Chapter 1

Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

1.0.1 Potęga liczb naturalnych

Mnożąc liczbę naturalną przez siebie kilka razy obliczamy jej potęgę.
Na przykład, mnożąc liczbę 2 otrzymamy jej kolejne potęgi

$$\begin{array}{lcl} 2^0 & = & 1 \\ 2^1 & = & 2 \\ 2*2 & = & 2^2 = 4 \\ 2*2*2 & = & 2^3 = 8 \\ 2*2*2*2 & = & 2^4 = 16 \end{array}$$

Podobnie, mnożąc liczb 3 przez siebie otrzymamy kolejne jej potęgi

$$\begin{array}{lcl} 3^0 & = & 1 \\ 3^1 & = & 3 \\ 3*3 & = & 3^2 = 9 \\ 3*3*3 & = & 3^3 = 27 \\ 3*3*3*3 & = & 3^4 = 81 \\ 3*3*3*3*3 & = & 3^5 = 243 \end{array}$$

Każda liczba podniesiona do potęgi 0 równą jest 1
Na przykład

$$1^0 = 1, \quad 5^0 = 1, \quad 6^0 = 1, \quad 7^0 = 1, \quad 14^0 = 1, \quad 259^0 = 1$$

Ogólnie, potęgą liczby naturalnej a o wykładniku naturalnym dodatnim n nazywamy iloczyn tej liczby pomnożonej przez siebie n razy i zapisujemy

$$\begin{array}{ll} a^0 = 1, & 2^0 = 1 \\ \underbrace{a*a...*a}_{n-czynnikow} = a^n, & \underbrace{2*2...*2}_{n-czynnikow} = 2^n \end{array}$$

Wtedy a nazywamy podstawą i n wykładnikiem potęgi a^n.

Zadanie 1.1 *Oblicz potęgi*

$$\begin{array}{llllll} 4^0 & = & , \ 4^1 & = & , 4^2 & = \\ 5^2 & = & , \ 5^3 & = & , 5^4 & = \\ 10^2 & = & , \ 10^3 & = & , 10^4 & = \end{array}$$

Operacje arytmetyczne na potęgach. Na potęgach następujące operacje są wykonalne:

1. Mnożenie potęg o tych samych podstawach
$$a^p * a^q = a^{p+q}$$
dla dowolnych p, q.
Na przykład dla $a = 2,\ p = 3,\ q = 5$ mamy
$$2^3 * 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$$

2. Dzielenie potęg o tych samych podstawach
$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q},$$
dla dowolnych liczb p, q.
Na przykład dla $a = 2,\ p = 5,\ q = 3$ mamy
$$2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

3. Potęgowanie potęg o tych samych podstawach
$$(a^p)^q = a^{p*q},$$
dla dowolnych p, q.
Na przykład dla $a = 2,\ p = 2,\ q = 3$ mamy
$$(2^3)^2 = 2^{2*3} = 2^6 = 64$$

4. Potęga iloczynu liczb o tym samym wykładniku
$$(a * b)^n = a^n * b^n$$
równa jest iloczynowi potęg.
Na przykład dla $a = 2,\ b = 3,\ n = 3$ mamy
$$(2 * 3)^3 = 2^3 * 3^3 = 8 * 27 = 216$$

5. Potęga ilorazu liczb o tym samym wykładniku
$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$$
równa jest ilorazowi potęg.
Na przykład dla $a = 4,\ b = 2,\ n = 3$ mamy
$$(4 : 2)^3 = 4^3 : 2^3 = 64 : 8 = 8 \quad \text{lub} \quad (\frac{4}{2})^3 = \frac{4^3}{2^3} = \frac{64}{8} = 8$$

Przykład 1.1 *Oblicz*

$$\frac{2^3 * 3^4}{2^2 * 3^3}$$

Rozwiązanie. Wykonując działania na potęgach obliczmy

$$\frac{2^3 * 3^4}{2^2 * 3^3} \quad = \quad 2 * 3 = 6$$

Zadanie 1.2 *Oblicz*

$$5^2 * 2^3 + 3^2 * 2^3 - 4^2 * 5^2 =$$

Rozwiązanie. Wykonując działania na potęgach obliczmy

$$2^3 * 3^2 + 5^2 * 7^2$$

Zadanie 1.3 *Oblicz*

$$\frac{3^3 * 2^3 - 3^2 * 2^2}{3 * 2^3 + 2 * 3}$$

Odp:6

1.1 Funkcja wykładnicza

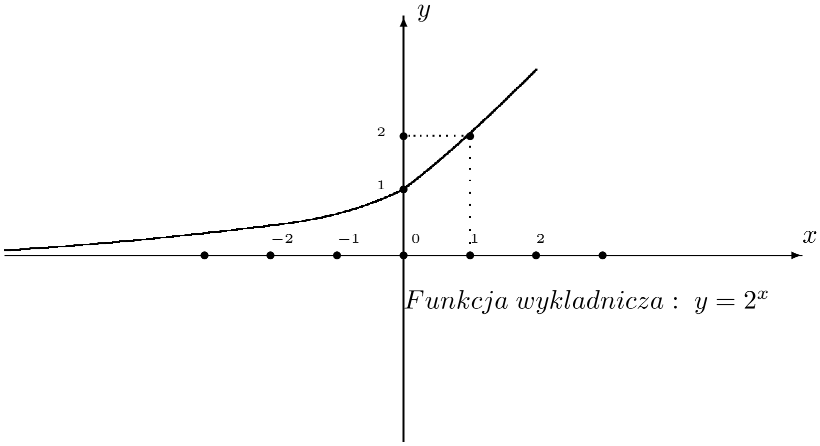
Funkcję wykładniczą określamy następującym wzorem:

$$y(x) = a^x, \qquad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Liczbę rzeczywistą $a > 0,\ a \neq 1$ dodatnią i różną od jeden nazywamy podstawą funkcji wykładniczej. Dziedziną funkcji wykładniczej jest cały zbiór liczb rzczywistych

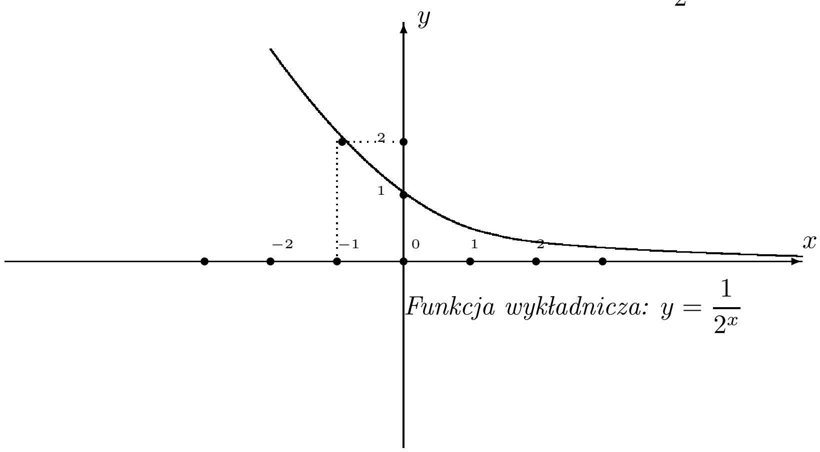
$$D = \{x \in R : \ -\infty < x < \infty\}.$$

Zbiorem wartości funkcji wykładniczej jest zbiór R_+ liczb dodatnich.
Wykres funkcji wykładniczej $y(x) = 2^x, \ -\infty < x < \infty$
Zauważmy z wykresu, że funkcja wykładnicza ma jedną asymptotę, którą jest oś x. To jest zbiór punktów $(x, 0)$ gdy współrzędna $y = 0$.
Funkcja wykładnicza $y(x) = a^x$ jest rosnąca jeżeli jej podstawa $a > 1$. Natomiast funkcja wykładnicza $y(x) = a^x$ jest malejąca, jeżeli jej podstawa $0 < a < 1$. Na rysunku funkcja $y(x) = 2^x,\ gdy\ a = 2 > 1$ jest rosnąca ponieważ jej wykres wzrasta gdy argument x wzrasta.



Funkcja wykladnicza : $y = 2^x$

Niżej jest wykres funkcji wykładniczej $y(x) = (\frac{1}{2})^x$, gdy jej podstawa $0< a = \frac{1}{2} < 1$.



Funkcja wykładnicza: $y = \frac{1}{2^x}$

Widzimy z powyższego wykresu, że, funkcja wykładnicza $y(x) = (\frac{1}{2})^x$, o podstawie $a = \frac{1}{2} < 1$ jest malejąca, gdyż jej wykres maleje podczas gdy argument rośnie.

1.1.1 Własności funkcji wykładniczej

1. Wartość funkcji wykładniczej w zerze $x = 0$ równa jest jeden.
$$y(0) = 1,$$
ponieważ $y(0) = a^0 = 1$, dla każdej podstawy $a > 0$.
2. Wartość funkcji wykładniczej dla $x = 1$ równa jest podstawie a.
$$y(1) = a,$$
ponieważ $y(a) = a^1 = a$.
3. funkcja wykładnicza od sumy argumentów równa jest iloczynowi wartości
$$y(x + t) = y(x) * y(t)$$
Istotnie sprawdzamy, że
$$y(x + t) = a^{x+t} = a^x * a^t = y(x) * y(t)$$

4. funkcja wykładnicza od różnicy argumentów równa jest ilorazowi wartości

$$y(x-t) = \frac{y(x)}{y(t)}$$

Rzeczywiście sprawdzamy, że

$$y(x-t) = a^{x-t} = a^x * a^{-t} = \frac{a^x}{a^t} = \frac{y(x)}{y(t)}$$

5. funkcja wykładnicza od iloczynu argumentów równa jest potędze

$$y(x*t) = (y(x))^t$$

Sprawdzamy, że

$$y(x*t) = a^{x*t} = (a^x)^t = (y(x))^t$$

6. funkcja wykładnicza od argumentu $\frac{m}{n}$ równa jest pierwiastkowi n-tego stopnia z wartości m-tej potęgi

$$y(\frac{m}{n}) = \sqrt[n]{y(m)}$$

Mianowicie

$$y(\frac{m}{n}) = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{y(m)}$$

Przykład 1.2 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$3^8 * 3^{-5}$$

Rozwiązanie:
W tym przykładzie stosujemy własność 2 do funkcji wykładniczej

$$y(x) = a^x$$

gdy podstawa $a = 3$ i argumenty $x = 8$ i $x = -5$. Zatem stosując własność 2, obliczamy

$$y(3) * y(-5) = 3^8 * 3^{-5} = 3^{8-5} = 3^3 = 27$$

Przykład 1.3 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$3^{\frac{5}{2}} * 12^{\frac{1}{2}}$$

Rozwiązanie:
Korzystając z własności 3, 4, 5 i 6 funkcji wykładniczej, obliczamy

$$\begin{aligned} 3^{\frac{5}{2}} * 12^{\frac{1}{2}} &= 3^{\frac{5}{2}} * (3*4)^{\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{5}{2}} * 3^{\frac{1}{2}} * 4^{\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}} * \sqrt{4} = 3^2 * 2 = 18. \end{aligned}$$

Zadanie 1.4 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$(i) \quad (3\frac{1}{3})^{-2}, \qquad (ii) \quad 2^{\frac{8}{3}} * 2^{-\frac{5}{3}} * 16^{\frac{1}{2}}$$

Zadanie 1.5 *Rozpatrz funkcję wykładniczą*

$$y(x) = 2^x, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Naszkicuj wykres funkcji wykładniczej

$$y = y(x-1) + 1, \qquad -\infty < x < \infty.$$

w układzie współrzędnych x, y
Oblicz wartość funkcji $y(x-1)+1$ dla $x = 3$.

1.1.2 Równania wykładnicze

Równania wykładnicze i nierówności wkładnicze rozwiązujemy korzystają z następujących własności:

- funkcja wykładnicza $y(x) = a^x > 0$ jest dodatnia na całej osi liczbowej dla
$$-\infty < x < \infty.$$
- zbiórem wartości funkcji wykładniczej są wszystkie liczby dodatnie, $R_+ = (0, \infty)$.
- funkcja wykładnicza $y(0) = 0$ dla każdej podstawy $a > 0,\ a \neq 1$
- funkcja wykładnicza $y(x) = a^x$ jest rosnąca na całej osi liczbowej $-\infty < x < \infty$, jeżeli podstawa $a > 1$.
- funkcja wykładnicza $y(x) = a^x$ jest malejąca na całej osi liczbowej $-\infty < x < \infty$, jeżeli podstawa $0 < a < 1$.

Niżej podajemy przykłady rozwiązań równań wykładniczych

Przykład 1.4 *Rozwiąż równanie*

$$2^{2x} - 3 * 2^x + 2 = 0$$

Rozwiązanie. Dziedziną tego równania jest cały zbiór liczb rzczywistych R. Teraz, to równanie napiszemy w postaci

$$(2^x)^2 - 3 * 2^x + 2 = 0$$

Stosując podstawienie $t = 2^x$, otrzymamy równanie kwadratowe

$$t^2 - 3t + 2 = 0, \qquad \Delta = (-3)^2 - 4 * 2 = 1.$$

Oblicczamy pierwiastki tego równania

$$t_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1, \qquad \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2.$$

Wracając do zmiennej x, obliczamy rozawiązanie:
Jeżeli $2^x = 1$, to $x = 0$.
Jeżeli $2^x = 2$, to $x = 1$.

Przykład 1.5 *Rozwiąż równanie*

$$3^{\frac{2x-1}{3x-1}} = 9$$

Rozwiązanie. Dziedziną tego równania jest zbiór liczb rzczywistych różnych od $\frac{1}{3}$. to znaczy $D = r - \{\frac{1}{3}\}$.
Teraz, to równanie napiszemy w postaci

$$3^{\frac{2x-1}{3x-1}} = 3^2$$

Skąd mamy równie

$$\frac{2x-1}{3x-1} = 2,$$

Obliczamy rozwiązanie

$$\begin{aligned} 2x-1 &= 2(3x-1), \\ 2x-1 &= 6x-2, \\ 4x=1, & \quad x=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Zadanie 1.6 *Rozwiąż równanie*

$$3^x + 27 * 3^{-x} - 12 = 0.$$

Zadanie 1.7 *Rozwiąż równanie*

$$5^{\frac{3x-1}{2x-3}} = 25.$$

1.2 Funkcja logarytmiczna

Funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej. To znaczy, jeżeli funkcja wykładnicza ustala zależność zmiennej y od zmiennej x wzorem

$$y = a^x, \qquad a > 0, \;\; a \neq 1$$

to funkcja odwrotna ustala zależność zmiennej x od zmiennej y wzorem

$$x = log_a\, y, \qquad y > 0.$$

Wtedy stałą $a > 0, \;\; a \neq 1$ nazywamy podstawą logarytmu.
Na przykład logarytm dziesiętny, gdy $a = 10$ piszemy

$$x = log_{10}\, y, \qquad dla \quad y > 0$$

Logarytm dziesiętny jest związany z systemem liczbowym pozycyjnym dziesiętnym i ma charakter podstawowy-standardowy. Bez istotnej zmiany, możemy zamienić role zmiennych x i y. Mianowicie, zmienną niezależną oznaczamy literą x, natomiast zmienną zależną oznaczamy literą y, która zależy od x.
Dlatego logarytm dziesiętny jest oznaczany symbolem

$$y = log\, x, \qquad x > 0,$$

bez pisania podstawy logarytmy 10.

1.3 Logarytm naturalny

Logarytme naturalny jest odwrotą funkcją do funkcj potęgowej

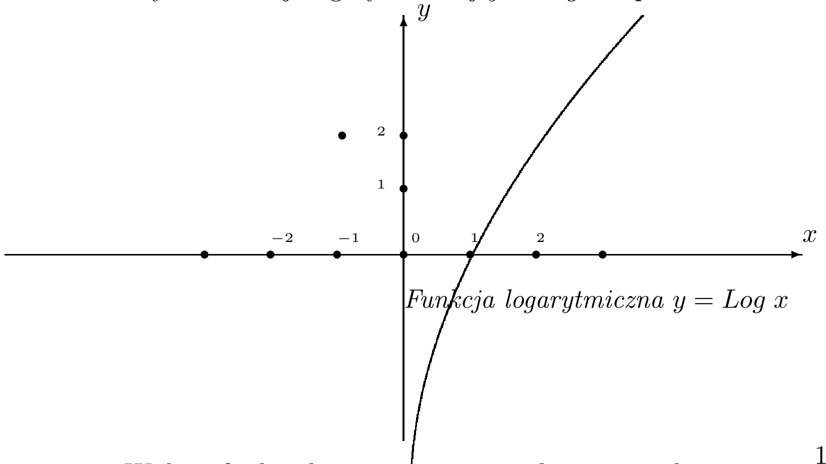
$$y = e^x, \qquad lub \qquad y = Exp[x], \qquad -\infty < x < \infty.$$

Tutaj podstawa

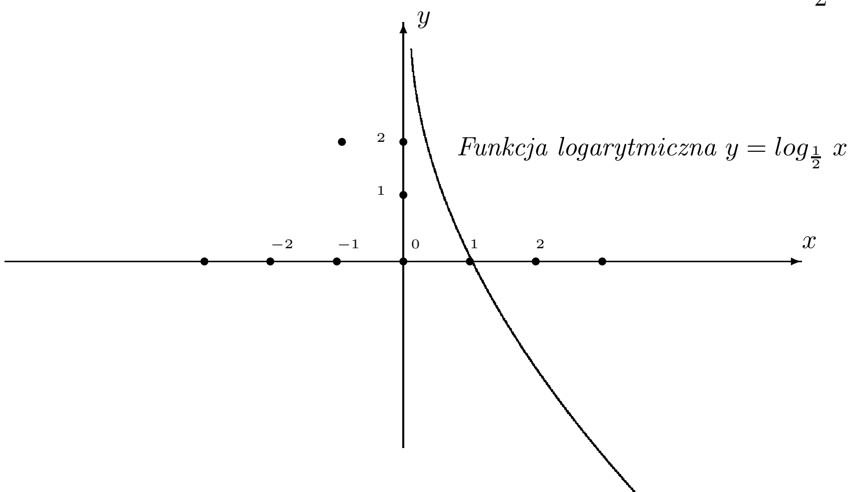
$$e = 2,718281828459045235360287471352662497757247093699995...;$$

jest liczbą rzeczywistą o nieskończonej ilości cyfr.

Wykres funkcji logarytmicznej $y = Log\ x$ o podstawie $a = 10$.



Wykres funkcji logarytmicznej $y = log_a\ x$ o podstawie $a = \dfrac{1}{2} < 1$.



1.3.1 Własności funkcji logarytmicznej

1. Wartość funkcji logarytmicznej dla $x = 1$ równa jest zero.
$$y(1) = log_a\ 1 = 0, \quad poniewaz\ \ a^0 = 1, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1.$$

2. Wartość funkcji logarytmicznej dla $x = a$ równa jest jeden.
$$y(a) = log_a = 1, \quad poniewaz\ \ a^1 = a, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1.$$

3. funkcja logarytmiczna od iloczynu argumentów równa jest sumie wartości
$$log_a\ x * t = log_a x + log_a\ t, \ \ x > 0, \ \ t > 0, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1.$$
W symbolach ogólnych tą własność piszemy
$$y(x) = \log_a\ x, \ \ y(x * t) = y(x) + y(t), \ \ x > 0, \ \ t > 0.$$
Istotnie sprawdzamy, że
$$y_1 = log_a\ x, \qquad to \qquad x = a^{y_1}, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1,$$
$$y_2 = log_a\ t, \qquad to \qquad t = a^{y_2}, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1.$$

Skąd znajdujemy

$$\begin{aligned} x * t &= a^{y_1} * a^{y_2} = a^{y_1+y_2}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1. \\ log_a \; x * t &= \log_a \; a^{y_1+y_2} = y_1 + y_2 = log_a \; x + log_a \;\; t \end{aligned}$$

4. funkcja logarytmiczna od ilorazu argumentów równa jest różnicy wartości

$$log_a \; \frac{x}{t} = log_a \; x - log_a \; t, \;\; x > 0, \;\; t > 0, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1.$$

W symbolach ogólnych tą własność piszemy

$$y(x) = \log_a \; x, \;\; y(\frac{x}{t}) = y(x) - y(t), \;\; x > 0, \;\; t > 0.$$

Istotnie sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} y_1 = log_a \; x, \qquad &to \qquad x = a^{y_1}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1, \\ y_2 = log_a \; t, \qquad &to \qquad t = a^{y_2}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1. \end{aligned}$$

Skąd znajdujemy

$$\begin{aligned} \frac{x}{t} &= \frac{a^{y_1}}{a^{y_2}} = a^{y_1-y_2}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1. \\ log_a \; \frac{x}{t} &= \log_a \; a^{y_1-y_2} = y_1 - y_2 = log_a \; x - log_a \;\; t \end{aligned}$$

5. funkcja logarytmiczna od argumentu $x^k, \;\; k = 0, 1, 2, , 3, ..., ;$ równa jest iloczynowi wykładnika potęgi k razy logarytm podstawy potęgi x

$$log_a \; x^k = k * log_a x, \quad x > 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

Własność ta bezporednio wynika z własności 2 o logarytmie z iloczynu. Mianowicie

$$log_a \; x^k = \underbrace{\log_a \;\; x * x * \cdots * x}_{k} = \underbrace{\log_a \;\; x + \log_a \;\; x + \cdots + log_a \; x}_{k} = k * \log_a \;\; x$$

6. funkcja logarytmiczna od argumentu $x^{\frac{m}{n}}$ równa jest logarytmowi

$$\log \; x^{\frac{m}{n}} = m * \log \;\; \sqrt[n]{x}$$

Mianowicie sprawdzamy korzystając z własności funkcji logarytmiczej i wykładniczej

$$\log_a \; x^{\frac{m}{n}} = \underbrace{\log_a \;\; \sqrt[n]{x} + \log_a \;\; \sqrt[n]{x} + \cdots + log_a \;\; \sqrt[n]{x}}_{m} = m * \log_a \;\; \sqrt[n]{x}.$$

7. Przy założeniach $a > 0, \;\; a \neq 1, \;\; c > 0, \;\; c \neq 1, \;\; b > 0,$ możemy zmienić podastawę a logarytmu $log_a \; b$ na podstawę c według wzoru

$$log_a \; b = \frac{log_{\;c} \; b}{log_c \; a}$$

Dla sprawdzenia tego wzoru wprowadźmy oznaczenia

$$p = \log_a \;\; b, \quad q = \log_c \;\; b, \quad r = \log_c \;\; a$$

Z definicji logarytmu mamy

$$b = a^p, \quad b = c^q, \quad a = c^r$$

Skąd wynika równość

$$\begin{array}{ll} b = (c^r)^p, & b = c^{p*r}, \\ \log_c\ b = p * r \log_c c, & \log_c c = 1, \\ \log_c b = p * r, & \log_c b = \log_a b * \log_c a, \\ \log_a b = \dfrac{log_c b}{\log_c a}, & \end{array}$$

8. W przypadku $c = b$ zamiana podstawy z liczbą logarytminowaną b prowadzi do odwrotności logarytmu

$$log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Rzeczywiście z własności 7, dla $c = b$ mamy

$$log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}, \quad bo \quad \log_b b = 1$$

Przykład 1.6 *Oblicz logarytm*

$$(i) \quad \log_2 64, \qquad (ii) \quad \log_5 125$$

Prosto z definicji logarytmu obliczamy

$$(i) \qquad \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6, \quad bo \quad 2^6 = 64,$$

$$(ii) \qquad \log_5 125 = \log_5 5^5 = 5 \quad bo \quad 5^5 = 125.$$

Przykład 1.7 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$\begin{array}{ll} (i) & \dfrac{\log_3 625}{\log_3 5}, \\ (ii) & \dfrac{\log_8 5}{\log_2 5}, \\ (iii) & \log_2(\log_2 \sqrt{5}) - \log_2(\log_2 5), \end{array}$$

Korzystając z własności logarytmów, obliczamy

$$\begin{array}{ll} (i) & \dfrac{\log_3 625}{\log_3 5} = \dfrac{\log_3 5^4}{\log_3 5} = \dfrac{4\log_3 5}{\log_3 5} = 4 \\ (ii) & \dfrac{\log_8 5}{\log_2 5} = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 8 \log_2 5} = \dfrac{1}{\log_2 2^3} = \dfrac{1}{3} \\ (iii) & \log_2(\log_2 \sqrt{5}) - \log_2(\log_2 5) = \log_2 \dfrac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 5} = \dfrac{1}{2} * \dfrac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 \sqrt{5}} = \log_2 \dfrac{1}{2} = -1 \end{array}$$

Przykład 1.8 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i) \quad \log_2(\log_4\ 16),$$

$$(ii) \quad \log_3(\log_5 125).$$

Korzystając z własności logarytmów, obliczamy

$$(i)\quad \log_2(\log_4\ 16) = \log_2 2 \log_4 4 = \log_2 2 = 1,$$

$$(ii)\quad \log_3(\log_5 125) = \log_3 \log_5 5^3 = \log_3 3 \log_5 5 = \log_3 3 = 1,$$

Zadanie 1.8 *Oblicz logarytm*

$$(i)\quad \log_3 81, \qquad (ii)\quad \log_7 16807$$

Zadanie 1.9 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i)\quad \frac{\log_7 3125}{\log_7 5},$$

$$(ii)\quad \frac{\log_9 8}{\log_3 2},$$

$$(iii)\quad \log_3(\log_3 \sqrt{7}) - \log_3(\log_3 7),$$

Zadanie 1.10 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i)\quad \log_5(\log_5\ 3125),$$

$$(ii)\quad \log_4(\log_3 6561).$$

1.4 Rȯwnania logarutmiczne

Rȯwnanie w ktȯrym niewiadoma występuje pod znakiem logarytmu nazywa się rȯwnaniem logarytmicznym. Rozwiązując rȯwnanie logarytmiczne w pierwszej kolejności należy określić dziedzinę rȯwnania. To jest ten zbiȯr argumentu x dla ktȯrego rȯwnanie logarytmiczne ma sense liczbowy. W dziedzinie rȯwnania logarytmicznego szukamy jego pierwiastaka. Określenie dziedziny rȯwnania jest istotne, ponieważ rozwiązując dane rȯwnianie przekształcamy to rȯwnania w rȯwnania o prosztrzej strukturze, ktȯre mogą mieć pierwiastki z poza dziedziny danego rȯwnania, nazywane pierwiastkami obcymi. Metody rozwiązywania rȯwnań logarytmicznych oparte są na własnościach funkcji logarytmicznej i wykładniczej. Niżej na przykładach wyjaśniamy sposoby rozwiązywania rȯwnań logarytmicznych.

Przykład 1.9 *Rozwiąż rȯwnanie*

$$\log_2 x = 4$$

Rozwiązanie:
Najpierw określamy dziedzinę rȯwnania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu x. Zatem dziedziną tego rȯwnania jest zbiȯr $x > 0$. piszemy

$$0 < x < \infty \quad lub \quad x \in (0, \infty).$$

Z definicji logarytmu jako funkcji odwrotnej do funkcji wykładniczej wynika rȯwność

$$x = 2^4 = 16.$$

Sprawdzamy, że rozwiązanie $x = 16 \in (0, \infty)$ należy do dziedziny rȯwnania oraz

$$\log_2 2^4 = 4 \quad bo \quad 2^4 = 16.$$

Przykład 1.10 *Rozwiąż równanie*

$$\log_3(5-x)+\log_3(5+x)=2$$

Rozwiązanie:
Najpierw określamy dziedzinę równania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu

$$5-x>0 \quad i \quad 5+x>0.$$

Zatem dziedziną tego równania jest zbiór

$$x<5 \;\; lub \;\; x>-5.$$

Wtedy piszemy dziedzię tego równania jako odcinek otwarty

$$-5<x<5 \;\; lub \;\; x\in(-5,5).$$

Z własności sumy logarytmów wynika równość

$$\log_3(5-x)+\log_3(5+x)=\log_3(5-x)(5+x)=2.$$

Z definicji logarytmu mamy równość

$$\begin{array}{l}(5-x)(5+x)=3^2,\\ 25-x^2=9,\\ x^2=16.\end{array}$$

Obliczamy pierwiastki równania

$$x^2-16, \quad lub \quad (x-4)(x+4)=0$$

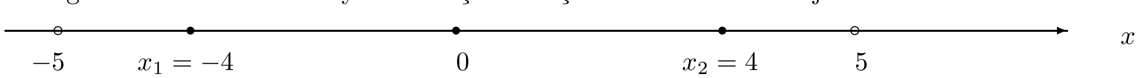
Skąd mamy dwa rozwiązania

$$\begin{array}{lll} x_1=4 & gdy & x-4=0\\ oraz & & \\ x_2=-4 & gdy & x+4=0.\end{array}$$

Sprawdzamy, że rozwiązanie $x_1=-4\in(-5,5)$ i $x_2=4\in(-5,5)$ należy do dziedziny równania

$$\begin{array}{rcl}\log_3(5+4)+\log_3(5-4) & = & \log_3 9*1=\log_3 3^2=2\\ oraz & & \\ \log_3(5-4)+\log_3(5+4) & = & \log_3 1*9=\log_3 3^2=2.\end{array}$$

Zauważamy, że oba rozwiązania $x_1=-4\in(-5,5)$ i $x_2=4\in(-5,5)$ należą do dziedziny tego równania. Zaznaczmy dziedzinę i rozwiązanie na osi liczbowej



Oś liczbowa. Dziedzina równania przedział otwarty $(-5,5)$

Przykład 1.11 *Rozwiąż równanie*

$$\log_3(x--2)+\log_3(x-4)=1$$

Rozwiązanie:
Najpierw określamy dziedzinę równania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu

$$x-2>0 \quad i \quad x-4>0.$$

Zatem dziedziną tego równania jest zbiór

$$x>2 \;\; lub \;\; x>4.$$

Wtedy piszemy dziedzię tego równania jako odcinek nieskończony lewo stronnie otwarty

$$x>4 \;\; lub \quad x \in (4,\infty).$$

Z własności sumy logarytmów wynika równość

$$\log_3(x-2)+\log_3(x-4)=\log_3(x-2)(x-4)=1.$$

Z definicji logarytmu mamy równość

$$(x-2)(x-4)=3^1, \quad lub \;\; x^2-6x+8=3 \;\; lub \;\; x^2-6x+5=0.$$

Obliczamy pierwiastki równania:
Wyróżnik równania

$$x^2-6x+5=0$$

o współczynnikach $a=1, \underline{=}-6,\ c=5$

$$\Delta=b^2-4*a*c=6^2-4*1*5=36-20=16.$$

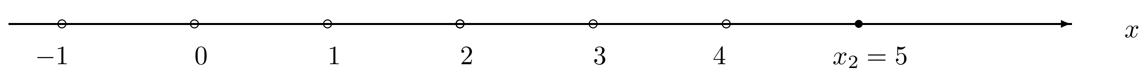
Skąd obliczamy pierwiastki równania

$$x_1=\frac{1}{2}(6-\sqrt{16})=\frac{6-4}{2}=1, \quad x_2=\frac{1}{2}(6+\sqrt{16})=\frac{6+4}{2}=5.$$

Sprawdzamy, że obcy pierwiastek $x_1=1 \notin (4,\infty)$ nie należy do dziedziny równania, natomiast pierwiastek $x_2=5 \in (4,\infty)$ należy do dziedziny równania. Zatem sprawdzamy, że drugi pierwiastek $x_2=5$ spełnia równanie

$$\log_3(5-2)+\log_3(5-4) \quad = \quad \log_3 3*1=\log_3 3=1$$

Zauważamy, że tylko pierwiastek $x_2=5 \in (4,\infty)$ należy do dziedziny tego równania. Zaznaczmy dziedzinę i rozwiązanie na osi liczbowej



Oś liczbowa. Dziedzina równania przedział otwarty $(4,\infty)$

Przykład 1.12 *Rozwiąż równanie*

$$\log_2(\log_4\, x)=1.$$

Rozwiązanie:
Dziedziną tego równania jest zbór tych x dla których

$$\log_4\, x>1, \quad x>4, \quad x \in (4,\infty)$$

Z definicji logarytmu wynika równość

$$\log_4\, x=2^1, \quad x=4^2, \quad x=16$$

Rozwiązanie $x=16 \in (4,\infty)$ należy do dziedziny. Sprawdzamy, że $x=16$ spełnia równanie

$$\log_2(\log_4\, 16)=\log_2(\log_4 4^2)=\log_2(2\log_4 4)=\log_2 2=1$$

1.4.1 Zadania

Zadanie 1.11 *Rozwiąż równanie*

$$\log_4 x = 3$$

Zadanie 1.12 *Rozwiąż równanie*

$$\log_4(1-x) - \log_4(1+x) = 0.$$

Zadanie 1.13 *Rozwiąż równanie*

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-2) = 1$$

Zadanie 1.14 *Rozwiąż równanie*

$$\log_4(\log_8\ x) = 1.$$

Prof. dr Tadeusz STYŠ Warszawa październik 2018