Chapter 1

Wielomiany stopnia n

Pod pojęciem *wielomiany* rozumiemy najprostrzą klasę funkcji o bardzo szerokim zakresie zastosowań.
W programnie rozszerzonym matematyki szkoły podstawowej wielomiany rozpatrujemy jako naturalne uogólnienie funkcji liniowej i trójmianu kwadratowego w następującej postaci:

Wielomianem stopnia n *o danych współczynnikach* $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ *i zmiennej* x *nazywamy wyrażenie algebraiczne*

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \qquad a_n \neq 0.$$

lub wielomiany zapisane w odwrotnej kolejności wyrazów

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0.$$

dla zmiennej $x \in (-\infty, \infty)$.

Jeżeli $a_n = 0$ *to wielomian jest stopnia co najwyżej* $n - 1$.

Przykład 1.1 *W szczególności wielomian stopnia* $n = 1$

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x, \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

lub

$$p_1(x) = a_1 x + a_0, \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

jest funkcją liniową, która dla współczynników $a_0 = 3,\ a_1 = 2$ *ma postać*

$$p_1(x) = 3 + 2x, \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

lub

$$p_1(x) = 2x + 3, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Przykład 1.2 *W szczególności wielomian stopnia* $n = 2$

$$p_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

lub

$$p_1(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

jest trójmianem kwadratowym, który dla współczynników $a_3 = 2,\ a_2 = 3,$ $a_1 = 4,\ a_0 = 5.$ *ma postać*

$$p_1(x) = 5 + 4x + 2x^2, \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

lub

$$p_1(x) = 2x^2 + 4x + 5, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Przykład 1.3 *Wielomian stopnia* $n = 3$

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

lub

$$p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_1 \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

jest wielomianem kubicznym, który dla współczynników $a_0 = 1,\ a_1 = 2$ $a_2 = 3,$ *i* $a_3 = 4$ *ma postać*

$$p_3(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

$$p_3(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 3 \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

1.1 Operacje arytmetyczne na wielomianach

Operacje arytmetyczne na wielomianach wykonujemy w ten sam sposòb jak na wyrażeniach algebraicznych o danych w postaci wielomianów.

Suma i różnica dwumianów liniowych jest dwumainem liniowym.

Itotnie, rozpatrzmy dwa dwumiany liniowe (*dwie funkcje liniowe*)

$$p_1(x) = a_0 + a_1x,$$

$$p_2(x) = b_0 + b_1x.$$

Suma i różnica tych dwumianów

$$\begin{aligned} p_1(x) \pm p_2(x) &= \overbrace{(a_0 + a_1x)}^{p_1(x)} \pm \overbrace{(b_0 + b_1x)}^{p_2(x)}, \\ &= (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x \end{aligned}$$

jest dwumianem

$$q(x) = c_0 + c_1 x,$$

o współczynnikach $c_0 = a_0 \pm b_0$ i $a_1 \pm b_1$.

Przykład 1.4 *Rozpatrzmy dwa dumiany liniowe (funkcji liniowych)*

$$p_1(x) = 1 + 2x,$$

$$p_2(x) = 3 + 4x.$$

Suma i różnica tych dwumianów

$$\begin{aligned} p_1(x) \pm p_2(x) &= \overbrace{(1+2x)}^{p_1(x)} \pm \overbrace{(3+4x)}^{p_2(x)}, \\ &= (1 \pm 3) + (2 \pm 4)x \end{aligned}$$

jest dwumianem liniowym dla sumy

$$q(x) = 4 + 6x,$$

i dla różnicy

$$q(x) = -2 - 2x$$

Iloczyn dwumianów liniowych (funkcji liniowych)

$$\begin{aligned} p_1(x) * p_2(x) &= \overbrace{(a_0 + a_1 x)}^{p_1(x)} * \overbrace{(b_0 + b_1 x)}^{p_2(x)} \\ &= a_0 * b_0 + (a_1 * b_0 + a_0 * b_1)x + a_1 * b_1 * x^2 \end{aligned}$$

jest trómianem kwadratowym

$$p_3(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

o współczynnikach

$$c_0 = a_0 * b_0,$$

$$c_1 = (a_1 * b_0 + a_0 * b_1,$$

$$c_2 = a_1 * b_1,$$

Przykład 1.5 *Iloczyn dwumianów liniowych*

$$\begin{aligned} p_1(x) * p_2(x) &= \overbrace{(1+2x)}^{p_1(x)} * \overbrace{(3+4x)}^{p_2(x)} \\ &= 1 * 3 + (2 * 3 + 1 * 4)x + 2 * 4 * x^2 \end{aligned}$$

jest trómianem kwadratowym

$$p_3(x) = 3 + 10x + 8x^2$$

Iloraz dwumianów liniowych (funkcji liniowych)

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{\overbrace{a_0 + a_1x}^{p_1(x)}}{\underbrace{b_0 + b_1x}_{p_2(x)}}$$

jest funkcją wymierną

$$w(x) = \frac{a_0 + a_1x}{b_0 + b_1x}$$

określoną dla $x \neq -\frac{b_0}{b_1}$, *jeżeli* $b_1 \neq 0$

Przykład 1.6 *Iloraz dwumianów liniowych (funkcji liniowych)*

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{\overbrace{1 + 2x}^{p_1(x)}}{\underbrace{3 + 4x}_{p_2(x)}}, \quad x \neq -\frac{3}{4}$$

jest funkcją wymierną

$$w(x) = \frac{\overbrace{1 + 2x}^{p_1(x)}}{\underbrace{3 + 4x}_{p_2(x)}}$$

określoną dla $x \neq -\frac{3}{4}$.

Zauważmy, że funkcję wymierną $w(x)$ *możemy przedstawić w postaci*

$$w(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3+4x}), \quad x \neq -\frac{3}{4}.$$

Suma i różnica trójmianów kwadratowych jest trójmianem kwadratowym.

Itotnie, rozpatrzmy dwa trójmiany kwadratowe

$$p_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

$$p_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2.$$

Suma i różnica tych trójmianów

$$\begin{aligned} p_1(x) \pm p_2(x) &= \overbrace{(a_0 + a_1x + a_2x^2)}^{p_1(x)} \pm \overbrace{(b_0 + b_1x + b_2x^2)}^{p_2(x)}, \\ &= (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 \end{aligned}$$

jest trójmianem kwadratowym

$$q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2,$$

o współczynnikach $c_0 = a_0 \pm b_0$, $a_1 \pm b_1$ i $c_2 = a_2 \pm b_2$.
Iloczyn trójmianów kwadratowych

$$\begin{aligned} p_1(x) * p_2(x) &= \overbrace{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)}^{p_1(x)} * \overbrace{(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)}^{p_2(x)} \\ &= a_0 * b_0 + (a_0 * b_1 + a_1 * b_0)x + (a_0 * b_2 + a_2 b_0) * x^2 \\ &+ (a_1 * b_2 + a_2 * b_1)x^3 + a_2 * b_2 x^4 \end{aligned}$$

jest wielomianem czwartego stopnia $n = 4$.

$$p_3(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$$

o współczynnikach

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 * b_0, \\ c_1 &= (a_0 * b_1 + a_1 * b_0, \\ c_2 &= a_0 * b_2 + a_2 b_0, \\ c_3 &= a_1 * b_2 + a_2 * b_1, \\ c_4 &= a_2 * b_2 \end{aligned}$$

Iloraz trójmianów kwadratowych

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{\overbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}^{p_1(x)}}{\underbrace{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}_{p_2(x)}}$$

jest funkcją wymierną

$$w(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

określoną dla $x \neq -\frac{b_0}{b_1}$, jeżeli $b_1 \neq 0$

Przykład 1.7 *Rozpatrzmy dwa trójmiany kwadratowe*

$$p_1(x) = 1 + 2x + 3x^2,$$

$$p_2(x) = 3 + 4x + 5x^2.$$

Suma i różnica tych trójmianów

$$\begin{aligned} p_1(x) \pm p_2(x) &= \overbrace{(1 + 2x + 3x^2)}^{p_1(x)} \pm \overbrace{(3 + 4x + 5x^2)}^{p_2(x)}, \\ &= (1 \pm 3) + (2 \pm 4)x + (3 \pm 5)x^2 \end{aligned}$$

jest trójmianem dla sumy

$$q(x) = 4 + 6x + 8x^2,$$

i dla różnicy

$$q(x) = -2 - 2x - 2x^2$$

Iloczyn trójmianów

$$\begin{aligned} p_1(x) * p_2(x) &= \overbrace{(1 + 2x + 3x^2)}^{p_1(x)} * \overbrace{(3 + 4x + 5x^2)}^{p_2(x)} \\ &= 1 * 3 + (1 * 4 + 2 * 3)x + (1 * 5 + 3 * 3 + 2 * 4)x^2 \\ &+ (2 * 5 + 3 * 4)x^3 + 3 * 5x^4 \end{aligned}$$

jest wielomianem czwartego stopnia $n = 4$

$$p_3(x) = 3 + 10x + 22x^2 + 22x^3 + 15x^4.$$

Iloraz trójmianów kwadratowych

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{\overbrace{1 + 2x + 3x^2}^{p_1(x)}}{\underbrace{3 + 4x + 5x^2}_{p_2(x)}}$$

jest funkcją wymierną

$$w(x) = \frac{1 + 2x + 3x^2}{3 + 4x + 5x^2}$$

określoną dla wszstkich liczb rzeczywistych $x \in (-\infty, \infty)$, *gdyż trójmian*

$$3 + 4x + 5x^2 > 0$$

jest dodatni dla wszystkich rzecywistych wartości zmiennej x

Rozpatrzmy dwumian liniowy i trójmian kwadratowym.

Suma i różnica dwumianu lioniowego i trójmianu kwadratowego jest trójmianem kwadratowym.

Itotnie, rozpatrzmy dwa tròjmiany kwadratowe

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x,$$

$$p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2.$$

Suma i ròżnica tych tròjmianòw

$$\begin{aligned} p_1(x) \pm p_2(x) &= \overbrace{(a_0 + a_1 x)}^{p_1(x)} \pm \overbrace{(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)}^{p_2(x)}, \\ &= (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + b_2 x^2 \end{aligned}$$

jest tròjmianem kwadratowym

$$q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2,$$

o współczynnikach $c_0 = a_0 \pm b_0$, $a_1 \pm b_1$ i $c_2 = b_2$.
Iloczyn dwumianu liniowego przez tròjmian kwadratowych

$$\begin{aligned} p_1(x) * p_2(x) &= \overbrace{(a_0 + a_1 x)}^{p_1(x)} * \overbrace{(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)}^{p_2(x)} \\ &= a_0 * b_0 + (a_0 * b_1 + a_1 * b_0)x + (a_0 * b_2 + a_1 * b_1) * x^2 \\ &+ \ (a_1 * b_2 x^3 \end{aligned}$$

jest wielomianem kubicznym stopnia $n = 3$.

$$p_3(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

o współczynnikach

$$c_0 = a_0 * b_0,$$

$$c_1 = (a_0 * b_1 + a_1 * b_0,$$

$$c_2 = a_0 * b_2 + a_1 b_1,$$

$$c_3 = a_1 * b_2,$$

Iloraz tròjmianòw kwadratowych

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{\overbrace{a_0 + a_1 x}^{p_1(x)}}{\underbrace{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}_{p_2(x)}}$$

jest funkcją wymierną

$$w(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

określoną dla x dla poza pierwiastkami równania kwadratowego

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 0$$

Przykład 1.8 *Rozpatrzmy dwumian liniowy i trójmian kwadratowy*

$$p_1(x) = 1 + 2x,$$

$$p_2(x) = 3 + 4x + 5x^2.$$

Suma i różnica tych trójmianów

$$\begin{aligned} p_1(x) \pm p_2(x) &= \overbrace{(1+2x)}^{p_1(x)} \pm \overbrace{(3+4x+5x^2)}^{p_2(x)}, \\ &= (1 \pm 3) + (2 \pm 4)x + 5x^2 \end{aligned}$$

jest trójmianem kwadratowym dla sumy

$$q(x) = 4 + 6x + 5x^2,$$

i dla różnicy

$$q(x) = -2 - 2x - 5x^2$$

Iloczyn dwumainu przez trójmian

$$\begin{aligned} p_1(x) * p_2(x) &= \overbrace{(1+2x)}^{p_1(x)} * \overbrace{(3+4x+5x^2)}^{p_2(x)} \\ &= 1*3 + (1*4+2*3)x + (1*5+2*4)x^2 + 2*5x^3 \end{aligned}$$

jest wielomianem kubicznym $n = 3$

$$p_3(x) = 3 + 10x + 13x^2 + 10x^3$$

Iloraz trójmianów kwadratowych

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{\overbrace{1+2x}^{p_1(x)}}{\underbrace{3+4x+5x^2}_{p_2(x)}}$$

jest funkcją wymierną

$$w(x) = \frac{1+2x}{3+4x+5x^2}$$

określoną dla wszstkich liczb rzeczywistych $x \in (-\infty, \infty)$, gdyż trójmian

$$3 + 4x + 5x^2 > 0$$

jest dodatni dla wszystkich rzecywistych wartości zmiennej x

W przypadku ogólnym operacje arytmetyczne na wielomianach wykonujemy tak samo jak na wyrażeniach algebraicznych o danych składowych

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$
$$p_m(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m.$$

1.1.1 Dzielenie wielomianu $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$.

Wielomian

$$p_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

dzielimy przez dwumian $x-x_0$ według schematu dzielenia podanego w następujących przykładach:

Przykład 1.9 *Wykonaj dzielenie:*

$$\begin{array}{lcl} (x^3-1):(x-1) & = & x^2+x+1 \\ x^3-x^2 & & \\ ----& & \\ x^2-1 & & \\ x^2-x & & \\ ---- & & \\ x-1 & & \\ x-1 & & \\ ---- & & \\ 0 & & \end{array}$$

Zauważmy, że wykonujemy odejmowanie pod kreską.
Zatem wielomian $x^3 - 1$ dzieli się przez dwumian $x - 1$ i wynikiem dzielenia jest trójmian $x^2 + x + 1$.
Sprawdzamy wykonując mnożenie

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 - x^2 - 1 = x^3 - 1$$

Przykład 1.10 *Wykonaj dzielenie:*

$$
\begin{array}{lll}
(x^4 - x^3 - x^2 - x - 2) : (x - 2) & = & x^3 + x^2 + x + 1 \\
x^4 - 2x^3 & & \\
- - -- & & \\
x^3 - x^2 & & \\
x^3 - 2x^2 & & \\
- - -- & & \\
x^2 - x & & \\
x^2 - 2x & & \\
- - -- & & \\
x - 2 & & \\
x - 2 & & \\
- - -- & & \\
0 & &
\end{array}
$$

Zauważmy, że wykonujemy odejmowanie pod kreską.
Zatem wielomian $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ dzieli się przez dwumian $x - 2$ i wynikiem dzielenia, którym jest wielomian $x^3 + x^2 + x + 1$.
Sprawdzamy, że

$$(x-2)(x^3+x^2+x+1) = x^4+x^3+x^2+x-2x^3-2x^2-2x-2 = x^4-x^3-x^2-x-2.$$

1.1.2 Dzielenie wielomianu $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$ z resztą.

Algorytm dzielenia wielomianów jest rozszerzeniem algorytmu dzielenia liczb członkowitych.
W powyższych przykładach wykonaliśmy dzielenie wielomianu 3-go i 4-go stopnia przez dwumian $x - x_0$ bez reszty, $r = 0$. Na ogół wielomiany dzielą się przez dwumian z resztą $r \neq 0$.
Jeżeli dzielimy wielomian stopnia $n \geq 1$

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

przez dwumian $x - x_0$ to reszta r jest liczbą.
Operacje dzielenia wielomianu $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$ piszemy w postaci

$$\frac{p_n(x)}{x - x_0} = q_{n-1}(x) + \frac{r}{x - x_0}, \qquad n \geq 1,$$

gdzie $q_{n-1}(x)$ jest wielomianem stopnia $n - 1$, a r jest resztą.

Wynik dzielenia wielomianu $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$ piszemy również w postaci

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - x_0) + r$$

Z powyższej równości wynika wzór na resztę, mianowicie

$$r = p_n(x_0).$$

Przykład 1.11 *Wykonaj dzielenie*

$$(2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6) : (x - 3)$$

$$\begin{array}{lcl}
(2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6) : (x - 3) & = & 2x^3 + 9x^2 + 23x + 74 \\
2x^4 - 6x^3 & & \\
\quad - - - - - - - - & & \\
\quad 9x^3 - 4x^2 & & \\
\quad 9x^3 - 27x^2 & & \\
\quad - - -- & & \\
\qquad\quad 23x^2 + 5x & & \\
\qquad\quad 23x^2 - 69x & & \\
\qquad\quad - - - - - -- & & \\
\qquad\qquad\quad 74x + 6 & & \\
\qquad\qquad\quad 74x - 222 & & \\
\qquad\qquad\quad - - - - - & & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 226 & &
\end{array}$$

Odpowiedź: Dzieląc wielomian

$$p_4(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$$

przez dwumian $x - 3$ otrzymamy wynik

$$q_3(x) = 2x^3 + 9x^2 + 23x + 74$$

z resztą $r = 226$.
Wtedy piszemy

$$\frac{p_4(x)}{x-3} = (2x^3 + 9x^2 + 23x + 74) + \frac{226}{x-3}.$$

lub

$$p_4(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6 = (2x^3 + 9x^2 + 23x + 74)(x - 3) + 226.$$

Skąd reszta z dzielenia

$$r = p_4(3) = 226.$$

1.1.3 Pierwiastki wielomianów. Twierdzenie Bezouta

Zera funkcji liniowej lub funkcji kwadratowej znajdujemy stosując znane wzory podane w poprzednich artykułach na stronie heliantus.pl pod linkiem *Proseminarium.* Znane są również wzory Cardano na pierwiastki wielomianów trzeciego stopnia i czwartego stopnia. Wiadomo jednak, że pierwiastków wielomianu stopnia wyższego lub równego 5 nie można wyrazić przez współczynniki tego wielomianu używając czterech operacji arytmetycznych i operacji pierwiastek. (Twierdzenie Abela-Ruffiniego, 1824-1845 A.D.)

Natomiast pierwiastki niektórych wielomianów stopni wyższych znajdujemy stosując następujące kryterium:
Kryterium. *Jeżeli wielomian*

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

o współczynnikach $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ *całkowitych ma pierwiastek* x_0*, który jest liczbą całkowitą, to pierwiastek* x_0 *jest dzielnikami jego wyrazu wolnego* a_0*, piszemy* $x_0 | a_0$.
To kryterium dotyczy tylko wielomianów o współczynnikach całkowitych, które mają pierwiaski całkowite .
Usasadnienie tego kryterium jest proste. Mianowicie, niech całkowita liczba $x_0 \neq 0$ będzie pierwiastkiem wielomianu $p_n(x)$ stopnia n o współczynnikach całkowitych. Teraz pokażemy, że x_0 jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.
Zachodzi oczywista równość:

$$\begin{aligned} & p_n(x_0) = 0, \\ & \frac{p_n(x_0)}{x_0} = \underbrace{a_n x_0^{n-1} + a_{n-1}x_0^{n-2} + \cdots + a_1} + \frac{a_0}{x_0} = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Wyrażenie podkreślone nawiasem

$$\underbrace{a_n x_0^{n-1} + a_{n-1}x_0^{n-2} + \cdots + a_1}$$

jest liczbą całkowitą jako suma iloczynów liczb całkowitych. Z równości (1.1) wynika, że iloraz $\dfrac{a_0}{x_0}$ też jest liczbą całkowitą, gdyż suma jest zerem. Zatem pierwiastek x_0 jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Przykład 1.12 *Znajdź pierwiastki całkowite wielomianu*

$$p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 6$$

Rozwiązanie. Pierwiastka wielomianu

$$p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

szukamy wśród dzielników 2 lub 3 współczynnika $a_0 = -6$.
Sprawdzamy czy $x_0 = 2$ jest pierwiastkiem tego wielomianu

$$p_3(2) = 2^3 - 2^2 + 2 - 6 = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$$

Zatem, dzielnik $x_0 = 2$ jest pierwiastkiem wielomianu $p_4(x)$.
Teraz sprawdzamy czy $x_0 = 3$ jest pierwiastkiem tego wielomianu

$$p_3(2) = 3^3 - 3^2 + 3 - 6 = 27 - 9 + 3 - 6 = 12 \neq 0$$

Dzielnik $x_0 = 3$ nie jest pierwiastkiem wielomianu $p_3(x)$.
Zauważmy, że dla niektórych wielomianów żaden z dzielników współczynnika

a_0 nie jest pierwiastkiem.
Na przykład wielomian

$$p_2(x) = x^2 + 2x + 8$$

nie ma zer rzeczywistych, gdyż wyróżnik $\Delta = -28$ jest ujemny.
Podstawową informacją o istnieniu pierwiastków wielomianu jest twierdzenie Bezouta.

Twierdzenie 1.1 *Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu*

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy ten wielomian jest podzielny przez dwumian $x - x_0$.

Dowód. Zauważmy, że twierdzenie Bezouta jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to żeby liczba $x_0 \in R$ była pierwiastkiem wielomianu.
Warunek konieczny znaczy:
Jeżeli wielomian $p_n(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - x_0$ to liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu, to znaczy $p_n(x_0) = 0$ oraz reszta $r = 0$.
Zatem niech wielomian $p_n(x)$ będzie podzielny przez dwumian $x - x_0$ bez reszty. wtedy ten wielomian ma postać

$$p_n(x) = (x - x_0)q_{n-1}(x)$$

gdzie $q_{n-1}(x)$ jest wielomianem stopnia co ajwyyżej $n - 1$.
Skąd dla $x = x_0$ wynika równość $p_n(x_0) = 0$ i dlatego x_0 jest pierwiastkiem tego wielomianu.
Warunek dostateczny znaczy:
Jeżeli liczba $x_0 \in R$ jest pierwiastekiem wielomian $p_n(x)$ to ten wielomian jest podzielny przez dwumian $x - x_0$ z ressztą $r = 0$.
Wiadomo, że dzieląc wielomia $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$ otrzymamy równość

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - x_0) + r, \tag{1.2}$$

gdzie $q_{n-1}(x)$ jest wielomianem stopnia $n - 1$.

Jeżeli x_0 jest pierwiastkiem wielomianu, to

$$p_n(x_0) = 0 \quad i\,przez \;\; rownanie\; (1.2) \quad p_n(x_0) = r.$$

Zatem reszta $r = 0$. Wtedy z równości (1.2) wynika postać wielomianu

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - x_0), \tag{1.3}$$

w której jest czynnik $x - x_0$. Dlatego wielomian $p_n(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - x_0$ z resztą $r = 0$.

1.1.4 Rozkład wielomianu na czynniki

Z twierdzenia Bezouta wynika następujący wniosek:
Wniosek. *Niech liczby rzeczywiste* $x_1, x_2, ..., x_k$, $k \leq n$ *bedą zerami wielomianu*

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

wtedy ten wielomian można zapisać w postaci iloczynu

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_k)q_{n-k}(x) \tag{1.4}$$

$n - k$ *czynników liniowych* $(x - x_i)$, $i = 1, 2, ..., k$, *i wielomianu* $q_{n-k}(x)$ *stopnia* $n - k$.
Istotnie dla $k = 1$ z twierdzenia Bezouta wprost wynika iloczyn

$$p_n(x) = (x - x_1)q_{n-1}(x)$$

Stosując powtórnie twierdzenie Bezouta do wielomianu $q_{n-1}(x)$ dla zera x_2 otrzymammy rozkład

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)q_{n-2}(x)$$

Powtarzając zastosowanie twierdzenia Bezouta dla następnych zer wielomianu $p_n(x)$ otrzymamy rozkład (1.4) wielomianu na czynniki liniowe i wielomianu $q_{n-k}(x)$.
Zauważmy, że rozkład wielomianu stopnia $n \geq 1$

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

jest równoważny z rozkładem wielomianu

$$p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

ze współczynnikiem $a_n = 1$, gdyż współczynnik $a_n \neq 0$ zawsze możemy wyciągnąć przed nawias.
Teraz z sformułujemy twierdzenie podstawowe o rozkładzie wielomianu naczynniki nierozkładalne:

Twierdzenie 1.2 *Każdy wielomian*

$$p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

rozkłada się na czynniki liniowe $x - x_0$ *lub czynniki kwadratowe* $x^2 + a_1 x + a_0$ *z wyróżnikiem* $a_1^2 - 4a_0 < 0$ *ujemnym. Ten rozkład jest jednoznaczy.*

Niżej wyliczmy następujące metody rozkładania wielomianów na czynniki:
Sposoby rozkładania wielomianów na czynniki.

1. Rokład trómianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$

2. Wyciąganie wspólnego czynnika przed nawias
3. Sposób grupowania wyrazów
4. Stosowanie wzorów uproszczonego mnożenia
5. Znajdowanie zer wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Przykład 1.13 *Rozłóż na czynniki wielomian kwadratowy*

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Rozwiązanie. Wielomian kwadratowy rozkłada się na czynniki w zależności od znaku wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$. Mianowicie, jeżeli wyróżnik $\Delta \geq 0$ jest nieujemny, wtedy ten trójmian ma dwa pierwiastki rzeczywiste i rozkłada się na czynniki

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ten przypadek obejmuje również pierwiastek podwójny kiedy $\Delta = 0$ i $x_1 = x_2$. Jeżeli wyróżnik $\Delta < 0$ jest ujemny to trójmian ax^2+bx+c jest nie rozkładalny i wtedy czynnikiem jest wyrażenie $ax^2 + bx + c$.

Przykład 1.14 *Rozłóż na czynniki następujący wielomian przez grupowanie wyrazów i wyciąganie wspólnego czynnika*

$$p_3(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

Rozwiązanie. Stosujemy kombinacje powyższych sposobów. W tym przypadku grupujemy wyrazy pierwszy i drugi oraz trzeci i czwarty potem wyciągająamy przed nawias x^2 oraz 4, w ten sosób otrzymamy

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 &= x^2(x - 2) - 4(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 - 4) \end{aligned}$$

Dalej, stosując wzór na różnicę kwadratów $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ dostajemy rozkład tego wielomianu na czynniki

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 &= x^2(x - 2) - 4(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 4) \\ &= (x - 2)(x - 2)(x + 2) = (x - 2)^2(x + 2). \end{aligned}$$

Przykład 1.15 *Rozłóż na czynniki następujący wielomian*

$$p_3(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 10$$

Rozwiązanie. Stosujemy kombinacje powyższych sposobów. W tym przypadku wyciągając przed nawias x^2 oraz 5, otrzymamy

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 10 &= x^2(x + 5) + 2(x + 10) \\ &= (x + 5)(x^2 + 2) \end{aligned}$$

Ponieważ wyrażenie kwadratowe $x^2 + 2 > 0$ jest wszędzie dodatnie to rozkład tego wielomianu na czynniki

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 + 5x^2 2x - 10 &= x^2(x+5) + 2(x+10) \\ &= (x+5)(x^2+2) \end{aligned}$$

zawiera czynnik liniowy $x + 5$ i czynnik kwadradratowy $x^2 + 2$, który jest nie rozkładalny.

Przykład 1.16 *Rozłóż na czynniki następujący wielomian*

$$p_4(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$$

Rozwiązanie. W tym przypadku zer wielomianu o współczynnikach całkowitych szukamy wśród dzielników $-2, -1, 1, 2, 3, 4, 6$ wyrazu wolnego $a_0 = -12$.

1. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = -2$ jest zerem tego wielomianu

   $$p_4(-2) = (-2)^4 - 4(-2)^3 - (-2)^2 + 16(-2) - 12 = 16 + 32 - 4 - 32 - 12 = 0$$

   Zatem $x_0 = -2$ jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik $x + 2$.

2. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = -1$ jest zerem tego wielomianu

   $$p_4(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 - (-1)^2 + 16(-1) - 12 = 1 + 4 - 1 - 16 - 12 = -32 \neq 0.$$

   Zatem $x_0 = -1$ nie jest zerem tego wielomianu.

3. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = 1$ jest zerem tego wielomianu

   $$p_4(1) = (1)^4 - 4(1)^3 - (1)^2 + 16(1) - 12 = 1 - 4 - 1 + 16 - 12 = 0$$

   Zatem $x_0 = 1$ jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik $x - 1$.

4. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = 2$ jest zerem tego wielomianu

   $$p_4(2) = (2)^4 - 4(2)^3 - (2)^2 + 16(2) - 12 = 16 - 32 - 4 + 32 - 12 = 0$$

   Zatem $x_0 = 2$ jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik $x - 2$.

5. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = 3$ jest zerem tego wielomianu

   $$p_4(3) = (3)^4 - 4(3)^3 - (3)^2 + 16(3) - 12 = 81 - 108 - 9 + 48 - 12 = 0$$

   Zatem $x_0 = 3$ jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik $x - 3$.

Odpowiedź: Rozkład wielomian $p_4(x)$ na czynniki liniowe

$$p_4(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = (x+2)(x-1)(x-2)(x-3).$$

Zadanie 1.1 *Rozłóż na czynniki następujące wielomiany:*

1. *Trójmian kwadratowy*
$$p_2(x) = 2x^2 + 6x + 4$$
2. *Wielomian*
$$p_3(x) = (x^3 - 8) + (x^2 - 4)$$
3. *Wielomian*
$$p_4(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 6$$

1.1.5 Nierówności wielomianowe

W tematach funkcje liniowe i kwadratowe opisane zostały sposoby rozwiązywania nierówności linowych i kwadratowych. Teraz zajmiemy się rozwiązywniem nierówności wyższych stopni $n \geq 3$.
Rozpatrzmy następującą nierówność:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \geq 0 \qquad n \geq 1, \quad a_n \neq 0.$$

Rozwiązując powyższą nierówność wykonujemy następujące czynności:

1. Rozkładamy ten wielomian na czynniki
$$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_k)q_{n-k}(x), \quad a_n \neq 0.$$
W powyższym rozkładzie dopuszczamy k pierwiastków rzeczywistych właczając pierwiastki wielokrotne, $x_1, x_2, ..., x_k$. Zauważmy, że jeżeli $k = n$ to wielomian $p_n(x)$ rozkłada sie na czynniki lioniowe i ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste $x_1, x_2, ..., x_n$.
Tutaj $q_{n-k}(x)$ jest wielomianem stopnia $n - k$ nie rozkładalnym na czynniki liniowe. To znaczy, że wielomian $q_{n-k}(x)$ zawiera tylko czynniki kwadratowe postaci $x^2 + bx + c$, z wyróżnikiem $\Delta = b^2 - 4c < 0$ ujemnym.

2. Zuważamy, że nierówność
$$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_k)q_{n-k}(x) \geq 0, \quad a_n \neq 0.$$
jest równoważna z nierównością
$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)....(x - x_k)q_{n-k}(x) \geq 0, \quad \text{gdy} \quad a_n > 0,$$
lub równoważna z nierównością
$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)....(x - x_k)q_{n-k}(x) \leq 0, \quad \text{gdy} \quad a_n < 0.$$

Ponieważ obie strony nierówności zawsze możemy podzielić przez liczbę $a_n \neq 0$ różną od zera zachowując kierunek nierówności, gdy liczba współczynnik $a_n > 0$ jest dodatni i zmieniając zwrot nierówności, gdy współczynnik $a_n < 0$ jest ujemny.

3. Rozwiązanie odczytujemy z wykresu funkcji

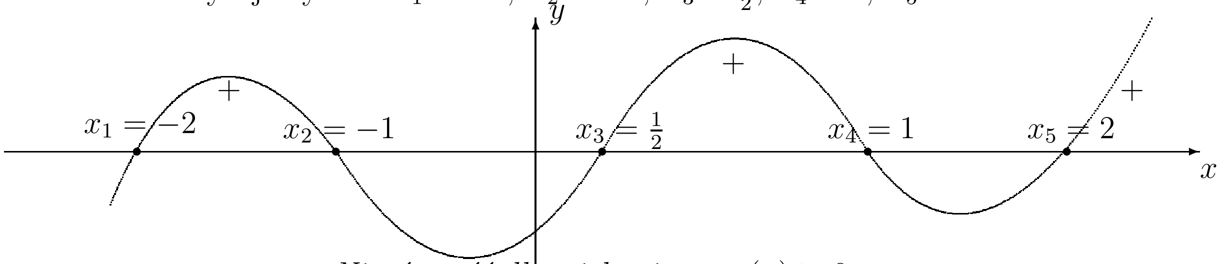
- Przypadek $a_n > 0$ i wszystkie zera wielomianu $x_1,\ x_2, ..., x_k$ są różne $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.
  Na rysunku przykład nierówności dla wielomianu

$$p_5(x) = 2x^5 - x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 8x - 4 \geq 0, \quad a_5 = 2 > 0.$$

Rozkładamy ten wielomian na czynniki

$$p_5(x) = (x+2)(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-2) \geq 0$$

Odczytujemy zera $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = 1,\ x_5 = 2$



Nierówność dla wielomianu $p_5(x) \geq 0$.

Z wykresu odczytujemy rozwiązanie, to znaczy te przedziały w których wielomian jest nieujemny:
Zatem, nierówność ta jest prawdziwa dla $x \in [-2, -1] \cup [\frac{1}{2}, 1] \cup [2, \infty]$

- Przypadek $a_n < 0$ i wszystkie zera wielomianu $x_1,\ x_2, ..., x_k$ są różne $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.
  Na rysunku przykład nierówności dla wielomianu

$$p_5(x) = -2x^5 + x^4 + 10x^3 - 5x^2 - 8x + 4 \geq 0, \quad a_5 = -2 < 0.$$

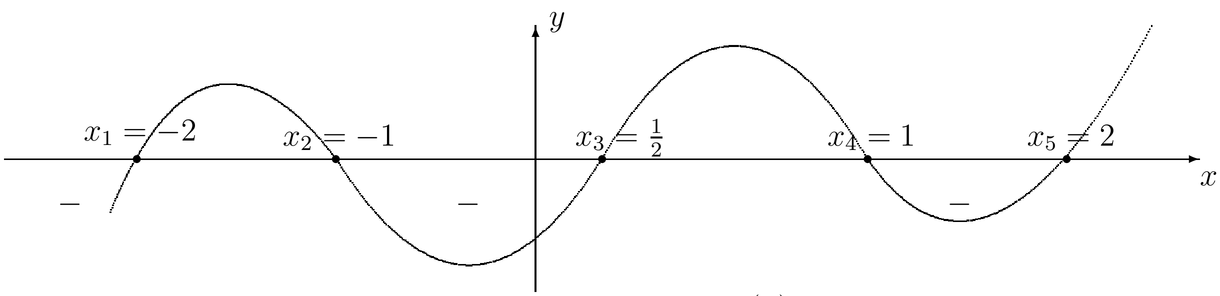
Rozkładamy ten wielomian na czynniki

$$p_5(x) = -2(x+2)(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-2) \geq 0$$

Dzieląc obie strony tej nierówności przez -2, otrzymamy nierówność przeciwną i równoważną

$$p_5(x) = (x+2)(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-2) \leq 0.$$

Z wykresu odczytujemy zera $x_1 = -2, \ x_2 = -1, \ x_3 = \frac{1}{2}, \ x_4 = 1, \ x_5 = 2$ i zaznaczmy te zera na niżej podanym rysunku



Nierówność dla wielomianu $p_5(x) \leq 0$.

Z wykresu odczytujemy rozwiązanie to znaczy te przedziały w których wielomian jest niedodatni:
Zatem nierówność ta jest prawdziwa dla $x \in [-\infty, -2] \cup [-1, \frac{1}{2}] \cup [1, 2]$.

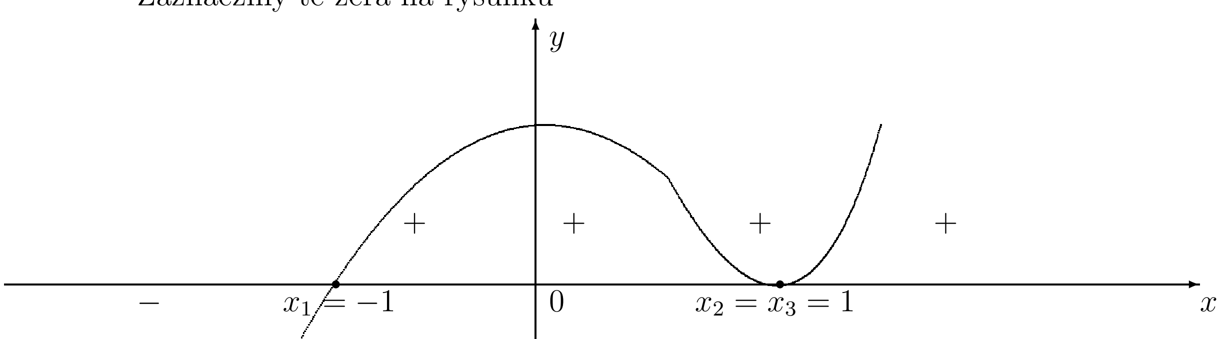
- Przypadek gdy wielomian ma wielokrotne zera. Wtedy wykres wielomianu nie przecina osi x, jeżeli krotność jest parzysta $2, 4, 6 ...$;
  Natomiast, jeżeli krotność jest nie parzysta to wykres wielomianu przcina oś x.
  Przypadek wielokrotnych zer wyjaśnimy na następującym przykładzie:
  Rozwiąż nierówność:

$$p_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \geq 0$$

Rozkładamy ten wielomian na czynniki

$$p_3(x) = (x - 1)(x + 1)^2 \geq 0$$

Następnie odczytujemy zera $x_1 = -1$, oraz powdwójne zero $x_2 = 1$.
Zaznaczmy te zera na rysunku



Podwójne zero w punkcie $x = 1$.

Nierówność dla wielomianu $p_3(x) \geq 0$.

Z wykresu odczytujemy rozwiązanie to znaczy te przedziały w których wielomian jest nieujemny:
Zatem nierówność ta jest prawdziwa dla $x \in [-1, \infty]$

1.2 Zadania

Zadanie 1.2 *Napisz dwumian liniowy*

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

lub

$$p_1(x) = a_1 x + a_0, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

o współczynników $a_0 = 3,\ a_1 = 2.$

Podaj wykres dwumianu liniowego $p_1(x)$ *i znajdź punkty przecięcia z osią* x *i z osią* y.

Zadanie 1.3 *Napisz trójmian kwadratowy*

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

lub

$$p_1(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

o współczynników $a_2 = 3, a_1 = 2,\ a_0 = -5.$

- *Oblicz wartość trójmianu* $p_2(x)$ *w punkcie* $x = 0$,
- *Znajdź pierwiastki trómianu* $p_2(x)$ *i podaj jego wykres.*

Zadanie 1.4 *Napisz wielomian kubiczny w postaci*

$$p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

lub

$$p_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_1 \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

o współczynników $a_0 = -2,\ a_1 = -1,\ a_2 = -2$ *i* $a_3 = 1.$

- *Oblicz wartość wielomianu kubicznego* $p_3(x)$ *w punkcie* $x = 0.$
- *Rozłóż wielomian kubiczny* $p_3(x)$ *na czynniki liniowe.*
- *Znajdź pierwiastki wielomianu kubicznego* $p_3(x)$ *i podaj jego wykres.*

Zadanie 1.5 *Niech*

$$p_1(x) = 2 + x, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

$$p_2(x) = 2x^2 - 3x - 2, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Wykonaj działania

- $p_1(x) \pm p_2(x), \quad dla \;\; x \;\; \in (-\infty, \infty),$
- $p_1(x) * p_2(x), \quad dla \;\; x \in (-\infty, \infty),$
- $\dfrac{p_2(x)}{p_1(x)}. \quad dla \;\; x \neq -\dfrac{1}{2}, \;\; x \neq 2.$

Zadanie 1.6 *Wykonaj dzielenie:*

$$(x^3 - 8) : (x - 2)$$

Zadanie 1.7 *Wykonaj dzielenie:*

$$(x^4 - 1) : (x - 1)$$

Zadanie 1.8 *Wykonaj dzielenie:*

$$(x^4 - 5x^2 + 4) : (x - 2)$$

Zadanie 1.9 *Wykonaj dzielenie:*

$$(x^4 - 27) : (x - 3)$$

Zadanie 1.10 .

- *Znajdź pierwiastki równania*

$$x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0.$$

- *Rozłóż wielomian*

$$p_5(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$$

na czynniki liniowe.

Podaj przedziały w których wielomian

$$p_5(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 > 0$$

jest dodatni.