Chapter 1

Interpolacja

1.1 Interpolacja liniowa

Zacznijmy opis pojęcia inter-polacji od prostego przykładu.

Przykład 1.1 *Oblicz ile kilometrów przejechał samochód po 3 godzinach jazdy, jeżeli po jednej godzinie jazdy przejechał* $100km$*, a po 6 godzinach jazdy przejechał* $500km$*. Zatem mamy dane*

czas t	$t_0 = 1h$	$t^* = 3h$	$t_1 = 6h$
droga s	$s_0 = 100km$	$s^* =?$	$s_2 = 500km$

Mówimy inter-polacja, gdyż punkt $t^* \in [t_0, t_1]$ w którym szukamy wartości interpolowanej s^* leży pomiędzy danymi węzłami $t_0 = 1$ i $t_1 = 6$.
Przez dwa punkty

$$(t_0, s_0) = (1, 100), \qquad (t_1, s_1) = (6, 500)$$

na płaszczyźnie kartezjańskiej prowadzimy prostą o równaniu

$$s(t) = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} s_0 + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} s_1. \tag{1.1}$$

Sprawdzamy, że prosta o równaniu (1.1) przechodzi przez dane punkty (t_0, s_0) i (t_1, s_1).
Mianowicie

$$\begin{aligned} &dla\ t = t_0, \quad obliczamy \quad s(t_0) = \frac{t_0 - t_1}{t_0 - t_1} s_0 + \frac{t_0 - t_0}{t_2 - t_0} s_1 = s_0, \\ &dla\ t = t_1, \quad obliczamy \quad s(t_1) = \frac{t_1 - t_1}{t_0 - t_1} s_0 + \frac{t_1 - t_0}{t_1 - t_0} s_1 = s_1. \end{aligned}$$

Podstawiając do równania (1.1)

$$t_0 = 1, \quad s_0 = 100 \quad i \quad t_1 = 6, \quad s_1 = 500$$

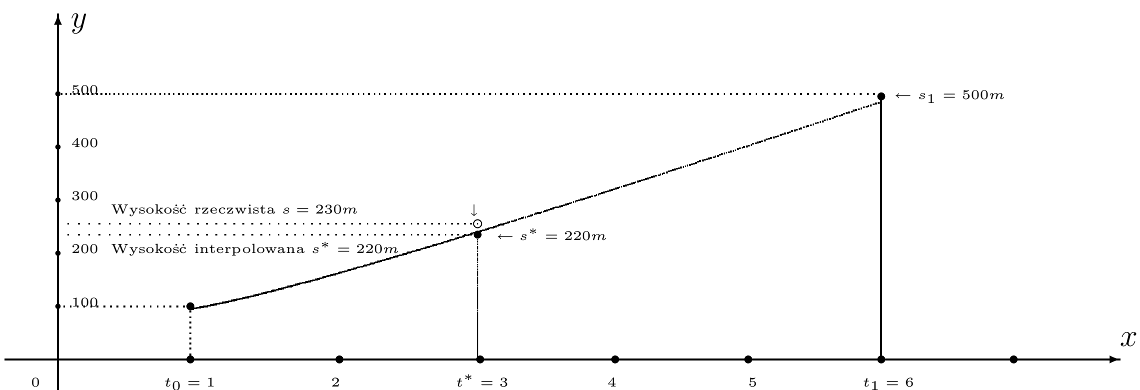
otrzymamy ròwnanie prostej interpolacji

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{t-6}{1-6}100 + \frac{t-1}{6-1}500, \\ s(t) &= -(t-6)20 + (t-1)100, \\ &\underbrace{s(t) = 80t - 20}_{prosta\ interpolacji}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Teraz możemy obliczyċ ile kilometrów samochòd przejechał po 3 godzinach jazdy.

$$s(3) = 80 * 3 - 20 = 240 - 20 = 220$$

Okazało się, że kierowca przekroczył prędkośċ, ktòrą kamera zarejestrowała i po 3 godzinach jazdy samochòd przejechał $230km$ o $10km$ więcej niż interpolowana wartośċ $220km$.
Na rysunku zaznaczone są interpolowana odległośċ $220km$ i rzeczywista odległośċ $230km$ po 3 godzinach jazdy ($t^* = 3h$).



1.2 Ekstra-polacja liniowa

Ekstra-polację liniową wyjaśniamy w następnym przykładzie.

Przykład 1.2 *Oblicz ile kilometrów przejechał samochòd po 7 godzinach jazdy, jeżeli po jednej godzinie jazdy przejechał* $100km$, *a po 6 godzinach jazdy przejechał* $500km$. *Zatem mamy dane*

czas t	$t_0 = 1h$	$t_1 = 6h$	$t^* = 7h$
droga s	$s_0 = 100km$	$s_1 = 500km$	$s^* =?$

Mòwimy ekstra-polacja, gdyż punkt $t^* \notin [t_0, t_1]$ w którym szukamy wartości ekstra-polowanej s^* leży poza danymi węzłami $t_0 = 1$ i $t_1 = 6$.
Przez dwa dane punkty

$$(t_0, s_0) = (1, 100) \quad i \quad (t_1, s_1) = (6, 500)$$

na płaszczyźnie kartezjańskiej prowadzimy prostą

$$s(t) = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} s_1 + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} s_2 \tag{1.3}$$

Sprawdzamy, że prosta o równaniu (1.3) przechodzi przez dane punkty (t_0, s_0) i (t_1, s_1)

$$s(t_0) = \frac{t_0 - t_1}{t_0 - t_1} s_0 + \frac{t_0 - t_0}{t_1 - t_0} s_2 = s_0,$$
$$s(t_1) = \frac{t_1 - t_2}{t_0 - t_1} s_0 + \frac{t_1 - t_0}{t_1 - t_0} s_2 = s_1.$$

Podstawiając do równania (1.3)

$$t_0 = 1, \quad s_0 = 100 \quad i \quad t_1 = 6, \quad s_1 = 500$$

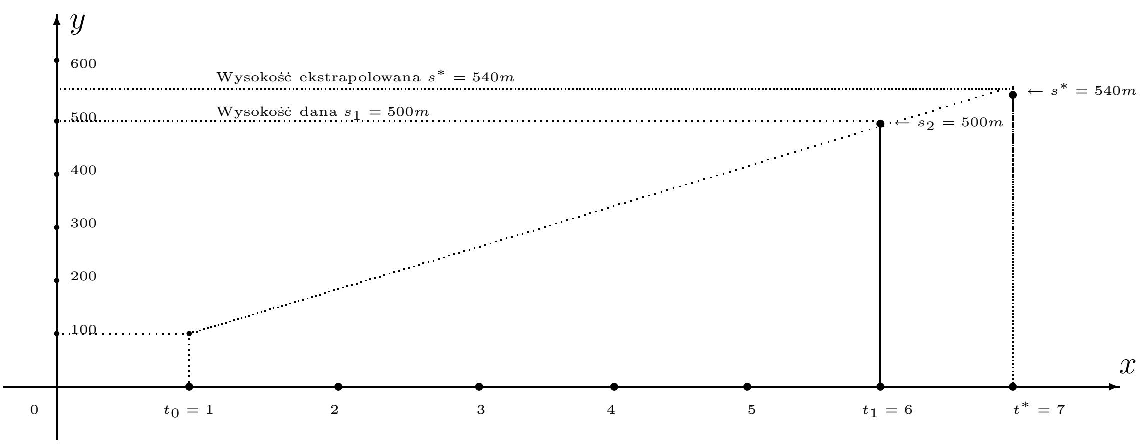
otrzymamy równanie prostej interpolacji

$$s(t) = \frac{t - 6}{1 - 6} 100 + \frac{t - 1}{6 - 1} 500,$$
$$s(t) = -(t - 6)20 + (t - 1)100, \tag{1.4}$$
$$\underbrace{s(t) = 80t - 20.}$$

Zatem po 7 godzinach jazdy samochód przejechał

$$s(3) = 80 * 7 - 20 = 560 - 20 = 540$$

Na rysunku zaznaczona jest ekstra-polowana odległość $540km$ po 7 godzinach jazdy ($t_1 = 7h$).



1.3 Interpolacja kwadratowa

Interpolacja kwadratowa polega na znalezieniu trójmianu kwadratowwego, którego wykres przechodzi przez 3 dane węzły interpolacyjne.
Rozpatrzmy następujący przykład.

Przykład 1.3 *Oblicz na ile metrów w górę wzniesie się samolot po 4 minutach lotu, jeżeli po 1 minucie lotu samolot osiągnął wysokść* $1000m$, *a po 5 minutach samolot osiągnął* $10000m$. *Zatem mamy dane*

czas t	$t_0 = 0\ min.$	$t_1 = 1\ min.$	$t^* = 4\ min.$	$t_2 = 5\ min.$
wysokość h	$h_0 = 0\ m$	$h_1 = 1000$	$h^* = ?$	$h_2 = 10000\ m$

Mówimy inter-polacja, gdyż punkt $t^* \in [t_0, t_2]$ w którym szukamy wartości interpolowanej h^* leży pomiędzy danymi węzłami $t_0 = 0$ i $t_2 = 5$.
Przez 3 dane punkty

$$(t_0, h_0) = (0, 0), \qquad (t_1, h_2) = (1, 1000), \qquad (t_2, h_2) = (5, 10000)$$

na płaszczyźnie kartezjańskiej przechodzi jeden trójmian kwadratowy

$$h(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)}h_0 + \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2}h_1 + \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}h_2 \qquad (1.5)$$

Sprawdzamy, że trójmian o równaniu (1.5) rzeczywiście przechodzi przez dane punkty $(t_0, s_0),\ (t_1, h_1)\ i\ (t_2, h_2)$

$$\begin{aligned} h(t_0) &= \frac{(t_0-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)}h_0 + \frac{(t_0-t_0)(t_0-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2}h_1 + \frac{(t_0-t_0)(t_0-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}h_2 = h_0, \\ h(t_1) &= \frac{(t_1-t_1)(t_1-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)}h_0 + \frac{(t_1-t_0)(t_1-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)}h_1 + \frac{(t_1-t_0)(t_1-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}h_2 = h_1, \\ h(t_2) &= \frac{(t_2-t_1)(t_2-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)}h_0 + \frac{(t_2-t_0)(t_2-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2}h_1 + \frac{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}h_2 = h_2. \end{aligned}$$

Po podstawieniu do równania (1.5) danych

$$\begin{aligned} (t_0, h_0) &= (0, 0), \\ (t_1, h_1) &= (1, 1000) \\ (t_2, h_2) &= (5, 10000) \end{aligned}$$

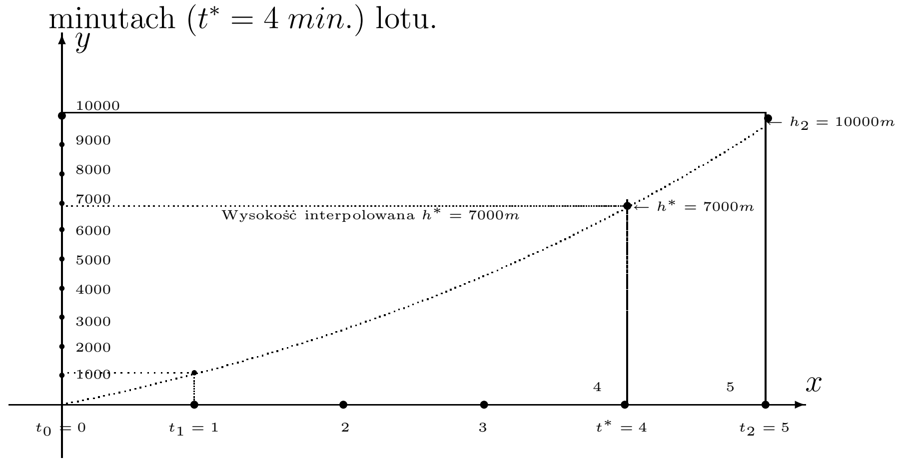
otrzymamy równanie trójmianu interpolacji

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{(t-1)(t-5)}{(0-1)(0-5)} * 0 + \frac{(t-0)(t-5)}{(1-0)(1-5)} * 1000 + \frac{(t-0)(t-1)}{(5-0)(5-1)} * 10000 \\ &= \frac{t^2-6t+5}{5} * 0 + \frac{(t^2-5t}{-4} * 1000 + \frac{t^2-t}{5*4} * 10000 \\ h(t) &= -250t^2 + 1250t + 500 * t^2 - 500t) \\ &= \underbrace{250t^2 + 750t.}_{trojmian\ interpolacji} \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Teraz możemy obliczyċ na ile metrów samolot wniósł się w górę po 4 minutach lotu

$$h(4) = 250 * 4^2 m + 750m * 4 = 4000m + 3000m = 7000m$$

Na rysunku zaznaczona jest interpolowana wysokośċ samolotu $7000m$ po 4 minutach ($t^* = 4\ min.$) lotu.



1.4 Interpolacja kubiczna

Podobnie jak interpolacja liniowa i kwadratowa, interpolacja kubiczna polega na wyznaczeniu wielomianu 3-go stopnia ($n = 3$), który w danych 4-ech węzłach interpolacyjnych

$$t_0, t_1, t_2, t_3$$

przyjmuje zadane wartości

$$h_0, h_1, h_2, h_3.$$

Rozpatrzmy następujący przykład.

Przykład 1.4 *Oblicz na ile metrów w górę wzniesie się samolot po 4 minutach lotu, jeżeli po 1-ej minucie lotu samolot osiągnął wysokśċ* $1000m$, *po 3-ej minucie lotu samolot osiągnął* $3000m$, *i po 5-ciu minutach lotu samolot osiągnął wysokośċ* $10000m$.
Zatem mamy dane do wyznaczenia jedynego wielomianu kubicznego w niżej podanej tabeli

czas t	$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	$t_2 = 3$	$t^* = 4$	$t_3 = 5$
droga s	$h_0 = 0m$	$h_1 = 1000km$	$h_2 = 3000m$	$h^* =?$	$h_3 = 10000m$

Mówimy inter-polacja, gdyż punkt $t^* \in [t_0, t_3]$ w którym szukamy wartości interpolowanej h^* leży pomiędzy danymi węzłami $t_0 = 0$ i $t_3 = 5$.
Przez 4 dane punkty

$$\begin{aligned}(t_0, h_0) &= (0, 0),\\ (t_1, h_2) &= (1, 1000),\\ (t_2, h_2) &= (5, 3000),\\ (t_3, h_3) &= (5, 10000)\end{aligned}$$

na płaszczyźnie kartezjańskiej przechodzi jedyny wielomian kubiczny

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3)}h_0 \\ &+ \frac{(t-t_0)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)(t_1-t_3)}h_1 \\ &+ \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_3)}h_2 \\ &+ \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)}h_3 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Łatwo sprawdzić, że wielomian kubiczny o równaniu (1.7) przechodzi przez dane punkty (t_0, s_0), (t_1, h_1), $(t_2, h_2), (t_3, h_3)$, to znaczy że

$$h(t_0) = h_0, \quad h(t_1) = h_1, \quad h(t_2) = h_2, \quad , h(t_3) = h_3.$$

Po podstawieniu danych

$$\begin{aligned} (t_0, h_0) &= (0, 0), \\ (t_1, h_1) &= (1, 1000) \\ (t_2, h_2) &= (3, 3000) \\ (t_3, h_3) &= (5, 10000) \end{aligned}$$

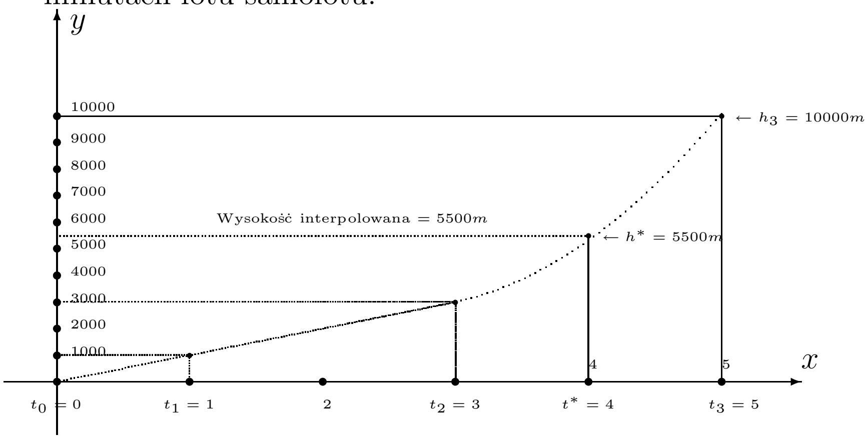
do równania (1.7), otrzymamy równanie wielomianu kubicznego interpolacji

$$\begin{aligned} h(t) &= \tfrac{(t-1)(t-3)(t-5)}{(0-1)(0-3)(0-5)} * 0 + \tfrac{(t-0)(t-3)(t-5)}{(1-0)(1-3)(1-5)} * 1000 \\ &+ \tfrac{(t-0)(t-1)(t-5)}{(3-0)(3-1)(3-5)} * 3000 + \tfrac{(t-0)(t-1)(t-3)}{(5-0)(5-1)(5-3)} * 10000 \\ &= \tfrac{t(t-3)(t-5)}{1*(-2)(-4)} * 1000 + \tfrac{t(t-1)(t-5)}{3*2(-2)} * 3000 + \tfrac{t(t-1)(t-3)}{5*4*2} * 10000 \\ &= 125t(t-3)(t-5) + 250t(t-1)(t-5) + 250t(t-1)(t-3) \\ &= \underbrace{125t(t^2 - 4t + 11)}_{wielomian\ interpolacji} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Teraz możemy obliczyć, że po $t^* = 4$ minutach lotu samolot wzniósł się na interpolowaną wysokość $h^* = 5500m$.
Mianowicie podstawiając do równania (1.8) $t = 4$, otrzymamy

$$h(4) = 125 * (4^2 - 4 * 4 + 11) = 5500$$

Na rysunku zaznaczona jest interpolowana wysokość $h^* = 5500m$ po 4-ech minutach lotu samolotu.



1.5 Iterpolacja wielomianem stopnia $n \geq 4$

Ogólnie zagadnienie interpolacji polega na wyznaczeniu wielomianu, który w zadanych $n+1$ węzłach interpolacyjnych z przedziału $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

przyjmuje zadane wartości

$$y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n.$$

Dokładniej zagadnienie interpolacji wielomianem formułujemy w następujący sposób:
Wyznacz wielomian

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

stopnia co najwyżej n *taki, że*

$$p_n(x_i) = y_i \qquad dla \quad i = 0, 1, 2, ..., n.$$

W każdym podręczniku Analyzy Numerycznej można znaleźć dowód istenia jedynego wielomianu $p_n(x)$, który spełnia wyżej sformułowane warunki interpolacji.
Takim wielomianem interpolacyjnym jest wielomian w postaci Lgrange'a

$$p_n(x) = y_n l_n(x) + y_{n-1} l_{n-1}(x) + y_{n-2} l_{n-2}(x) + \cdots + y_1 l_1(x) + y_0 l_0(x),$$

gdzie wielomiany Lagrange'a

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}$$

$dla \quad i = 0, 1, 2, ..., n.$

Łatwo sprawdzamy, że wielomiany Lagrange'a $l_i(x)$ spełniają warunek

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1, & gdy \quad i = k, \\ 0, & gdy \quad i \neq k. \end{cases}$$

Dlatego wielomian Lagrange'a $p_n(x)$ spełnia warunki interpolacji

$$p_n(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, 2, ..., n.$$

Przykład 1.5 *W paragrafie interpolacja liniowa podaliśmy wielomian Lagrange'a*

$$s(t) = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} s_0 + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} s_1.$$

który dla zmiennej $x = t$, *węzłów* $x_0 = t_0,\ x_1 = t_1$ *i wartości* $y_0 = s_0,\ y_1 = s_1$ *przyjmuje postać wielomianu Lagrange'a stopnia* $n = 1$

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1. \tag{1.9}$$

Łatwo sprawdzamy, że wielomian $p_1(x)$ *w węzłach* $x_0,\ x_1$ *przyjmuje wartości* $y_0,\ y_1$.

Mianowicie, przez podstawienie do równości (1.9) $x = x_0$ *lub* $x = x_1$, *obliczamy*

$$p_1(x_0) = y_0, \qquad p_1(x_1) = y_1.$$

Przykład 1.6 *W paragrafie interpolacja kwadratowaa podaliśmy wielomian Lagrange'a*

$$h(t) = \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)} h_0 + \frac{(t - t_0)(t - t_2)}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_2} h_1 + \frac{(t - t_0)(t - t_1)}{(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)} h_2$$

który dla zmiennej $x = t$, *węzłów* $x_0 = t_0,\ x_1 = t_1,\ x_2 = t_2$ *i wartości* $y_0 = h_0,\ y_1 = h_1,\ y_2 = h_2$ *przyjmuje postać wielomianu Lagrange'a stopnia* $n = 2$

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \tag{1.10}$$

Łatwo sprawdzamy, że wielomian $p_2(x)$ *w węzłach* $x_0,\ x_1,\ x_2$ *przyjmuje wartości* $y_0,\ y_1,\ y_2$.

Mianowicie, przez podstawienie do równości (1.10) $x = x_0,\ x = x_1$ *lub* $x = x_2$, *obliczamy*

$$p_2(x_0) = y_0, \qquad p_2(x_1) = y_1, \qquad p_2(x_2) = y_2.$$

Przykład 1.7 *W paragrafie interpolacja kubiczna podaliśmy wielomian Lagrange'a*

$$
\begin{aligned}
h(t) \;=\;& \frac{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3)}h_0\\
+\;& \frac{(t-t_0)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)(t_1-t_3)}h_1\\
+\;& \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_3)}h_2\\
+\;& \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)}h_3
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

który dla zmiennej $x = t$, *węzłów* $x_0 = t_0,\ x_1 = t_1,\ x_2 = t_2,\ x_3 = t_3$ *i wartości* $y_0 = h_0,\ y_1 = h_1,\ y_2 = h_2,\ y_3 = t_3$ *przyjmuje postać wielomianu Lagrange'a stopnia* $n = 3$

$$
\begin{aligned}
p_3(x) \;=\;& \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0\\
+\;& \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1\\
+\;& \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2\\
+\;& \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3
\end{aligned}
$$

Łatwo sprawdzamy, że wielomian $p_3(x)$ *w węzłach* $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$ *przyjmuje wartości* $y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3$. *Mianowicie, przez podstawienie do równości (1.11)* $x = x_0,\ x = x_1$ *lub* $x = x_2,\ x = x_3$, *obliczamy*

$$p_3(x_0) = y_0, \qquad p_3(x_1) = y_1, \qquad p_3(x_2) = y_2, \qquad p_3(x_3) = y_3.$$

Przykład 1.8 .
Rozpatrz funkcję

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad dla \qquad x \geq 0.$$

(*a*) *Znajdź prostą interpolacji* $y(x)$, *która w punktach*

$$x = 0,\ x = 9$$

przyjmuje wartości

$$y(0) = f(0), \quad y(9) = f(9).$$

(*b*) *Oblicz wartość interpolowaną* $y(4)$.

(*c*) *Podaj wykres prostej interpolacji* $y(x)$ *i zaznacz na wykresie wartość interpolowaną* $y(4)$. *Oblicz błąd interpolacji*

$$\epsilon = f(4) - y(4)$$

Rozwiązanie.
To (a). Równanie prostej przechodzącej przez punkty (x_0, y_0), (x_1, y_1) dla

$$x_0 = 0,\ \ y_0 = f(0)) = \sqrt{0} = 0, \qquad x_1 = 9,\ \ y_1 = f(9) = \sqrt{9} = 3$$

w postaci Lagrange'a

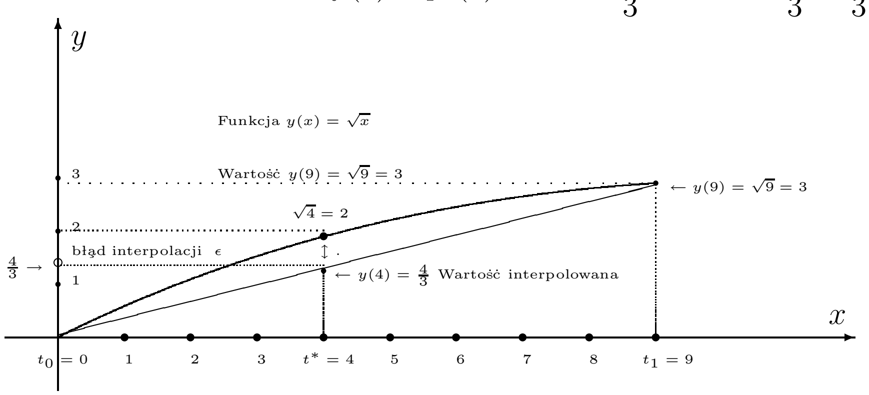
$$y(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} * y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} * y_1,$$
$$y(x) = \frac{x-9}{0-9} * 0 + \frac{x-0}{9-0} * 3,$$
$$y(x) = \frac{x-9}{-9} * 0 + \frac{x}{9} * 3,$$
$$\underbrace{y(x) = \frac{1}{3}x.}_{\textit{prosta interpolacji}}$$

To (b). Wartość interpolowana

$$y(4) \approx \frac{1}{3} * 4 = \frac{4}{3}.$$

Błąd interpolacji

$$\epsilon = f(4) - p_1(4) = \sqrt{4} - \frac{1}{3} * 4 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$



1.6 Zadania

Zadanie 1.1 .
(a) *Znajdź równanie prostej interpolacji $y(x)$ dla danych w tabeli*

x	0	2
y	1	3

(b) *Oblicz wartość interpolowaną $y(1)$.*

(c) *Oblicz wartość ekstra-polowaną* $y(3)$.

(d) *Podaj wykres prostej interpolacji* $y(x)$.

(e) *Zaznacz wartość interpolowaną* $y(1)$ *i wartość ekstra-polowaną* $y(3)$ *na wykresie prostej interpolacji* $y(x)$.

Zadanie 1.2 .
(a) *Znajdź równanie trójmianu interpolacji* $y(x)$ *dla danych w tabeli*

x	0	2	*3*
y	1	5	*10*

(b) *Oblicz wartość interpolowaną* $y(1)$.

(c) *Zaznacz wartość interpolowaną* $y(1)$ *na wykresie trójmianu interpolacji* $y(x)$.

Zadanie 1.3 .
(a) *Znajdź równanie wielomianu kubicznego interpolacji* $y(x)$ *dla danych w tabeli*

x	-1	1	2
y	*0*	2	9

(b) *Oblicz wartość interpolowaną* $y(0)$.

(c) *Podaj wykres wielomianu kubicznego interpolacji* $y(x)$.

(e) *Zaznacz wartość interpolowaną* $y(0)$ *na wykresie wielomianu kubicznego interpolacji* $y(x)$.

Zadanie 1.4 .
Rozpatrz funkcję

$$f(x) = \sqrt{x-1}, \qquad dla \qquad x \geq 1.$$

(a) *Znajdź prostą interpolacji* $y(x)$, *która w punktach*

$$x = 1,\ x = 10$$

przyjmuje wartości

$$y(0) = f(1), \quad y(9) = f(10).$$

(b) *Oblicz wartość interpolowaną* $y(5)$.
(c) *Podaj wykres prostej interpolacji* $y(x)$ *i zaznacz na wykresie wartość interpolowaną* $y(5)$. *Oblicz błąd interpolacji*

$$\epsilon = f(5) - y(5)$$