 = 10,\ 110 = (110)_2,\ 1010 = (1010)_2$ itd...; piszemy bez nawiasów

Na przykład

$$\begin{array}{ll} k = 0, & n = 10 * 0 = 0, \\ k = 1, & n = 10 * 1 = 10, \\ k = 10, & n = 10 * 10 = 100, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k = 1000, & n = 1000 * 100 = 10000, \end{array}$$

3. Suma, różnica i iloczyn liczb binarnych parzystych jest liczbą binarną parzystą
   Na przykład:

$$a = 1000, \quad b = 110,$$

$$a + b = 1000 + 110 = 1110,$$

$$a - b = 1000 - 110 = 10,$$

$$a * b = 1000 * 110 = 110000$$

0.9.2 Liczby binarne nieparzyste

Własności liczb binarnych nieparzystych

1. Liczby binarne nieparzyste mają cyfrę jedności 1.
   Na przkład liczby binarne

$$1\ 11, \ 111, \ 1011, \ 110111, \ 111110111$$

   mają odpowiednio cyfrę jedności 1.

2. Liczby binarne nieparzyste mają ogólną postać

$$n = (10)_2 * k + 1, \quad \text{lub } n = (10)_2 * k - 1, \ \text{ dla } \ k = 0, 10, 100, 110, 1000, \ldots;$$

   Na przykład

$$\begin{array}{llll} k = 0, & n = 10 * 0 + 1 = 1, & lub & n = 10 * 0 - 1 = -1 \\ k = 1, & n = 10 * 1 + 1 = 11, & lub & n = 10 * 1 - 1 = 1 \\ k = 10, & n = 10 * 10 + 1 = 101, & lub & n = 10 * 10 - 1 = 11 \\ k = 1000, & n = 10 * 1000 + 1 = 10001, & lub & n = 10 * 1000 - 1 = 1111 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

3. Suma lub różnica dwóch liczb binarnych nieparzystych jest liczbą parzystą.

$$101 + 11 = 1000, \quad 101 - 11 = 10$$

   Podaj inny przykład.

4. Iloczyn liczb binarnych nieparzystych jest liczbą nieparzystą
   Na przykład:
$$101 * 11 = 1111, \quad 111 * 101 = 100011$$
   Podaj inny przykład.

5. Natomiast suma liczby binarnej nieparzystej i liczby binarnej parzystej jest liczbą nieparzysta.

   Na przykład

6.
$$101 + 110 = 1011.$$
   Podaj inny przykład

7. Podobnie, różnica liczby binarnej nieparzystej i liczby binarnej parzystej jest licbąnieparzystą. Na przykład

8.
$$111 - 100 = 11$$
   Podaj inny przykład.

0.10 Ćwiczenia

Zadanie 0.1 *Suma dwóch kolejnych liczb binarnych nieparzystych równa jest* $(100000)_2$. *Znajdź te liczby binarne.*

Rozwiązanie:
Dwie kolejne liczby binarne nieparzyste to
$$(10)_2 * n - 1, \quad (10)_2 * n + 1$$
Ich suma [3]
$$(10 * n - 1) + (10 * n + 1) = 100 * n = 100000$$
Obliczamy n:
$$100 * n = 100000, \quad \text{to} \quad n = 100000 : 100 = 1000$$
Obliczmy dwie kolejne liczby nieparzyste
$$10 * n - 1 = 10 * 1000 - 1 = 1111, \quad 10 * n + 1 = 10 * 1000 + 1 = 1001.$$
Sprawdzenie w systemie binarnym:
$$(10 * n - 1) + (10 * n + 1) = 10 * 1111 + 10 * 1001 = 11110 + 10010 = 100000$$
Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

[3] Tutaj pomijamy nawias $10 \equiv (10_2$

Zadanie 0.2 *Suma trzech kolejnych liczb binarnych parzystych równa jest* $(11000)_2$*. Znajdż te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne trzy liczby binarne parzyste to

$$10 * n - 10, \quad 10 * n, \quad 10 * n + 10.$$

Ich suma

$$(10 * n - 10) + (10 * n) + (10 * n + 10) = 110 * n = (11000)_2.$$

Obliczamy n:

$$110 * n = 11000, \quad n = 11000 : 110 = 100.$$

Obliczmy trzy kolejnych liczb binarne parzyste

$$10 * n - 10 = 10 * 100 - 10 = 110,$$

$$10 * n = 10 * 100 = 1000,$$

$$10 * n + 10 = 10 * 100 + 10 = 1010,$$

Sprawdzenie:

$$(110)_2 + (1000)_2 + (1110)_2 + (1010)_2 = (11000)_2.$$

Sprawdż rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

Zadanie 0.3 *Oblicz sumę liczb binarnych*

$$S_{1010} = 1 + 10 + 11 + 110 + 101 + 110 + 111 + 1000 + 1001 + 1010$$

używając tylko jednej operacji mnożenia binarnego i jednej operacji dzielenia binarnego.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{rcl}
S_{1010} & = & 1 + 10 + 11 + 110 + 101 + 110 + 111 + 1000 + 1001 + 1010 \\
S_{10} & = & 1010 + 1001 + 1000 + 111 + 110 + 101 + 100 + 11 + 10 + 1 \\
- - - & ... & - \\
10 * S_{1010} & = & \underbrace{1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011}_{1010 \ skladnikow \ sumy}
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{1010} używając jednej operacji binarnego mnożenia i jednej operacji binarnego dzielenia.

$$(10)_2 * S_{1010} = (1010)_2 * (1011)_2 = (1101110)_2$$

$$S_{1010} = (1101110)_2 : (10)_2 = (11111)_2$$

Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

0.11 Zadania

Zadanie 0.4 *Przelicz liczby dziesiętne na liczby binarne stusując algorytm przeliczania.*

(a) $x = 53$

(b) $x = 1025$

Sprawdź otrzymane wyniki przeliczenia.

Zadanie 0.5 *.*
(a) *Przelicz liczby dziesiętne* 513 *i* 25 *na liczby binarne. Sprawdź wynik przeliczenia.*
(b) *Dodaj liczby binarne*

$$(1000000001)_2 + (100001)_2$$

Zadanie 0.6 *.*
(a) *Przelicz liczby dziesiętne* 256 *i* 16 *na liczby binarne. Sprawdź wynik przeliczenia.*
(b) *Odejmij liczby binarnych*

$$(100000000)_2 - (1000)_2$$

Sprawdź wynik odejmowanie.

Zadanie 0.7 *.*
(a) *Przelicz liczby dziesiętne* 129 *i* 3 *na liczby binarne. Sprawdź wynik przeliczenia.*
(b) *Pomnóż liczby* 129 *i* 3 *w systemie binarnym Sprawdź wynik mnożenia.*

Zadanie 0.8 *.*
(a) *Przelicz liczby dziesiętne* 63 *i* 3 *na liczby binarne. Sprawdź wynik przeliczenia.*
(b) *Podziel liczbę* 63 *przez liczbę* 3 *w systemie binarnym Sprawdź wynik dzielenia.*

Zadanie 0.9 *Ile jest różnych liczb binarnych trzycyfrowych?*

Zadanie 0.10 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność operacji dodawania,odejmowania, mnożenia i dzielenia.*

$$(10)_2 * (101)_2 + (11)_2 * (101)_2 - (110)_2 : (10)_2$$

Zadanie 0.11 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność operacji arytmetycznych z nawiasami.*

(a)

$$(100)_2 * ((10)_2 * (101)_2 + (11)_2 * (101)_2).$$

(b)

$$(10)_2 * ((110)_2 : (10)_2 - (1000)_2 : (100)_2)$$

Zadanie 0.12 *Suma pięciu kolejnych liczb binarnych parzystych równa jest* $(100100)_2$*. Znajdż te liczby.*

Zadanie 0.13 *Oblicz sumę liczb binarnych parzystych*

$$\begin{aligned} S_{10100} &= (10)_2 + (100)_2 + (110)_2 + (1000)_2 + (1010)_2 + (1100)_2 + \\ &+ (1110)_2 + (10000)_2 + (10010)_2 + (10100)_2 \end{aligned}$$

używając tylko jednej operacji mnożenia binarnego.