Równania rekurencyjne. Algorytmy iteracyjne

0.1 Równanie liniowe jednorodne rzędu pierwszego

Zacznijmy od prostego równania rekurencyjnego pierwszego rzędu w postaci ogólnej

$$y_{n+1} + a_0 y_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots ; \tag{1}$$

o danym rzeczywistym współczynniku $a_0 \neq 0$ różnym od zera.
Rozwiązaniem tego równania jest nieskończony ciąg $y_0, y_1, y_2, ..., y_n, ...;$ o niewiadomych wyrazach $y_n,\ n = 0, 1, 2, ...;$

Rozwiązania równania (1) szukamy w postaci

$$y_n = \lambda^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

o niewiadomej wartości parametru $\lambda \neq 0$ różnej od zera.
Zatem, podstawiając do równania (1) $y_n = \lambda^n$ otrzymamy równanie

$$\lambda^{n+1} + a_0 \lambda^n = 0, \quad dla \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

z niewiadomą λ.
Dzieląc obie strony powyższego równania przez $\lambda^n \neq 0$ obliczamy wartość niewiadomej λ

$$\lambda + a_0 = 0,$$

$$\lambda_1 = -a_0.$$

Skąd rozwiązanie

$$y_n = \lambda_1^n = (-a_0)^n, \quad dla \quad n = 0, 1, 2, ..., ;$$

Zauważmy, że jeżeli $y_n = \lambda_1^n$ jest rozwiązaniem równania (1) to również

$$y_n = C * \lambda_1^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

jest rozwiązaniem tego równania dla stałej wartości C niezależnej od n.
Mianowicie, sprawdzamy przez podstawienie $y_n = C * \lambda_1^n$ do równania (1), że dla dowolnej stałej C ciąg

$$C * \lambda_1^n, \quad n = 0, 1, 2, ..;$$

spełnia równanie

$$\begin{aligned} C * \lambda_1^{n+1} + a_0 \lambda_1^n &= C * (-a_0)^{n+1} + a_0 * C * (-a_0)^n \\ &= C * (-a)^{n+1} - C * (-a_0)^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy wszystkie możliwe rozwiązania równania (1) w postaci ogólnej

$$y_n = C * (-a_0)^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

dla dowolnej wartości stałej C niezależnej od n.

Example 0.1 *Znajdź ciąg liczb naturalnych którego pierwszy wyraz $y_0 = 1$ a każdy następny jest dwa razy większy od poprzedniego. To znaczy*

$$y_{n+1} = 2y_n, \quad dla \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Rozwiązanie.
Szukamy rozwiązania równania rekurencyjnego

$$y_{n+1} - 2y_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Podstawiając do powyższego równania

$$y_n = \lambda^n, \quad n = 0, 1, 2, ..;$$

obliczamy λ

$$\lambda^{n+1} - 2\lambda^n = 0, \ | : \lambda^n$$

$$\lambda - 2 = 0, \quad \lambda = 2.$$

Skąd otrzymujemy wszystkie rozwiązania

$$y_n = C * 2^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

dla dowolnej stałej C niezależnej od n.
Z warunku początkowego $y_0 = 1$ wyznaczamy stałą C.

$$y_n = C * 2^n \quad dla \quad n = 0, \ \ y_0 = C * 2^0 = C = 1$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem zadania jest ciąg

$$y_n = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

0.2 Równanie liniowe niejednorodne rzędu pierwszego

W poprzednim paragrafie rozpatrzyliśmy równanie jednorodne rzędu pierwszgo, gdy prawa strona równania $f_n = 0, \ dla \ \ n = 0, 1, 2, ...;$
Niżej podamy rozwiązanie równania niejednorodnego

$$y_{n+1} + a_0 y_n = f_n, \quad n = 0, 1, \ldots; \tag{2}$$

którego prawa strona $f_n, \ n = 0, 1, 2, ...;$ jest danym ciągiem liczb i dany jest również współczynnik $a_0 \neq 0$ różny od zera.
Natomiast niewiadomym jest ciąg liczb $y_n, \ n = 0, 1, 2, ...;$

Równanie niejednorodne (2) rozwiązujemy korzystając z ogólnego rozwiązania równania jednorodnego (1).
Mianowicie, mając rozwiązanie

$$y_n = C * (-a_0)^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

równania jednorodnego (1), szukamy rozwiązania y_n^f, $n = 0, 1, 2, ...;$ równania niejednorodnego (2) w postaci sumy rozwiązania równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego

$$y_n^f = C * (-a_0)^n + y_n^*, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

gdzie y_n^*, $n = 0, 1, 2, ...;$ jest rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego (2).
Zatem, żeby znaleźć wszystkie rozwiązania równania niejednorodnego (2) wystarczy tylko znalężć rozwiązanie szczególne y_n^*, $n = 0, 1, 2, ...;$
Rozwiązanie szczególne y_n^*, $n = 0, 1, 2, ...;$ znajdziemy w postaci

$$y_n^* = K_n(-a_0)^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

dobierając odpowiedni ciąg liczb $K_0, K_1, ..., K_n, ...;$
Podstawiając do równania (2)

$$y_n^* = K_n * (-a_0)^n$$

otrzymamy

$$K_{n+1} * (-a_0)^{n+1} + a_0 * K_n * (-a_0)^n = f_n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

lub

$$[K_{n+1} - K_n] * (-a_0)^{n+1} = f_n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Skąd znajdujemy proste równanie rekurencyjne na wyrazy ciągu K_n

$$K_{n+1} - K_n == \frac{f_n}{(-a_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Łatwo znajdujemy rozwiązanie tego równania dodając stronami równości

$$K_1 - K_0 = \frac{f_0}{(-a_0)^0}$$
$$K_2 - K_1 = \frac{f_1}{(-a_0)^1}$$
$$K_3 - K_2 = \frac{f_2}{(-a_0)^2}$$

....

$$K_{n-1} - K_{n-2} = \frac{f_{n-2}}{(-a_{n-2})^{n-2}}$$
$$K_n - K_{n-1} = \frac{f_{n-1}}{(-a_0)^{n-1}}$$

– –

$$K_n - K_0 = \frac{f_0}{(-a_0)^0} + \frac{f_1}{(-a_0)^1} + \frac{f_2}{(-a_0)^2} + \cdots + \frac{f_{n-1}}{(-a_0)^{n-1}}$$

Skąd rozwiązanie

$$K_n = K_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f_i}{(-a_0)^i}, \quad n = 1, 2, ...;$$

Ponieważ wystarczy znaleźć jedno rozwiązanie szczególne, możemy wybrać $K_0 = 0$.
Wtedy rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (2)

$$y_n^* = \frac{f_0}{(-a_0)^0} + \frac{f_1}{(-a_0)^1} + \frac{f_2}{(-a_0)^2} + \cdots + \frac{f_{n-1}}{(-a_0)^{n-1}}, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Ostatecznie rozwiązanie ogólne równannia niejednorodnego (2)

$$y_n = C * (-a_0)^n + \frac{f_0}{(-a_0)^0} + \frac{f_1}{(-a_0)^1} + \frac{f_2}{(-a_0)^2} + \cdots + \frac{f_{n-1}}{(-a_0)^{n-1}}, \quad n = 0, 1, 2, ...; \tag{3}$$

dla dowolnej stałej C niezależnej od n.

Example 0.2 *Znajdź rozwiązanie równania niejednorodnego*

$$y_{n+1} - 2y_n = n, \quad n = 0, 1, \ldots; \tag{4}$$

które spełnia warunek początkowy $y(0) = 1$

Rozwiązanie.
Z poprzedniego przykładu znamy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

$$y_n = C * 2^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Rozwiązanie szczególne y_n^*, $n = 0, 1, 2, ...;$ znajdziemy w postaci

$$y_n^* = K_n(-a_0)^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

dobierając odpowiedni ciąg liczb $K_0, K_1, ..., K_n, ...;$
Podstawiając do równania (4) $f_n = n$ oraz

$$y_n^* = K_n * 2^n$$

otrzymamy

$$K_{n+1} * 2^{n+1} + 2 * K_n * 2^n = n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

lub

$$[K_{n+1} - K_n] * 2^{n+1} = n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Skąd znajdujemy proste równanie rekurencyjne na wyrazy ciągu K_n

$$K_{n+1} - K_n = \frac{n}{2^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Łatwo znajdujemy rozwiązanie tego równania dodając stronami równości

$$K_1 - K_0 = \frac{0}{2^0}$$
$$K_2 - K_1 = \frac{1}{2^1}$$
$$K_3 - K_2 = \frac{2}{2^2}$$
....
$$K_{n-1} - K_{n-2} = \frac{n-2}{2^{n-2}}$$
$$K_n - K_{n-1} = \frac{n-1}{2^{n-1}}$$
$$- -$$
$$K_n - K_0 = \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}}$$

Skąd rozwiązanie

$$K_n = K_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{2^i}, \quad n = 1, 2, ...;$$

Wystarczy znaleźć rozwiązanie szczególne, dlatego możemy wybrać $K_0 = 0$.
Wtedy rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (4)

$$y_n^* = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}}, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Ostatecznie rozwiązanie ogólne równannia niejednorodnego (4)

$$y_n = C * 2^n + \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}}, \quad n = 0, 1, 2, ...; \tag{5}$$

dla dowolnej stałej C niezależnej od n.
Z warunku początkowego $y_0 = 1$ znajdujem stałą C

$$y_0 = C = 1$$

Zatem rozwiązaniem równania niejednorodnego (4), które spełnia warunek początkowy $y_0 = 1$ jest ciąg

$$y_n = 2^n + \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}}, \quad n = 0, 1, 2, ...; \tag{6}$$

Wiadomo, że suma

$$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} = \frac{2^n - n - 1}{2^{n-1}}$$

Zatem rozwiązanie

$$y_n = 2^n + \frac{2^n - n - 1}{2^{n-1}}, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

0.3 Równanie liniowe jednorodne rzędu drugiego

Podobnie jak dla równań rzędu pierwszego, zacznijmy od prostego równania rekurencyjnego rzędu drugiego w postaci ogólnej

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots; \tag{7}$$

o danych rzeczywistych współczynnikach $a_0 \neq 0,\ a_1$
Rozwiązaniem tego równania jest nieskończony ciąg $y_0, y_1, y_2, ..., y_n, ...;$ o niewiadomych wyrazach $y_n,\ n = 0, 1, 2, ...;$

Rozwiązania równania (7) szukamy w postaci

$$y_n = \lambda^n, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

o niewiadomej wartości parametru $\lambda \neq 0$.
Zatem, podstawiając do równania (7) $y_n = \lambda^n$ otrzymamy równanie

$$\lambda^{n+2} + a_1 \lambda^{n+1} + a_0 \lambda^n = 0, \quad dla \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

z niewiadomą λ.
Dzieląc obie strony powyższego równania przez $\lambda^n \neq 0$ obliczamy wartość niewiadomej λ rozwiązując równanie kwadratowe

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2}$$

gdy wyróżnik $\Delta = a_1^2 - 4a_0 \geq 0$.

W ten sposób otrzymaliśmy dwa fundamentalne rozwiązania

$$y_n^{(1)} = \lambda_1^n, \qquad y_n^{(2)} = \lambda_2^n, \quad dla \qquad n = 0, 1, 2, ...,;$$

Zauważmy, że jeżeli $y_n^{(1)} = \lambda_1^n$ i $y_n^{(2)} = \lambda_2^n$ są rozwiązaniami równania (7) to również kombinacja liniowa tych rozwązań

$$y_n = C_1 * \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

jest rozwiązaniem tego równania dla dowolnych stałych C_1 i C_2 niezależnych od n.
Mianowicie, sprawdzamy przez podstawienie $y_n = C_1 * \lambda_1^n + C_2 * \lambda_2^n$ do równania (7), że dla dowolnych stałych C_1 i C_2 ciąg

$$C_1 * \lambda_1^n + C_2 * \lambda_2^n, \qquad n = 0, 1, 2, ..;$$

jest rozwiązaniem równania (7)

$$\begin{aligned}
y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n &= C_1 * \lambda_1^{n+2} + C_2 * \lambda_2^{n+2} + a_1(C_1 * \lambda_1^{n+1} + C_2 * \lambda_2^{n+1}) \\
&+ a_0(C_1 * \lambda_1^{n+1} + C_2 * \lambda_2^{n+1}) \\
&= C_1 * \underbrace{(\lambda_1^{n+2} + a_1 * \lambda_1^{n+1} + a_0 * \lambda_1^n)}_{0} \\
&+ C_1 * \underbrace{(\lambda_2^{n+2} + a_1 * \lambda_2^{n+1} + a_0 * \lambda_2^n)}_{0} \\
&= C_2 * \underbrace{(\lambda_1^{n+2} + a_1 * \lambda_1^{n+1} + a_0 * \lambda_1^n)}_{0} \\
&+ C_2 * \underbrace{(\lambda_2^{n+2} + a_1 * \lambda_2^{n+1} + a_0 * \lambda_2^n)}_{0} = 0
\end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy wszystkie możliwe rozwiązania równania (7) w postaci ogólnej

$$y_n = C_1 * \lambda_1^n + C_2 * \lambda_2^n, \quad n = 0, 1, 2, ...; \tag{8}$$

dla dowolnych wartości stałych C_1 i C_2 niezależnych od n.

Example 0.3 .
• *Znajdź wszystkie rozwiązanie równania jednorodnego rekurencyjnego rzędu drugiego*

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0, \quad dla \quad n = 0, 1, 2, ...; \tag{9}$$

• *Znajdź rozwiązanie* y_n, $n = 0, 1, 2, ...;$ *powyższego równania, które spałnia następujące warunki początkowe*

$$y_0 = 0, \qquad y_1 = 1.$$

Rozwiązanie.
Rozwiązania równania (9) szukamy w postaci

$$y_n = \lambda^n, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

o niewiadomej warości parametru $\lambda \neq 0$.
Zatem, podstawiając do równania (9) $y_n = \lambda^n$ otrzymamy równanie

$$\lambda^{n+2} - 5\lambda^{n+1} + 6\lambda^n = 0, \quad dla \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

z niewiadomą λ.
Dzieląc obie strony powyższego równania przez $\lambda^n \neq 0$ otrzymamy równanie kwadratowe

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Łatwo rozwiązujemy równania kwadratowego (9).

Mianowicie, wyróżnik tego r:ownania $\Delta = 5^2 - 4 * 6 = 1$,
i obliczamy piewiastki

$$\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = 2, \qquad \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$$

Skąd otrzymujemy dwa rozwiązania fundamentalne

$$y_n^{(1)} = 2^n, \qquad y_n^{(2)} = 3^n, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Zauważmy, że jeżeli $y_n^{(1)} = \lambda_1^n = 2^n$ i $y_n^{(2)} = \lambda^n = 3^n$ są dwoma rozwiązaniami równania kwadratowego to również kombinacja liniowa

$$y_n = C_1 * (\lambda_1^{(1)})^n + C_2 * (\lambda_2^{(1)})^n = C_1 * 2^n + C_2 * 3^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

jest rozwiązaniem tego równania dla dowolnych stałych C_1 i C_2 niezależnych od n.
Mianowicie, sprawdzamy przez podstawienie

$$y_n = C_1 * 2^n + C_2 * 3^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

do równania (9), że dla dowolnej stałych C_1 i C_2 ciąg

$$C_1 * 2^n + C_2 * 3^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

spełnia równanie

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n &= \underbrace{C_1 * 2^{n+2} + C_2 * 3^{n+2}}_{y_{n+2}} - 5\underbrace{(C_1 * 2^{n+1} + C_2 * 3^{n+1})}_{y_{n+1}} + 6\underbrace{(C_1 * 2^n + C_2 * 3^n}_{y_n} \\ &= \underbrace{C_1 * (2^{n+2} - 5 * 2^{n+1} + 6 * 2^n)}_{0} \\ &+ \underbrace{C_2 * (3^{n+2} - 5 * 3^{n+1} + 6 * 3^n)}_{0} = 0. \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy wszystkie możliwe rozwiązania równania (9) w postaci ogólnej

$$y_n = C_1 * 2^n + C_2 * 3^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

dla dowolnych wartości stałych C_1 i C_2 niezależnych od n.

0.4 Równanie rekurecyjne niejedorodne drugiego rzędu

W poprzednim paragrafie rozpatrzyliśmy równanie jednorodne rzędu drugiego, gdy prawa strona równania $f_n = 0$, $dla\ \ n = 0, 1, 2, ...;$
Niżej podamy rozwiązanie równania niejednorodnego drugiego rzędu

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = f_n, \quad n = 0, 1, \ldots; \tag{10}$$

którego prawa strona f_n, $n = 0, 1, 2, ...;$ jest danym ciągiem liczb i dane są również współczynniki a_1, $a_0 \neq 0$.
Natomiast niewiadomym jest ciąg liczb y_n, $n = 0, 1, 2, ...;$
Równanie niejednorodne (10) rozwiązujemy korzystając z ogólnego rozwiązania równania jednorodnego.
Mianowicie, mając rozwiązanie ogólne (8)

$$y_n = C_1 * y_n^{(1)} + C_2 * y_n^{(2)}, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

równania jednorodnego (7), szukamy rozwiązania y_n^f, $n = 0, 1, 2, ...;$ równania niejednorodnego (10) w postaci sumy rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego

$$y_n^f = C_1 * y_n^{(1)} + C_2 * y_n^{(2)} + y_n^*, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

gdzie y_n^*, $n = 0, 1, 2, ...;$ jest rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego (10).

Example 0.4 *Rozpatrzmy przypadek gdy prawa strona jest stała*

$$f_n = f, \quad n = 0, 1, 2...;$$

Wtedy łatwo sprawdzamy, że ciąg o wyrazach

$$y_n^{(*)} = \begin{cases} \dfrac{f}{1 + a_1 + a_0} \quad \text{if} \quad 1 + a_1 + a_0 \neq 0, & n = 0, 1, 2, ...; \\ \dfrac{n * f}{2 + a_1} \quad \text{if} \quad 1 + a_1 + a_0 = 0, \quad i \quad 2 + a_1 \neq 0, & n = 0, 1, 2, ...; \\ \dfrac{n^2 * f}{2} \quad \text{if} \quad 1 + a_1 + a_0 = 0, \quad i \quad 2 + a_1 = 0, & n = 0, 1, 2, ...; \end{cases}$$

jest rozwiązaniem szczególnym równania (10).

Mianowicie, podstawiając do równania (10)

$$y_n^* = \frac{f}{1 + a_1 + a_0}, \quad 1 + a_1 + a_0 \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, ...; \tag{11}$$

sprawdzamy że

$$\begin{aligned} y_{n+2}^{(*)} + a_1 y_{n+1}^{(*)} + a_0 y_n^* &= \frac{f}{1 + a_1 + a_0} + a_1 \frac{f}{1 + a_1 + a_0} + a_0 \frac{f}{1 + a_1 + a_0} \\ &= \frac{f}{1 + a_1 + a_0}(1 + a_1 + a_0) = f, \\ & \quad dla \quad 1 + a_1 + a_0 \neq 0 \end{aligned}$$

Podobnie dla $y_n^* = \dfrac{n * f}{2 + a_1}$, $n = 0, 1, 2, ...$; sprawdzmy, że

$$\begin{aligned} y_{n+2}^{(*)} + a_1 y_{n+1}^{(*)} + a_0 y_n^* &= \frac{f}{2+a_1}[(n+2) + a_1(n+1) + a_0 n] \\ &= \frac{f}{2+a_1}[n \underbrace{(1 + a_1 + a_0)}_{0} + 2 + a_1] = f, \\ & dla \quad 2 + a_1 \neq 0 \end{aligned}$$

oraz dla $y_n^* = \dfrac{n^2 * f}{2}$, $n = 0, 1, 2, ...$; sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} y_{n+2}^{(*)} + a_1 y_{n+1}^{(*)} + a_0 y_n^* &= \frac{f}{2}[(n+2)^2 + a_1(n+1)^2 + a_0 n^2] \\ &= \frac{f}{2}[(n^2 + 4n + 4) + a_1(n^2 + 2n + 1) + a_0 n^2] \\ &= \frac{f}{2}[(n^2 \underbrace{(1 + a_1 + a_0)}_{0} + 2n \underbrace{(2 + a_1)}_{0} + 4 + a_1] \\ &= \frac{f}{2}[2 + \underbrace{(2 + a_1)}_{0}] = f, \\ & dla \quad 1 + a_1 + a_0 = 0 \;\; i \;\; 2 + a_1 \neq 0 \end{aligned}$$

Example 0.5 *Znajdź rozwiązanie y_n, $n = 0, 1, 2, ...$; równania rekurencyjnego*

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 1, \quad n = 0, 1, 2, ...; \tag{12}$$

które spełnia następujące warunki poczczątkowe

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

Rozwiązanie.
W pierwszej kolejności znajdujemy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...; \tag{13}$$

Rozwiązanie tego równania jednorodnego znaleźliśmy w paragrafie poprzednim. To rozwiązanie powtarzamy niżej.

Mianowicie rozwiązania równania (13) szukamy w postaci

$$y_n = \lambda^n, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

o niewiadomej warości $\lambda \neq 0$.
Zatem, podstawiając do równania (13) $y_n = \lambda^n$ otrzymamy równanie

$$\lambda^{n+2} - 5\lambda^{n+1} + 6\lambda^n = 0, \quad dla \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

z niewiadomą λ.
Dzieląc obie strony powyższego równania przez $\lambda^n \neq 0$ otrzymamy równanie kwadratowe

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Łatwo rozwiązujemy równania kwadratowego.

Mianowicie, wyróżnik tego r:ownania $\Delta = 5^2 - 4 * 6 = 1$,
i obliczamy piewiastki

$$\lambda_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2, \qquad \lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = 3$$

Skąd otrzymujemy dwa rozwiązania fundamentalne

$$y_n^{(1)} = 2^n, \qquad y_n^{(2)} = 3^n, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Zauważmy, że jeżeli $y_n^{(1)} = \lambda_1^n = 2^n$ i $y_n^{(2)} = \lambda^n = 3^n$ są dwoma rozwiązaniami równania kwadratowego to również kombinacja liniowa

$$y_n = C_1 * (\lambda_1^{(1)})^n + C_2 * (\lambda_2^{(1)})^n = C_1 * 2^n + C_2 * 3^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

jest rozwiązaniem tego równania dla dowolnych stałych niezależnych od n.
Mianowicie, sprawdzamy przez podstawienie

$$y_n = C_1 * 2^n + C_2 * 3^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

do równania (13), że dla dowolnej stałych C_1 i C_2 ciąg

$$C_1 * 2^n + C_2 * 3^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

spełnia równanie

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n &= \underbrace{C_1 * 2^{n+2} + C_2 * 3^{n+2}}_{y_{n+2}} - 5\underbrace{(C_1 * 2^{n+1} + C_2 * 3^{n+1})}_{y_{n+1}} + 6\underbrace{(C_1 * 2^n + C_2 * 3^n}_{y_n} \\ &= \underbrace{C_1 * (2^{n+2} - 5 * 2^{n+1} + 6 * 2^n)}_{0} \\ &+ \underbrace{C_2 * (3^{n+2} - 5 * 3^{n+1} + 6 * 3^n)}_{0} = 0. \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy wszystkie możliwe rozwiązania równania (13) w postaci ogólnej

$$y_n = C_1 * 2^n + C_2 * 3^n, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

dla dowolnych wartości stałych C_1 i C_2 niezależnych od n.
Teraz szukamy rozwiązania równania niejednorodnego

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 1, \quad n = 0, 1, 2, ...; \tag{14}$$

Ponieważ suma spółczynników tego równania

$$1 + a_1 + a_0 = 1 - 5 + 6 = 2 \neq 0$$

jest różna od zera i prawa strona $f_n = 1,\ n = 0, 1, 2, ...;$ jest stała to rozwiązanie szczególne według wzoru (11)

$$y_n^* = \frac{f_n}{1 + a_1 + a_0} = \frac{1}{1 - 5 + 6} = \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Zatem wszystkie rozwiązania równania niejednorodnego są w postaci

$$y_n^f = C_1 * 2^2 + C_2 * 3^n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

gdzie stałe C_1 i C_2 nie zależą od n.
Teraz, wybierzemy stałe C_1 i C_2 dla których rozwiązanie y_n^f spełnia warunki początkowe

$$y_0^f = C_1 * 2^0 + C_2 * 3^0 + \frac{1}{2} = C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 1,$$
$$y_1^f = C_1 * 2^1 + C_2 * 3^1 + \frac{1}{2} = 2 * C_1 + 3 * C_2 + \frac{1}{2} = 2,$$

Z pierwzego równania obliczamy

$$C_1 = \frac{1}{2} - C_2$$

i podstawiamy do równania drugiego

$$2(\frac{1}{2} - C_2) + 3C_2 + \frac{1}{2} = 2, \qquad 1 - 2 * C_2 + 3C_2 + \frac{1}{2} = 2.$$

Skąd obliczamy

$$C_2 = \frac{1}{2}, \qquad C_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Odpowiedź: Rozwiązanie równania (14)

$$y_n = \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}$$

spełnia warunki początkowe

$$y_0 = 1, \qquad y_1 = 2.$$

Podstawiając $y_n = \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}$ do równania (14) sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n &= \frac{1}{2} * 3^{n+2} + \frac{1}{2} - 5(\frac{1}{2} * 3^{n+1} + \frac{1}{2}) + 6(\frac{1}{2} * 3^n + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{2}3^n \underbrace{(3^2 - 5 * 3 + 6)}_{0} + \frac{1}{2} - 5 * \frac{1}{2} + 3 = 1. \end{aligned}$$

oraz sprawdzamy waqrunki początkowe

$$y_0 = \frac{1}{2}3^0 + \frac{1}{2} = 1, \qquad y_1 = \frac{1}{2} * 3 + \frac{1}{2} = 2.$$

W ogólnym przypadku dowolnej prawej strony $f_n,\ n = 0, 1, 2, ...;$ rozwiązanie zagadnienia początkowego dla równania niejdnorodnego (10) podane jest w publikacji *Tadeusz Styš, 2009, Lecture Notes in Numerical Solution of Differential Equations, Bentham Science publishers, chapter 1. pp. 1-16* on line.

0.5 Przykłady równań rekurencyjnych nieliniowych

Zdumiewające, że w Babilonie ponad 1000 lat B.C. była znana iteracyjna formuła obliczania pierwiastka kwadratowego $\sqrt{2}$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}), \qquad n = 0, 1, 2, ...; \tag{15}$$

Ciąg o wyrazach $x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \to \sqrt{2}, \quad gdy \quad n \to \infty$, jest zbieżny do pierwiastka kwadratowego $\sqrt{2}$, dla dowolnej wartości początkowej x_0.

Example 0.6 *Oblicz $\sqrt{2}$ z dokładnością 5 znaków po przecinku.*

Rozwiązanie.
Pierwiastek kwadratowy $\sqrt{2}$ obliczymy z dokładnością 5 znaków po przecinku stosując formułę (15)

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}), \qquad dla\ n = 0, 1, 2, 3, 4, 5;$$

startując z wyrazu początkowego $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
&x_0 = 1 \\
&x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{2}{x_0}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{1}) = 1.5 \\
&x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{2}{x_1}) = \frac{1}{2}(1.5 + \frac{2}{1.5}) = 1.41667 \\
&x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{2}{x_2}) = \frac{1}{2}(1.41667 + \frac{2}{1.41667}) = 1.41422 \\
&x_4 = \frac{1}{2}(x_3 + \frac{2}{x_3}) = \frac{1}{2}(1.41422 + \frac{2}{1.41422}) = 1.41421 \\
&x_5 = \frac{1}{2}(x_4 + \frac{2}{x_4}) = \frac{1}{2}(1.41421 + \frac{2}{1.41421}) = 1.41421
\end{aligned}$$

Zauważamy, że dwa ostatnie wyrazy ciągu $x_4 = 1.41421$ i $x_5 = 1.414421$ są równe do piątej cyfry po przecinku. To znaczy, że osiągnelišmy wartošč pierwiastka $\sqrt{2}$ z dokładnością 5 znaków po przecinku.

Ogólnie, pierwiastek kwadratowy $\sqrt{a}$ z liczby nieujemnej $a \geq 0$ obliczamy z formuły rekurencyjnej

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), \qquad n = 0, 1, 2, ...; \tag{16}$$

Ciąg o wyrazach $x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \rightarrow \sqrt{a},\quad gdy\ \ n \rightarrow \infty$, jest zbieżny do pierwiastka kwadratowego $\sqrt{a}$, dla dowolnej wartości początkowej x_0.

Example 0.7 *Oblicz $\sqrt{3}$ z dokładnością 5 znaków po przecinku.*

Rozwiązanie.
Pierwiastek kwadratowy $\sqrt{3}$ obliczymy z dokładnością 5 znaków po przecinku stosując formułę (16)

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n}), \quad dla\ n = 0, 1, 2, 3, 4, 5;$$

startując z wyrazu początkowego $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
&x_0 = 1\\
&x_1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{1}) = 2\\
&x_2 = \frac{1}{2}(2 + \frac{3}{2}) = 1.75\\
&x_3 = \frac{1}{2}(1.75 + \frac{3}{1.75}) = 1.7321\\
&x_4 = \frac{1}{2}(1.7321 + \frac{3}{1.7321}) = 1.73205\\
&x_5 = \frac{1}{2}(1.73205 + \frac{3}{1.75205}) = 1.73205
\end{aligned}$$

Zauważamy, że dwa ostatnie wyrazy ciągu $x_4 = 1.73205$ i $x_5 = 1.73205$ są równe do piątej cyfry po przecinku. To znaczy, że osiągneliśmy wartość pierwiastka $\sqrt{3}$ z dokładnością 5 znaków po przecinku.

W systemie *Mathematica* formułę iteracyjną (16) piszemy w postaci następującej funkcji rekurencyjnej

```
sol[1]=1.;
sol[n_]:=sol[n]=(sol[n-1]+a/sol[n-1])/2
```

Pierwiastek kwadratowy $\sqrt{a}$ z liczby nieujemnej $a \geq 0$ obliczamy w *Mathematica* przez wykonanie instrukcji

```
sol[1]=1.;
sol[n_]:=sol[n]=(sol[n-1]+a/sol[n-1])/2;
Table[sol[n],{n,1,m}]
```

dla danej liczby $a \geq 0$ i danej ilości wyrazów ciągu iteracji m. [1]
W wyniku wykonania powyższych instrukcji w *Mathematica* otrzymamy listę m kolejnych wyrazów $x_0, x_1, x_2, ..., x_m$ ciągu przybliżeń wartości pierwiastka $\sqrt{a}$.

Prof. dr Tadeusz STYŠ   Warszawa, 25 październik, 2018

[1] W *Mathematica*, bez odwoływania się do rekurencji, wartość pierwiastka kwadratowego z liczby a, otrzymujemy jedną instrukcją $sqrt[a]$. Dla liczby ujemnej $a < 0$ otrzymamy pierwiastek zespolony.