Chapter 1

Trójmian kwadratowy.

1.1 Wstęp

Trójmian kwadratowy, podobnie jak funkcja liniowa, jest szczególną formą wielomianu. Pod pojęciem *wielomiany* rozumiemy najprostrzą klasę funkcji o bardzo szerokim zakresie zastosowań. W tym wielomiany stopnia n jednej i wielu zmiennych, wielomiany interpolacyjne, wielomiany jako funkcje specjalne, dwumian Newtona i wielomiany inne.
Jasne, że w programie szkoły podstawowej nie wszystkie rodzaje wielomianów występują, a jeżeli występują to w bardzo elementarnej formie. Zatem w tym rozdziale wielomiany wprowadzone są w najprostrzej formie w postaci trójmianu kwadratowego wsparte licznymi przykładmi i zadaniami.
Jednomiany, dwumiany, trójmiany w tym trójmiany kwadratowe i wielomiany stanowią istotną część programu matematyki w szkołach podstawowych i średnich. Przykłady tych pojęć podajemy niżej.

Jednomianem nazywamy ciąg liczb lub ciąg liczb i liter połączonych operacją mnożenia.
Na przykład

$$\begin{array}{l} 125 \\ 2*5*7, \\ 3*a*b, \\ 4**5*x*y*z, \\ 15*x^3*y^2*z^3. \end{array}$$

Zatem każdy jedomian jest szczególnym wyrażeniem arytmetycznym lub algebraicznym.

Dwumianem nazywamy sumę dwóch jednomianów.
Na przykład

$$a+b, \quad a*x+b, \quad 2x^2+3.$$

Podobnie trójmianem nazywamy sumę trzech jednomianów.
Na przykład

$$a + b + c, \qquad ,$$
$$ax + by + c,$$

i trójmian kwadratowy

$$ax^2 + bx + c.$$

1.2 Funkcji kwadratowa.

Funkcja kwadratowa jest szczególną formą trójmianu w postaci wielomianu stopnia $n = 2$.
Zależność zmiennej y od zmiennej x określoną wzorem

$$y(x) = a\,x^2 + bx + c, \quad dla\ a \neq 0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{1.1}$$

nazywamy funkcją kwadratową o współczynnikach a, b, c.
Symbolem $y(x)$ oznaczamy wartość funkcji kwadratowej w jej argumencie x.
W przypadku gdy współczynnik $a = 0$ funkcja

$$y(x) = bx + c$$

staje się funkcją liniową.
Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, piszemy

$$Dziedzina\ funkcji\ kwadratowej = (-\infty, \infty).$$

Natomiast, zbiór wartości funkcji kwadratowej zależy od współczynników a, b, c i wyróżnika funkcji kwadratowej

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Przykład 1.1 *Rozpatrzmy funkcję kwadratową*

$$y(x) = x^2 + 1, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Współczynniki tej funkcji kwadratowej

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1$$

i jej wyróżnik

$$\Delta = 0^2 - 4 * 1 * 1 = -4$$

jest ujemny.
Łatwo sprawdzamy, że wszystkie wartości tej funkcja kwadratowej są większe od 1

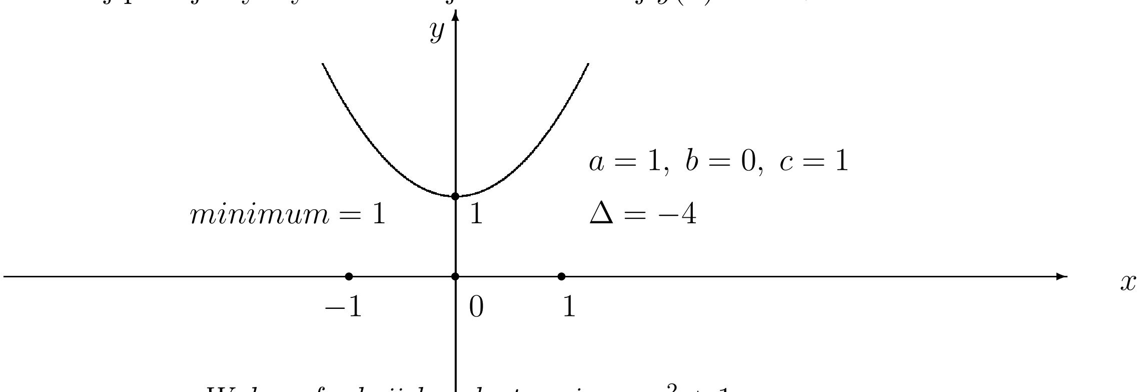
$$y(x) = x^2 + 1 \geq 1 \qquad -\infty < x < \infty$$

dla wszystkich wartości argumentu $x \in (-\infty, \infty)$.
Natomiast dla argumentu $x = 0$ wartość tej funkcji kwadratowej równa jest 1

$$y(0) = 0^2 + 1 = 1.$$

Zatem ta funkcja kwadratowa osiąga wszystkie wartości nie mniejsze od 1, a jej zbiorem wartości jest przedział nieskończony $[1, \infty)$, piszemy $y \in [1, \infty)$.

Niżej podajemy wykres funkcji kwadratowej $y(x) = x^2 + 1$.



Wykres funkcji kwadratowej $y = x^2 + 1$.

1.2.1 Równanie kwadratowe

Równanie kwadratowe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ma rozwiązanie x_0, jeżeli funkcja kwadratowa

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

w tym punkcie osiąga wartość równą zero, $y(x_0) = 0$.
Rozawiązania równania kwadratowego wyznaczamy metodą starożytnych, która polega na uzupełnieniu trójmianu kwadratowego

$$ax^2 + bx + c$$

do pełnego kwadratu.
Mianowicie, wyciągając współczynnik $a \neq 0$ przed nawias otrzymamy

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}).$$

Następnie, dodając i jednocześnie odejmując wyrażenie

$$(\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2},$$

piszemy trómian kwadratowy w postaci kanonicznej

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a(\underbrace{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}}+\underbrace{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}) \\
&= a[\underbrace{(x+\frac{b}{2a})^2}-\underbrace{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}]
\end{aligned}
$$

W ten sposób otrzymaliśmy postać kanoniczną funkcji kwadratowej.

1.3 Postać kanoniczna funkcji kwadratowej.

$$
\begin{aligned}
y(x) &= ax^2+bx+c \\
&= a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a}.
\end{aligned}
$$

gdzie wyróżnik $\Delta = b^2-4ac$.
Z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej wynika, że funkcja kwadratowa osiąga minimum dla argumentu

$$x = -\frac{b}{2a},$$

gdy

$$(x+\frac{b}{2a}) = 0.$$

Wtedy funkcja kwadratowa osiąga minimum równe

$$-\frac{\Delta}{4a}.$$

Istotnie wartość funkcji kwadratowej w punkcie $x = -\dfrac{b}{2a}$ równa jest

$$y(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$$

Również z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej łatwo znajdujemy pierwiastki równania kwadratowego.
Mianowicie piszemy

$$ax^2+bx+c = a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a} = 0.$$

Dla wyróżnika $\Delta = b^2-4ac \geq 0$ możemy różnicę kwadratów napisać w postaci iloczynu

$$(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}) = 0.$$

Skąd wynikają wzory na pierwiastki równania kwadratowego

$$x_1 + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0, \qquad \text{lub} \quad x_2 + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0$$

lub

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad \text{lub} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{1.2}$$

Zauważmy, że w przypadku, gdy wyróżnik $\Delta = 0$, funkcja kwadratowa jest pełnym kwadratem

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2.$$

Wtedy z powyższych wzorów otrzymujemy pierwiastek podwójny

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 = 0, \qquad x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

1.3.1 Wzory Vieta

Pierwiastki x_1 i x_2 równania kwadratowego

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

spełniają następujące wzory Vieta:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 * x_2 = \frac{c}{a}. \tag{1.3}$$

Istotnie, obliczamy

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Podobnie iloczyn

$$\begin{aligned} x_1 * x_2 &= (\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}) * (\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}) \\ &= (-\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})^2 \\ &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Przykład 1.2 *Znajdź równanie kwadratowe, którego suma pierwiastków równa 3 i iloczyn pierwiastków równy 2.*

Rozwiązanie. Stosując wzory Vieta, piszemy

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3, \qquad x_1 * x_2 = \frac{c}{a} = 2.$$

Skąd znajdujemy

$$b = -3a, \quad c = a.$$

Zatem, mamy rodzinę równań kwadratowych

$$ax^2 - 3ax + a = 0$$

z parametrem $a \neq 0$, których suma pierwiastków równa jest 3, i iloczyn pierwiastków równy jest 2.

1.3.2 Rozkład funkcji kwadratowej na czynniki liniowe

Jeżeli wyróżnik $\Delta < 0$ jest ujemny to równanie kwadratowe nie ma pierwiastków rzeczywistych. Wtedy funkcja kwadratowa nie rozkłada się na czyniki liniowe.
W przypadku, gdy wyróżnik $\Delta \geq 0$ funkcja kwadratowa rozkłada się na czynniki liniowe.
Istotnie, wtedy możemy przedstawić funkcje kwadratową jako różnicę kwadratów

$$ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2]$$

Stosując wzór na różnice kwadratów otrzymamy rozkład funkcji kwadratowej na czynniki liniowe

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a[(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})] \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Przykład 1.3 *Rozłóż funkcję kwadratową*

$$y(x) = 2x^2 - 5x + 2$$

na czynniki liniowe.
Podaj wykres funkcji $y(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

Rozwiązanie.
Obliczamy wyróżnik funkcji kwadratowej o współczynnikach

$$a = 2, \ b = -5, \ c = 2,$$

$$\Delta = b^2 - 4a * c = (-5)^2 - 4 * 2 * 2 = 25 - 16 = 9.$$

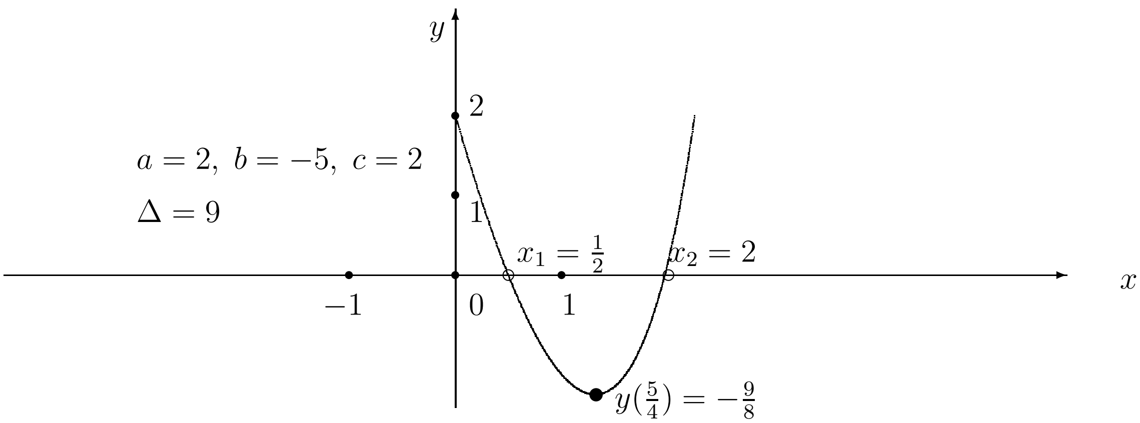
Wyróżnik tej funkcji kwadratowej jest dodatni, zatem ta funkcja ma dwa pierwiastki rzeczywiste

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} &= \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \\ x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} &= \frac{5+3}{4} = 2. \end{aligned}$$

Stosując wzór (1.4) otrzymamy rozkład funkcji kwadratowej na czynniki liniowe

$$
\begin{aligned}
y(x) &= a(x-x_1)(x-x_2) \\
&= 2(x-\frac{1}{2})(x-2). \\
&= (2x-1)(x-2) \\
&= 2x^2-5x+2
\end{aligned}
$$

Wykres funkcji $y(x) = 2x^2 - 5x + 2$.



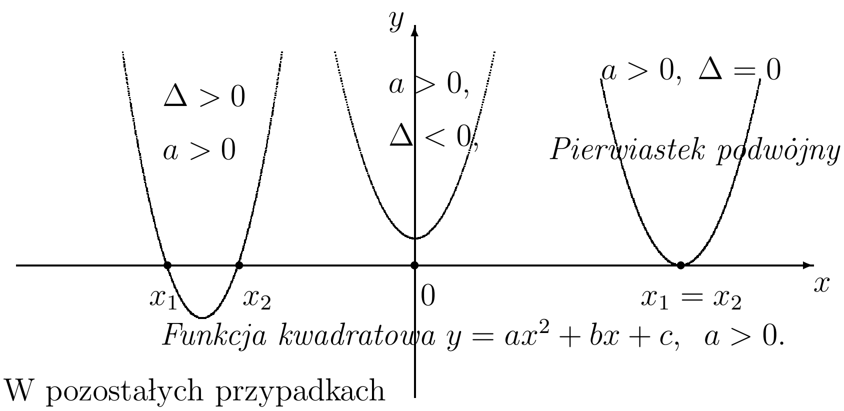
$minimum\ y(x) = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{9}{8},\ gdy\ x = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{4}$

1.4 Położenie wykresu funkcji kwadratowej na płaszczyźnie.

Położenie wykresu funkcji kwadratowej na płaszczyźnie kartezjańskiej we współrzędnych (x, y) zależy od współczynników a, b, c i od wyróżnka Δ.

Rozpatrzmy następujące przypadki:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad a > 0, \quad \Delta > 0, \\
&(2) \quad a > 0, \quad \Delta < 0, \\
&(3) \quad a > 0, \quad \Delta = 0,
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

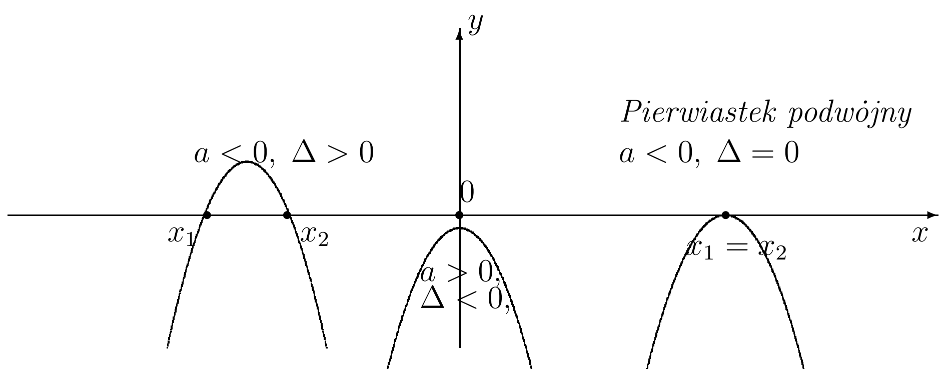


Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c, \quad a > 0.$

W pozostałych przypadkach

$$
\begin{aligned}
&(4) \quad a < 0, \quad \Delta > 0,\\
&(5) \quad a < 0, \quad \Delta < 0, \qquad (1.6)\\
&(6) \quad a < 0, \quad \Delta = 0,
\end{aligned}
$$

położenie wykresu funkcji kwadratowej podajemy niżej



Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c, \quad a < 0.$

Z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej wnioskujemy, że

- funkcja kwadratowa osiąga minimum równe $-\dfrac{\Delta}{4a}$, jeżeli współczynnik $a > 0$ jest dodatni.
- funkcja kwadratowa osiąga maksimum równe $-\dfrac{\Delta}{4a}$, jeżeli współczynnik $a < 0$ jest ujemny.

Istotnie, w punkcje minimum lub maksimum

$$(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$$

funkcja kwadratowa osiąga minimum, gdy współczynnik $a > 0$, lub lub osiąga maksimum, gdy współczynnik $a < 0$.
Wtedy w postaci kanonicznej

$$y(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

wyrażenie

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$$

dla

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Natomiast wartość funkcji

$$y(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Przykład 1.4 *Dla danej funkcji kwadratowej*

$$y = 2x^2 - 6x + 4$$

wykonaj następujące operacje:

(a) Znajdź mniejsca zerowe funkcji

(b) Rozłóż funkcje na czynniki liniowe

(c) Znajź minimum funkcji

(d) Podaj wykres funkcji

Rozwiązanie. Współczynniki równaia: $a = 2,\ b = -6,\ c = 4.$
Obliczmy wyróżnik równania

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 424 = 36 - 32 = 4 > 0.$$

(a) Stosując wzory (1.2), obliczmy pierwiaski równia

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{4}}{4} = 1,$$

$$x_2 = \frac{-b = \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{4}}{4} = 2.$$

(b) Według wzoru (1.4), funkcja kwadratowa rozkłada się na czynniki liniowe

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) = 2(x - 1)(x - 2).$$

(c) Ponieważ wyróżnik $\Delta = 4 > 0$ jest dodatni to funkcja kwadratowa ma minimum

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{2}$$

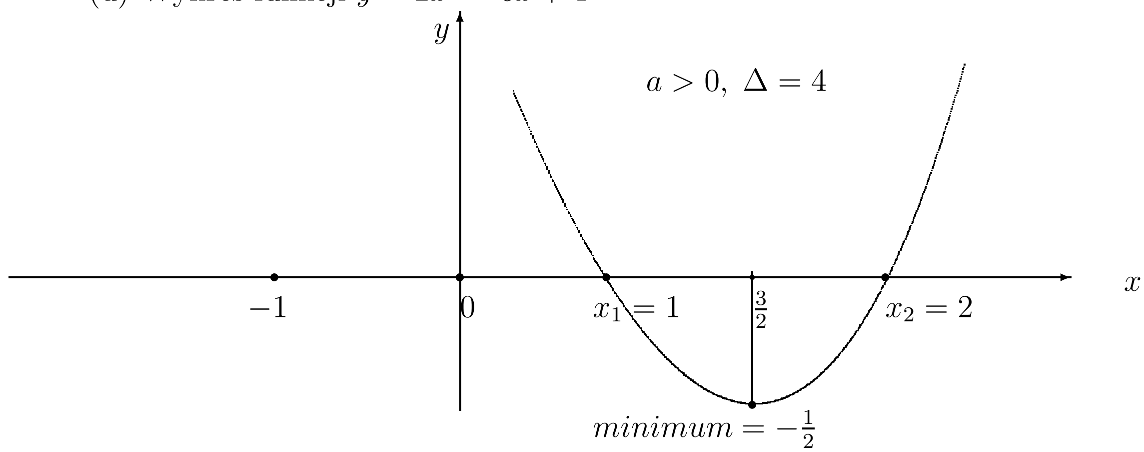
w punkcie

$$(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Istotnie wartośċ tej funkcji dla argumentu $x = \frac{3}{2}$ rȯwna się $-\frac{1}{2}$

$$y(\frac{3}{2}) = 2 * (\frac{3}{2})^2 - 6\frac{3}{2} + 4 = -\frac{1}{2}$$

(d) Wykres funkcji $y = 2x^2 - 6x + 4$



Funkcja kwadratowa $y = 2x^2 - 6x + 4.$

1.4.1 Nierówności kwadratowe

Rozwiązanie nierówności kwadratowych odczytujemy z położenia wykresów (1.5) i (1.6) funkcji kwadratowej.
Mianowicie, mamy następujące przypadki:

1. Dla $a > 0,\ \Delta > 0$ funkcja kwadratowa
$$y(x) = ax^2 + bx + c > 0 \tag{1.7}$$
jest dodatnia poza pierwiastkami dla $x < x_1$ oraz dla $x > x_2$,
natomiast jest ujemna
$$y(x) = ax^2 + bx + c < 0$$
pomiędzy pierwiastkami $x_1 < x < x_2$.

2. Dla $a < 0,\ \Delta > 0$ funkcja kwadratowa
$$y(x) = ax^2 + bx + c < 0 \tag{1.8}$$
jest ujemna poza pierwiastkami dla $x < x_1$ oraz dla $x > x_2$,
natomiast jest dodatnia
$$y(x) = ax^2 + bx + c > 0$$
pomiędzy pierwiastkami: $x_1 < x < x_2$.

3. Dla $a > 0,\ \Delta \leq 0$ funkcja kwadratowa
$$y(x) = ax^2 + bx + c \geq 0 \tag{1.9}$$
jest nieujemna dla wszystkich rzeczywistych wartości argumentu x dla $-\infty < x < \infty$.

4. Dla $a < 0,\ \Delta \leq 0$ funkcja kwadratowa
$$y(x) = ax^2 + bx + c \leq 0 \tag{1.10}$$
jest niedodatnia na całym zbiorze liczb rzeczywistych dla $-\infty < x < \infty$.

Przykład 1.5 *Rozwiąż następujące nierówności i znajdź maksimum lub minimum wskazanej funkcji:*

$$\begin{array}{lll} (1) & x^2 + x + 1 > 0, & y(x) = x^2 + x + 1. \\ (2) & -2x^2 + 2x - 1 < 0, & y(x) = -2x^2 + 2x - 1, \\ (3) & x^2 - 5x + 6 \geq 0, & y(x) = x^2 - 5x + 6, \\ (4) & -2x^2 + x + 1 > 0, & y(x) = -2x^2 + x + 1. \end{array}$$

Rozwiązanie (1). Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji
$$y = x^2 + x + 1.$$
Współczynniki:
$$a = 1,\ b = 1,\ c = 1.$$
Wyróżnik:
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 * 1 * 1 = -3.$$
Ponieważ współczynnik $a = 1 > 0$ jest dodatni i wyróżnik $\Delta = -3 < 0$ jest ujemny to nierówność
$$x^2 + x + 1 > 0,$$
jest prawdziwa (zobacz: (1.9)) dla wszystkich rzeczywistych wartości zmiennej $-\infty < x < \infty$.
Funkcja
$$y(x) = x^2 + x + 1$$
osiąga minimum równe $\frac{3}{4}$ w punkcie $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

Istotnie, obliczamy wartość tej funkcji kwadratowej w punkcie $x = -\frac{1}{2}$
$$y(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2}) + 1 = \frac{3}{4}$$

Rozwiązanie (2). Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji
$$y = -2x^2 + 2x - 1.$$
Współczynniki: $a = -2,\ b = 2,\ c = -1.$
Wyróżnik:
$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 * (-2) * (-1) = -4.$$

Ponieważ współczynnik $a = -2 < 0$ jest ujemny i wyróżnik $\Delta = -4 < 0$ jest ujemny to nierówność

$$-2x^2 + 2x - 1 < 0$$

jest prawdziwa (zobacz: (1.10)) dla wszystkich rzeczywistych wartości zmiennej $-\infty < x < \infty$.
Funkcja

$$y(x) = -2x^2 + 2x - 1$$

osiąga maksimum równe $-\frac{1}{2}$ w punkcie

$$(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

Istotnie, obliczamy wartość tej funkcji kwadratowej w punkcie $x = \frac{1}{2}$

$$y(\frac{1}{2}) = -2(\frac{1}{2})^2 + 2(\frac{1}{2}) - 1 = -\frac{1}{2}$$

Rozwiązanie (3). Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji

$$y(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Współczynniki: $a = 1,\ b = -5,\ c = 6.$
Wyróżnik:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 * 1 * 6 = 1.$$

Ponieważ wyróżnik $\Delta = 1 > 0,\ \sqrt{1} = 1$ jest dodatni to funkcja ma dwa różne pierwiastki

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{2} = 2,\ \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Zatem nierówność

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

jest prawdziwa (zobacz: (1.7)) poza pierwiastkam to znaczy dla $x < 2$ i dla $x > 3$
Funkcja

$$y(x) = x^2 - 5x + 6$$

osiąga minimu równe

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4}$$

w punkcie

$$(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}) = (\frac{5}{2}, \frac{-1}{4}).$$

Istotnie, obliczamy wartość tej funkcji kwadratowej w punkcie $x = \frac{5}{2}$

$$y(\frac{5}{2}) = (\frac{5}{2})^2 - 5(\frac{5}{2}) + 6 = -\frac{1}{4}$$

Rozwiązanie (4). Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji

$$y(x) = -2x^2 + x + 1,$$

Współczynniki: $a = -2,\ b = 1,\ c = 1.$
Wyróżnik:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 * (-2) * 1 = 9.$$

Ponieważ współczynnik $a = -2 < 0$ wyróżnik $\Delta = 9 > 0$, $\sqrt{9} = 3$ jest dodatnia (zobacz: (1.8)) to funkcja

$$y(x) = -2x^2 + 2x - 1,$$

ma dwa różne pierwiastki

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{2 * (-2)} = 1,$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{2 * (-2)} = -\frac{1}{2}.$$

Zatem nierówność jest prawdziwa pomiędzy pierwiastkami to znaczy dla $-\frac{1}{2} < x < 1$.
Funkcja

$$y(x) = -2x^2 + x + 1$$

osiąga maksimum równe

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{9}{8}$$

w punkcie

$$(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}) = (\frac{1}{4}, \frac{9}{8}).$$

Istotnie, obliczamy wartość tej funkcji kwadratowej w punkcie $x = \frac{1}{4}$

$$y(\frac{1}{4}) = -2 * (\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{8}$$

Przykład 1.6 *Dla trójmianu kwadratowego*

$$y = x^3 - 5x + 6$$

(i) wyprowadź postać kanoniczną trójmianu

(ii) znajdź jego pierwiastki i oblicz minimum trójmianu

(iii) narysuj położenie trójmianu na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Rozwiązanie:
(i) Obliczamy wyróżnik trómianu kwadratowego o współczynnikach
$a = 1, \ b = -5, \ c = 6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 * 1 * 6 = 25 - 24 = 1.$$

Proste przekształcenie tego trójmianu prowdzi do postaci kanonicznej

$$\begin{aligned} y(x) &= x^2 - 5x + 6 \\ &= x^2 - 5x + (\frac{-5}{2})^2 + 6 - (\frac{-5}{2})^2 \\ &= (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Skąd postać kanoniczna tego trójmianu

$$y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

(ii) Obliczmy pierwiastki trójmianu z postaci kanonicznej lub bezpośrednio ze wzorów (1.2).
Mianowicie postać kanoniczna jest różnią kwadratów, którą rozkładamy na czynniki

$$y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4} = y = (x - \frac{5}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 = (x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}).$$

Skąd obliczamy pierwiastki równania kwadratowego

$$\begin{aligned} &(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}) = 0 \\ &(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}) = 0, \qquad lub \quad (x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}) = 0 \\ &x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3, \qquad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2. \end{aligned}$$

Łatwo obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego podstawiając do wzorów

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-5}{2} - \frac{\sqrt{1}}{2} = 2, \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-5}{2} + \frac{\sqrt{1}}{2} = 3.$$

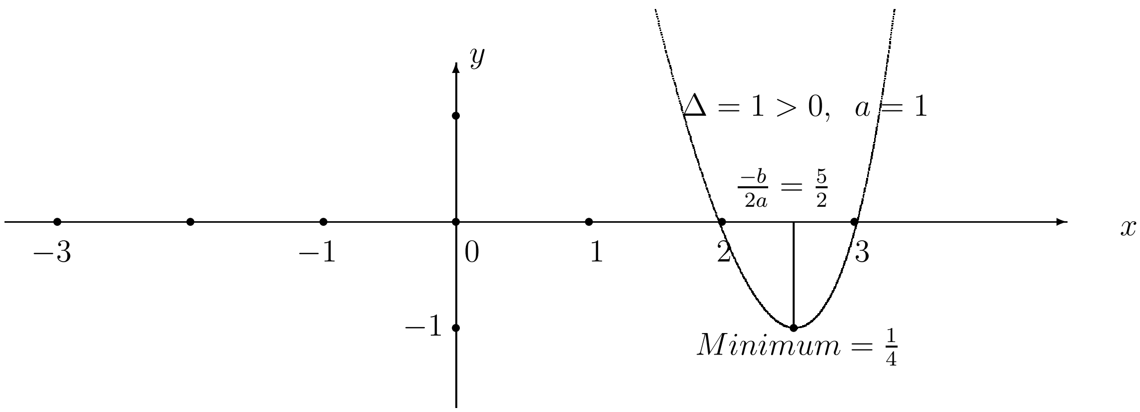
Minimum trójmianu kwadratowego obliczamy bezpośrednio z postaci kanonicznej

$$y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

Jasne, że wartość tego trójmianu jest najmniejsza, jeżeli kwadrat

$$(x - \frac{5}{2})^2 = 0.$$

Dla $x = \frac{5}{2}$, wartość $y = -\frac{1}{4}$. Zatem minimum trójmianu kwadratowego równe jest $\frac{1}{4}$.



1.5 Ćwiczenia

Przykład 1.7 *Równanie kwadratowe*

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

ma dwa pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2. Korzystając ze wzirów Viete oblicz wartości wyrażeń algebraicznych

$$(x_1 + x_2)^2, \qquad x_1^2 + x_2^2, \qquad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

Rozwiązanie: Współczynniki równania $a = 1,\ b = -4,\ c = 3$
Ze wzorów Viete obliczmy sumę i iloczyn pierwiastkoów

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{1} = 4, \quad x_1 * x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3.$$

Skąd obliczamy wartości wyrażeń algebraicznych

$$(x_1 + x_2)^2 = 4^2 = 16, \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 16 - 2 * 3 = 10.$$

oraz

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 * x_2} = \frac{4}{3}.$$

Przykład 1.8 *Dla których wartości parametru m równanie*

$$x^2 - 2x + m = 0$$

ma dwa różne pierwiastki

Rozwiązanie: Równie
$$x^2 - 2x + m = 0$$
ma dwa różne pierwiastki, jeżeli wyróżnik tego równa jest dodatni
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4m > 0,$$
$$4 - 4m > 0, \quad 4m < 4, \quad m < 1.$$
Odpowieć: Równanie $x^2 - 2x + m$ ma dwa różne pierwiastki dla parametru $-\infty < m < 1$

Przykład 1.9 *Wyznacz współczynniki a, b, c równania kwadratowego*
$$ax^2 + bx + c = 0$$
które posiada dwa rzeczywiste pierwiastki x_1 i x_2 takie, że ich suma i iloczyn są dane
$$x_1 + x_2 = 7, \qquad x_1 * x_2 = 10.$$
Rozwiązanie: Korzystając ze wzorów Viete
$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 7, \qquad x_1 * x_2 = \frac{c}{a} = 10,$$
znajdujemy następujące związki
$$b = -7a, ; \qquad c = 10a.$$
Skąd równianie
$$ax^2 - 7ax + 10a = 0, \quad lub \quad a(x^2 - 7x + 10) = 0$$
spełnia warunki zadania dla każdego $a \neq 0$.

Przykład 1.10 *Wyznacz współczynniki a, b, c równania kwadratowego*
$$ax^2 + bx + c = 0$$
które posiada dwa rzeczywiste pierwiastki $x_1 = 3$ i $x_2 = 8$

Rozwiązanie: Korzystając ze wzorów Viete
$$x_1 + x_2 = 3 + 8 = 11, \qquad \frac{-b}{a} = 11, \qquad x_1 * x_2 = 3 * 8 = 24, \qquad \frac{c}{a} = 24,$$
znajdujemy następujące związki
$$b = -11a, ; \qquad c = 24a.$$
Skąd otrzymujemy równianie
$$ax^2 - 11ax + 24a = 0, \quad lub \quad a(x^2 - 11x + 24) = 0$$
które posiada pierwiastki $x_1 = 3$, $x_2 = 8$ dla każdego $a \neq 0$.

1.5.1 Zadania

Zadanie 1.1 *Znajdź pierwiastki równania*

(i)) $x^2 - 3x + 6 = 0,$

(ii) $-2x^2 + 9x - 10 = 0,$

(iii) $4x^2 - 12x + 9 = 0.$

Zadanie 1.2 *Dla których wartości parametru* m *funkcja kwadratowa*

$$y(x) = x^2 + 2mx + m + 1$$

jest dodatnia dla wszystkich rzeczywistych wartości $x \in -\infty < x < \infty$.

Zadanie 1.3 *Dla których wartości parametru* m *równanie*

$$-x^2 + 4x + m - 4 = 0$$

ma dwa różne pierwiastki

Zadanie 1.4 *Dla których wartości zmiennej* x *trójmian kwadratowy*

$$y(x) = x^2 + 4x + 3$$

jest dodatni dla wszystkich rzczywistych wartości zmiennej x.
Oblicz najmniejszą wartość tego trójmianu kwadratowego.

Zadanie 1.5 *Dla których wartości zmiennej* x *trójmian kwadratowy*

$$y(x) = -2x^2 + 5x + 3$$

jest ujemny dla wszystkich wartości rzeczywistych zmiennej x.
Oblicz największą wartość tego trójmianu kwadratowego.

Zadanie 1.6 *Dla których wartości parametru* m *trójmian kwadratowy*

$$y(x) = x^2 + 4x + m^2$$

jest dodatni dla wszystkich wartości zmiennej x.
Oblicz najmniejszą wartość tego trójmianu kwadratowego.

Zadanie 1.7 *Dla których wartości parametru* m *trójmian kwadratowy*

$$y(x) = -x^2 + 3x - m,$$

jest ujemny dla wszystkich wartości zmiennej x.
Oblicz największą wartość tego trójmianu kwadratowego.

Zadanie 1.8 *Rozwiąż następujące nierówności i znajdź maksimum lub minimum wskazanej funkcji:*

$$
\begin{array}{lll}
(1) & x^2 - x + 1 > 0, & y(x) = x^2 - x + 1. \\
(2) & -3x^2 + 6x - 3 \leq 0, & y(x) = -3x^2 + 6x - 3. \\
(3) & x^2 - x - 2 \geq 0, & y(x) = x^2 - x - 2. \\
(4) & -4x^2 + 3x + 1 > 0, & y(x) = -4x^2 + 3x + 1.
\end{array}
$$

Zadanie 1.9 *Znajdź równanie kwadratowe, którego suma pierwiastków równa 6 i iloczyn pierwiastków równy 5.*

Zadanie 1.10 *Dany jest trójmian kwadratowy*

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

o współczynnikach $a = 2, b = 8, c = 8$. *Oblicz najmniejszą i największą wartość tego trójmianu w przedziale* $[-2, 3]$.

Zadanie 1.11 *1.Znajdź trójmian kwadratowy którego suma pierwiastów jest równa 10, suma odwrotnośici jego pierwiastkẃ jest rẃna* $\dfrac{5}{8}$ *i dla* $x = 0$ *przyjmuje on wartość* 32.

Zadanie 1.12 *Dana jest funkcja kwadratowa*

$$y(x) = ax^2 + bx + c.$$

Wykaż, że jeżeli

$$y(0) = 1,\ y(1) = 0,\ y(2) = 1,$$

to

$$y(n) = (n-1)^2$$

dla każdego naturalnego $n = 1, 2, 3, 4, \cdots;$

Zadanie 1.13 *Sprawdź, czy liczby* $x_1 = 2$ *i* $x_2 = 3$ *są pierwiastkami równania*

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Znajdź trójmian kwadratowy, którego pierwiastkami są suma $x_1 + x_2 = 5$ *i iloczyn* $x_1 * x_2 = 2$

Zadanie 1.14 *Liczby* x_1 *i* x_2 *są pierwiastkami równania*

$$x^2 + px + q = 0.$$

Znajdź trójmian kwadratowy, którego pierwiastkami są suma $x_1 + x_2$ *i iloczyn* $x_1 * x_2$