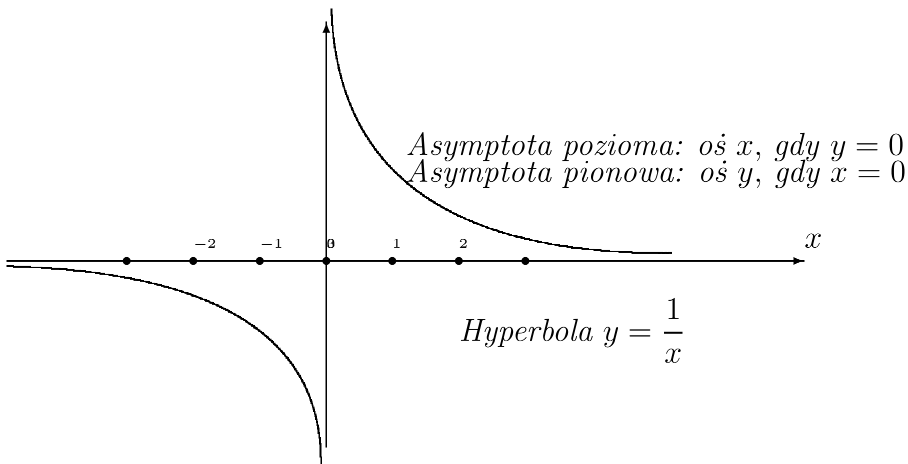
Chapter 1

Funkcje wymierne



1.1 Określenie funkcji wymiernej

Naturalnym rozszrzeniem pojęcia wielomianów są funkcje wymierne. Mianowicie, iloraz wielomianów

$$w(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \qquad q_m(x) \neq 0 \qquad (1.1)$$

stopni n i m jest jest funkcją wymierną.

Zauważmy, że jeżeli mianownik $q_m(x) = constant \neq 0$ jest liczbą różną od zera, to funkcja wymierna jest wielomianem stopnia n.

Zatem dziedziną funkcji wymiernych $w(x)$ jest zbiór tych liczb rzeczywistych

$$x \in R = (-\infty, \infty),$$

dla których mianownik $q_m(x) \neq 0$ jest różny od zera, piszemy

$$Dziedzina\ w(x): \quad D = \{x \in (-\infty, \infty): \ takich\ ze\ \ q_m(x) \neq 0\}$$

1.2 Przykłady funkcji wymiernych

Niżej rozpatrzymy kilka przykładów standardowych funkcji wymiernych.

1.2.1 Hyperbola

Najprostrzą funkcją wymierną jest hyperbola w położeniu kanonicznym na płaszczyźnie kartezjańskie w układzie współrzędnych x, y

$$h(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

Podamy następujące własności hyperboli $h(x)$:

1. dziedzinę,
2. zbiór wartości,
3. asymptoty hyperboli $y = h(x)$,
4. wykres hypeboli $y = h(x)$.

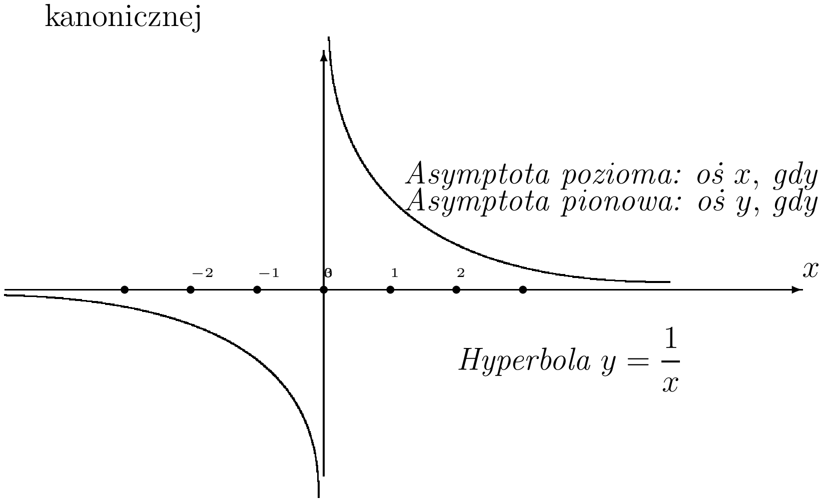
Dziedziną funkcji wymiernej $h(x)$ jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera.

$$Dziedzina\ funkcji\ h(x): \quad D = \{x \in (-\infty, \infty): \quad x \neq 0.\}$$

Zbiorem wartości funkcji wymiernej $h(x)$ jest również zbiór liczb rzczywistych różnych od zera bez punktu $x = 0$, gdyż $\frac{1}{x} \neq 0$ jest określona dla $x \neq 0$.

$$Zbior\ wartosci\ funkcji\ y = h(x): \quad \{y \in (-\infty, \infty),\ takich\ ze\ \ x \neq 0\ \ i\ \ y \neq 0.\}$$

Zatem funkcja $h(x)$ nie osiąga wrtości zero, $h(x) \neq 0$ dla wszystkich wartości argumentu $x \neq 0$ dla których jest określona. Wykres Hyperboli w postaci kanonicznej



Zauważmy, że ta hyperbola ma dwie asymptoty poziomą oś x i pionową oś y.

Istotnie, gdy argument x dąży do dodatniej lub ujemnej nieskończoności, piszemy

$$x \to \pm\infty$$

to wartości hyperboli dążą do zera

$$h(x) = \frac{1}{x} \to 0, \quad gdy \quad x \to \pm\infty$$

Przykład 1.1 *Rozpatrzmy funkcje wymierną*

$$w(x) = \frac{x-1}{x+1}, \qquad x \neq -1.$$

Dla funkcji wymiernej $w(x)$ znajdziemy

1. *dziedzinę ,*
2. *zbiór wartości,*
3. *rozłóż funkcję $y = w(x)$ na ułamki proste,*
4. *asymptoty asymptoty funkcji $y = w(x)$,*
5. *wykres funkcji $y = w(x)$.*

Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych dla których mianownik

$$x + 1 \neq 0$$

jest różny od zera.
Jasne, że mianownik jest różny od zera dla $x \neq -1$. Zatem, ziorem określoności funkcji wymiernej $w(x)$ jest zbiór zwany dziedziną

$$Dziedzina\ w(x): \quad D = \{x \in (-\infty, \infty)\ takich,\ ze\ x \neq -1.\}$$

Funkcję wymierną $w(x)$ łatwo zapiszmy wpostaci ułamków prostych. Mianowicie, dodając i oddemując w liczniku liczbę 2, sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{x-1}{x+1} \\ &= \frac{x-1+2-2}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)-2}{x+1} \\ &= 1 - \frac{2}{x+1}, \quad x \neq -1. \end{aligned}$$

Zbiorem wartości funkcji

$$w(x) = 1 - \frac{2}{x+1} \neq 1, \qquad x \neq -1.$$

jest zbiór liczb rzczywistych różnych od 1.

$$Zbior\ wartosci\ funkcji\ w(x) = \{w \in (-\infty, \infty),\ takich, ze\ w \neq 1\}$$

Ponadto funkcja wymierna $w(x)$ osiąga wszystkie wartości rzeczywiste różne od 1.

Asymptoty funkcji $w(x)$:

Asymptotą poziomą jest prosta rȯwnoległa do osi x

$$w(x) = 1 \quad dla \quad wszystkich\, rzeczywistych \quad x \neq -1.$$

Jeżeli x dąży do nieskończości dodatniej lub ujemmnej to wartości funkcji $w(x)$ dążą do 1.

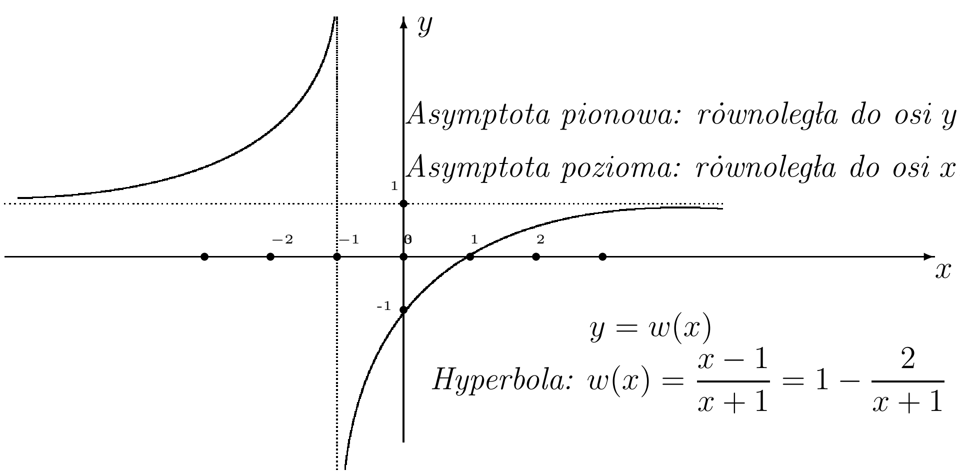
$$Jezeli\ \ x \to \pm\infty,\ \ to\ \ w(x) = 1 - \frac{2}{x+1} \to 1.$$

Asymptotą pionową jest prosta rȯwnoległa do osi y przechdząca przez punk osobliwy $x = -1$.

Jeżeli x dąży do -1 z lewej lub z prawej strony punktu $x = -1$, to wartości funkcji $w(x)$ dążą do plus nieskończoności lub minus nieskończoności.

$$x \to -1, \quad to \quad w(x) = w(x) = 1 - \frac{2}{x+1} \to \pm\,\infty.$$

Wykresem tej funkcji wymiernej jest hyperbola



Zauważmy, że ta hyperbola ma dwie asymptoty poziomą $y = 1$ dla każdej rzeczywistej wartości zmiennej $x \in (-\infty, \infty)$ i pionową przechodzącą przez punkt $x = -1$, to jest punkt w którym funkcja jest nieokreślona.

Przykład 1.2 *Rozpatrzmy funkcje wymierną*

$$w(x) = \frac{1}{16x^2 + 1}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Dla funkcji wymiernej $y = w(x)$ znajdziemy

1. *dziedzinę,*
2. *zbiór wartości ,*
3. *asymptoty funkcji $y = w(x)$,*
4. *wykres funkcji $y = w(x)$.*

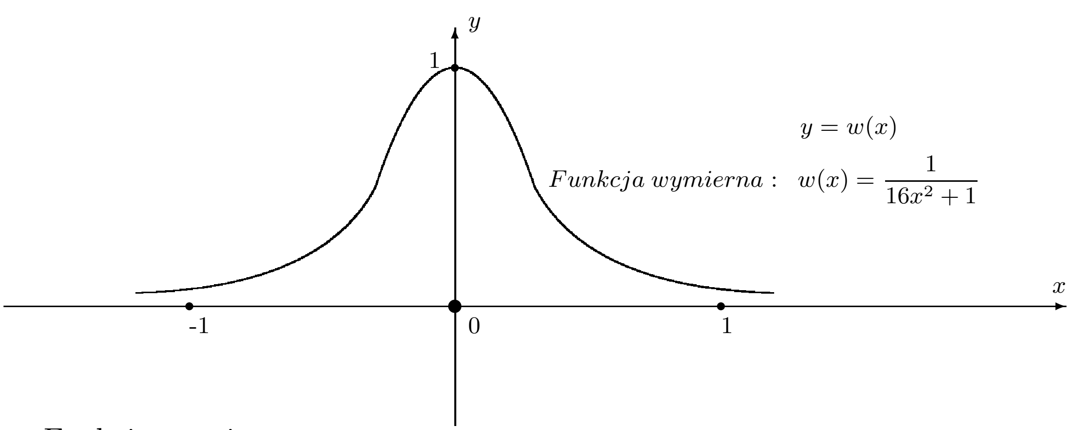
Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych.

$$Dziedzina\ funkcji\ w(x): \quad D = (-\infty < x <, \infty).$$

Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $[1, \infty)$ liczb rzeczywistych większych lub ṙwnych od 1. Istotnie, zauważamy, że wartości tej funkcji spełniajaą nierówność

$$\frac{1}{16x^2 + 1} \geq 1, \quad dla \quad -\infty < x < \infty.$$

Wykresem tej funkcji wymiernej jest krzywa



Funkcja wymierna

$$w(x) = \frac{1}{16x^2 + 1}$$

ma jedną asymptotę poziomą oś x, gdy $y = 0$.

Przykład 1.3 *Rozpatrzmy funkcje wymierną*

$$w(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Dla funkcji $w(x)$ znajdziemy

1. *dziedzinę ,*
2. *zbiór wartości,*
3. *asymptoty funkci $y = w(x)$,*
4. *wykres funkcji $y = w(x)$.*

Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, gdyż mianownik $x^2 + 1 > 1$ jest dodatni dla każdego rzeczywistego

$$x \in (-\infty, \infty).$$

Zbiorem wartości funkcji jest przedział $[-1, 1)$ liczb rzczywistych. Mianowicie, łatwo sprawdzamy nierówność:

$$-1 \leq \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < 1. \tag{1.2}$$

Istotnie, funkcję $w(x)$ można napisać w postaci różnicy

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

Dodatnia wartość wyrażenia

$$0 < \frac{2}{x^2 + 1} \leq 2$$

jest mniejsza od 2, równa 2 dla $x = 0$.

Ponadto

$$0 < \frac{2}{x^2 + 1} \to 0, \quad gdy \;\; x \to \pm\infty,$$

dąży do zera, jeżeli $x \to \pm\infty$.

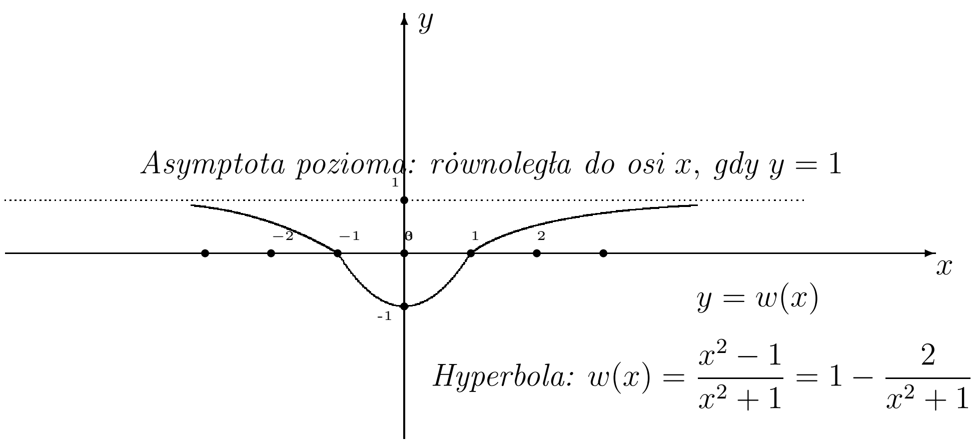
Skąd otrzymujemy nierówność (1.2) przez następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} &= 1 - \frac{2}{x^2 + 1} \\ &< 1, \quad gdy \;\; x \to \pm\infty, \\ oraz \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} &= 1 - \frac{2}{x^2 + 1}, \\ &\geq -1, \quad gdy \quad x = 0. \end{aligned}$$

Wykresem funkcji wymiernej

$$w(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

jest następująca krzywa:



1.2.2 Rozkład funkcji wymiernych na ułamki proste

Ułamkiem prostym nazywamy jedną z następujących funkcji wymiernych:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad \Delta = p^2 - 4q < 0.$$

dla danej liczby naturalnej k, współczynników $A, B,\ p, q$ i o wyróżniku $\Delta < 0$ ujemnym.

Przykład 1.4 *Rozłóż funkcje wymierną na ułamki proste*

$$w(x) = \frac{2x-1}{x^2-1}$$

Dla funkcji $w(x)$ podaj

1. *dziedzinę,*
2. *zbiór wartości ,*
3. *postać ułamka prostego funkcji $y = w(x)$,*
4. *asymptoty funkcji $y = w(x)$,*
5. *wykres funkcji $y = w(x)$.*

Rozwiązanie. Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych dla których mianownik jest różny od zera. To znaczy

$$\begin{aligned} D &= \{x \in (-\infty, \infty) : \ \ x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \neq 0\} \\ &= \{x \in (-\infty, \infty) : \ \ (x \neq 1) \cap (x \neq -1)\}. \end{aligned}$$

Rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste szukamy metodą współczynników nieoznaczonych. Mianowicie, znajdziemy A i B takie, że następująca równość zachodzi

$$w(x) = \frac{2x-1}{x^2-1} = \frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

dla każdego $x \in D$ z dziedziny funkcji $w(x)$, to znaczy dla każdego $x \neq -1$ i $x \neq 1$.
Zatem, współczynniki A i B wyznaczamy z tożsamości

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

która jest spełniona dla każdego $x \neq -1$ i $x \neq 1$.
Napiszemy tą tożsamość o wspólnym mianowniku

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x+(A-B)}{(x-1)(x+1)}$$

Porównując współczynniki przy x i wyrazy wolne w liczniku, otrzymamy równania na niewiadome A i B

$$A+B=2, \quad A-B=-1.$$

Obliczamy

$$A = B-1, \qquad (B-1)+B = 2, \qquad 2B = 3.$$

Skąd znajdujemy

$$B = \frac{3}{2}, \qquad A = B-1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Rozkład funkcji wymiernej $w(x)$ na ułamki proste

$$w(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1).}$$

1.3 Zadania

Zadanie 1.1 *Dla danej funckcji wymiernej*

$$w(x) = \frac{2}{x+2}, \qquad x \neq -2.$$

podaj

1. *dziedzinę funkcji $w(x)$,*
2. *zbiór wartości funkcji $w(x)$,*
3. *postać ułamka prostego funkcji $w(x)$,*
4. *asymptoty funkcji $w(x)$,*
5. *Naszkicuj wykres funkcji $y = w(x)$.*

Zadanie 1.2 *Dla następującej funkcji wymiernej:*

$$(i) \quad w(x) = \frac{2x-1}{x-2},$$
$$(ii) \quad w(x) = \frac{x-2}{x^2-4},$$

podaj

1. *dziedzinę dunkcji* $w(x)$,
2. *zbiór wartości funkcji* $w(x)$,
3. *asymptoty funkcji* $w(x)$,
4. *Rozłóż na ułamki proste funkcję* $w(x)$,
5. *Naszkicuj wykres funkcji* $y = w(x)$.

Zadanie 1.3 *Rozłóż funkcje wymierną na ułamki proste*

$$w(x) = \frac{x^2-9}{(x-3)(x^2+4)}$$

podaj

1. *dziedzinę funkcji* $w(x)$,
2. *zbiór wartości funkcji* $w(x)$,
3. *asymptoty funkcji* $w(x)$,
4. *Naszkicuj wykres funkcji* $y = w(x)$.