Chapter 1

Wstęp do Rachunku Prawdopodobieństwa

1.1 Wstęp

Podstawy rachunku prawdopodobieństwa stworzyli Pascal (1623-1662 A.D.) i Fermat (1601-1665 A.D.) w połowie XVII-go wieku. W wiekach XVIII i XIX ważnym odkryciem było prawo wielkich liczb J. Bernoulliego i prace A. Moivre, P. Laplasa i S. Poissona. Czebyszewa, Browna i Kołmogorowa.
Rachunek prawdopodobieństwa zajmuje się badaniem praw rządzących zjawiskami losowymi (przypadkowymi), to jest takimi zjawiskami, których przebiegu czy wyniku nie można jednoznacznie przewidzieć. Dzieje się tak dlatego, że na przebieg zjawiska losowego wpływ ma na ogół wiele przyczyn, z których jedynie część udaje się kontrolować.
Wyniki zjawisk (doświadczeń) losowych nazywamy zdarzeniami losowymi.
Jeżeli doświadczenie losowe powtórzymy n razy i przy tym w tych n doświadczeniach dokładnie k razy zaobserwujemy wynik A (zdarzenie losowe A), to liczbę

$$\frac{k}{n}, \qquad ktora\ spelnia\ nierownosc: \qquad 0 \leq \frac{k}{n} \leq 1 \quad dla \quad 0 \leq k \leq n,$$

nazywamy częstością zdarzenia losowego A w serii n doświadczeń.

W zjawiskach masowych częstości występowania każedego zdarzenia losowego mają tą własność, że wraz ze wrostem liczby n, te częstości "stabilizują się" coraz bardziej "blisko" pewnej liczby charakterystycznej dla tego zdarzenia.
Ogólnie w doświadczeniach powtarzanych w tych samych warunkach dla każdego doświadczenia, liczba "charakterystyczna" jest bliska pewnej liczbie $0 \leq p \leq 1$, która jest granicą ciągu częstości

$$\frac{k_n}{n} \to p, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots;$$

To znaczy częstości dążą do p, gdy liczba doświadczeń $n \to \infty$ dąży do nieskoċzoności.

Przykład 1.1 *Rzucając symetryczną monetą $n = 100, \ 200$ lub więcej razy zaobserwujemy około połowę reszek i około połowę orłów.*

Niżej podane wyniki w 100 i 200 rzutach monetą wskazują na stabilizację częstości "blisko" liczby $p = \frac{1}{2} = 0.5$ dla ilości doświadczeń $n \geq 200$.

Tablica (1.1)

Liczba rzutow n	*Ilosc reszek* k	*ilosc orlow* $n-k$	*czestosc reszek* $\frac{k}{n}$	*czestosc orla* $\frac{n-k}{n}$
100	61	39	0.39	0.61
200	102	98	0.51	0.49

1.2 Zdarzenia elementarne

W kaḋym doświadczeniu losowym możemy wyróżnić najprostrze wyniki zwane zdarzeniami elementarnymi.
Zbiór zdarzeń elementarnych oznaczamy literą Ω.

Przykład 1.2 *Rzucając monetą, możliwe są dwa wyniki reszka lub orzeł, innych możliwości nie ma. Zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$$

złożony z dwóch zdarzeń elementarnych $\omega_1, \ \omega_2$, gdzie zdarzenie elementarne ω_1 zachodzi, gdy w rzucie monetą pojawi się reszka, zdarzenie elementarne ω_2 zachodzi, gdy pojawi się orzeł.

Prawdopodobieństwo jako granica częstości wstępnie opiszemy na wzorcowych przykładach.

Rut monetą. Zaczynamy od najprostrzego doświadczenie rzutu monetą. Rzucając monetą, możliwe są dwa wyniki reszka lub orzeł, innych możliwości nie ma.

Pytamy, jakie szanse mamy, żeby pojawiła się reszka ?

Z dwóch możliwych wyników reszka, orzeł, jeden jest dla reszki i jeden jest dla orła. Zatem szansa pojawienia się reszki równa jest $\dfrac{1}{2}$ oraz szansa pojawienia się orła również równa jest $\dfrac{1}{2}$.

Jeżeli wynik pojawienia się reszki oznaczymy literą A, a wynik pojawienia się orła literą B to prawdopodobieństwo pojawienia się reszki oznaczamy symbolem $P(A)$, a prawdopodobieństwo pojawienia się orła symbolem $P(B)$.

Wtedy piszemy

$$P(A) = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

Prawdopodobieństwo $\frac{1}{2}$ oznacza, że w dużej ilości rzutów oczekujemy połowę reszek i połowę orłów.

Przykład 1.3 *Policz ile razy pojawi się reszka i ile razy pojawi się orzeł w 10-ciu rutach monetą.*

Załóżmy, że reszka pojawiła się za pierwszym, piątym, ósmym i dziesiątym rzutem, razem 4 razy, natomiast orzeł pojawił się 6 razy.
Zdarzenie pojawienia się reszki oznaczamy literą A, zdarzenie pojawienia się orła oznaczamy literą B.
Obliczamy częstość pojawienia się reszki

$$Czestosc(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Podobnie obliczamy częstość pojawienia się orła

$$Czestosc(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Przykład 1.4 *W klasie było 20 uczniów. Każdy uczeń rzucił symetryczną monetą 50 razy. Niżej w tablicy 1.2 podane są częstości wypadnięcia reszki w 100 i 1000 rzutów.*

$$Tablica \tag{1.2}$$

Liczba rzutow n	*Ilosc reszek* k	*ilosc orlow* $n-k$	*czestosc reszek* $\frac{k}{n}$	*czestosc orla* $\frac{n-k}{n}$
100	54	46	0.54	
1000	517	483	0.517	

Widzimy, że częstość pojawienia się reszki na 100 rzutów monetą równa jest 0.54, natomiast na 1000 rzutów równa jest 0.517. Częstość 0.517 na 1000 rzutów bliższa jest liczbie charakterystyczne równej 0.5 niż częstość 0.54 na 100 rzutów monetą w tym przykładzie.
Ta zaobserwowana prawidłowość polegająca na tym, że częstość zajścia zdarzenia losowego jest "stabilna" około jakiejś stałej wartości, gdy ilość powtórzeń doświadczenia losowego jest duża, leży u podstaw pojęcia prawdopodobieństwa.

Niżej wyjaśnimy jeszcze takie pojęcia jak

- zdarzenia rozłączne - wykluczające

- zdarzenie pewne
- zdarzenie niemożliwe
- prawdopodobieństwo zdarzeń

Dalej oznaczmy literą A zdarzenie pojawienia się reszki, literą B zdarzenia pojawienia się orła w rzucie monetą.
Zdarzenia A i B są rozłączne-wykluczające się, ponieważ zajście zdarzenia A wyklucza zajście zdarzenia B.

Sumę-alternatywę zdarzeń $A \ lub \ B$, piszemy

$$A \cup B$$

Obliczamy częstość alternatywy zdarzeń rozłącznych

$$Czestosc(A \cup B) = Czestosc(A) + Czestosc(B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

Częstość alternatywy zdarzeń rozłącznych A i B równa jest sumie częstości zdarzenia A i zdarzenia B.

Podobnie obliczamy prawdopodobieństwo alternatywy zdarzeń rozłącznych.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Prawdopodobieństwo alternatywy zdarzeń rozłącznych A i B równa jest sumie prawdopodobieństwa zdarzenia A i zdarzenia B.

W rzucie monetą pojawienie się reszki lub orła jest zadarzeniem pewnym, którego prawdopodobieństwo równe jest 1.

Natomiast zdarzenie, że w rzucie monetą nie pojawi się ani reszka ani orzeł jest zdarzeniem niemożliwym.

Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego równe jest 0

Przykład 1.5 *Rozpatrzmy doświadczenie rzutu kostką o kształcie sześcianu foremnego, na którego ścianach są oczka od 1 do 6.*

W doświadczeniu rzutu kostką odczytujemy ilość oczek na kostce. Możliwy jest jeden z sześciu odczytów

$$1\ oczko,\ 2\ oczka,\ 3\ oczka,\ 4\ oczka,\ 5\ oczek\ i\ 6\ oczek$$

następujących zdarzeń elementarnych

zdarzenia ω_1, gdy pojawi się 1 oczko
zdarzenie ω_2, gdy pojawi się 2 oczka
zdarzenie ω_3, gdy pojawi się 3 oczka

zdarzenie ω_4, gdy pojawi się 4 oczka
zdarzenie ω_5, gdy pojawi się 5 oczek
zdarzenie ω_6, gdy pojawi się 6 oczek

Zatem w jednym rzucie kostką jest 6 możliwych wyników

$$1\ oczko,\ 2\ oczka,\ 3\ oczka,\ 4\ oczka,\ 5\ oczek,\ 6\ oczek$$

Szansa pojawienie się każdej ilości oczek jest taka sama w stosunku do 6 wyników możliwych. To jest prawdopodobieństwo równe $\frac{1}{6}$, piszemy

$$P(\omega_1) = \frac{1}{6}, \qquad P(\omega_2) = \frac{1}{6}$$
$$P(\omega_3) = \frac{1}{6}, \qquad P(\omega_4) = \frac{1}{6}$$
$$P(\omega_5) = \frac{1}{6}, \qquad P(\omega_6) = \frac{1}{6}$$

Załóżmy, że wykonano $N = 100$ rzutów kostką i zapisano liczbę oczek

Zdarzenie ω_1 pojawiło się 17 razy, to znaczy 1 oczko pojawiło się 17 razy
Zdarzenie ω_2 pojawiło się 16 razy, to znaczy 2 oczka pojawiło się 16 razy
Zdarzenie ω_3 pojawiło się 17 razy, to znaczy 3 oczka pojawiło się 17 razy
Zdarzenie ω_4 pojawiło się 18 razy, to znaczy 4 oczka pojawiło się 18 razy
Zdarzenie ω_5 pojawiło się 15 razy, to zmaczy 5 oczek pojawiło się 15 razy
Zdarzenie ω_6 pojawiło się 17 razy, to znaczy 6 oczek pojawiło się 17 razy

W tym doświadczeniu zaobserwowano następujące częstości

$$Czestosc(\omega_1) = \frac{17}{100} = 0.17$$
$$Czestosc(\omega_2) = \frac{16}{100} = 0.16$$
$$Czestosc(\omega_3) = \frac{17}{100} = 0.17$$
$$Czestosc(\omega_4) = \frac{18}{100} = 0.18$$
$$Czestosc(\omega_5) = \frac{15}{100} = 0.15$$
$$Czestosc(\omega_6) = \frac{17}{100} = 0.16$$

Zbiór

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych.

Dlatego alternatywa zdarzeń elementarnych

$$A = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6$$

jest zdarzeniem pewnym.
Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego A równe jest 1, piszemy

$$P(A) = P(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6) = 1$$

Również częstość zdarzenia pewnego równa jest 1, ponieważ równa jest sumie częstości zdarzeń elementarnych

$$Czestosc(\omega) = \frac{17}{100} + \frac{16}{100} + \frac{17}{100} + \frac{18}{100} + \frac{15}{100} + \frac{17}{100} = 1$$

1.3 Zdarzenia Jednakowo prawdopodobne

W powyższych doświadczeniach rozpatrywaliśmy zdarzenia losowe jednakowo prawdopodobne.
W rzucie monetą pojawienie się orła lub reszki zachodzi z równym prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. W rzucie kostką prawdopodobieństwo pojawienia się

$$1\ oczka,\ 2\ oczek,\ 3\ oczek,\ 4\ oczek,\ 5\ oczek,\ 6\ oczek$$

jest to samo i równe $\frac{1}{6}$.

Niżej podajemy definicje Laplace'a prawdopodobieństwa dla N zdarzeń losowych.

Definition 1.1 *Jeżeli dla danego doświadczenia losowego, zbiór zdarzeń elementarnych składa się z N zdarzeń równoprawdopodobnych, to prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A równe jest*

$$P(A) = \frac{k}{N}$$

gdzie k jest ilością zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A.

Rozpatrzymy następujący przykład:

Przykład 1.6 *Z talii 52 karty wyciągnięto losowo jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo $P(A)$ następujących zdarzeń:*

(i) Zdarzenie A polega na wyciągnięciu asa.

(ii) Zdarzenie A polega na wyciągnięciu pika.

(iii) Zdarzenie A polega na wyciągnięciu kiera lub trefla.

Rozwiązanie (i). Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z $N = 52$ zdarzeń równoprawdopodobnych.
Prawdopodobieństwo wyciągnięcia jednej karty z 52 kart jest to samo i równe $\frac{1}{52}$.
Ponieważ w talii są 4 asy, dlatego liczba zdarzeń sprzyjających wyciągnięcia asa jest $k = 4$.
Zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcie asa jest równe

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

.
Rozwiązanie (ii). Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z $N = 52$ zdarzeń równoprawdopodobnych, Prawdopodobieństwo wyciągnięcia jednej karty z 52 kart jest to samo i równe $\frac{1}{52}$.
Ponieważ w talii jest 13 pików, dlatego liczba zdarzeń sprzyjających wyciągnięcia pika jest $k = 13$. Zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcia pika jest równe

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

.
Rozwiązanie (iii). Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z $N = 52$ zdarzeń równoprawdopodobnych. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia jednej karty z 52 kart jest to samo i równe $\frac{1}{52}$.
Ponieważ w talii jest 13 kierów i 13 trefli, dlatego liczba zdarzeń sprzyjających wyciągnięcia kiera lub trefla jest

$$k = 13 + 13 = 26$$

Zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcie kiera lub trefla jest równe

$$P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

.
Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład zdarzeń losowych.

Przykład 1.7 *Na liście w szkole jest 250 dziewcząt i 200 chłopców. Wybrano z listy losowo jedno nazwisko. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A, że to jest*
(a) dziewczynka, (b) chłopiec.

Rozwiązanie (a). Razem na liście jest $250 + 200 = 450$ uczniów. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_{450}\}$$

składa się z $N = 450$, zdarzeń. Kaḋe z tych zdarzeń elementarnych ω_i, $i = 1, 2, 3, \cdots, 450$ polega na wylosowaniu z listy 450 uczniów jedno nazwisko.

Liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu, że otrzymamy dziewczynkę równa się $k = 250$. Prawdopodobieństwo, że to jest dziewczynka

$$P(A) = \frac{250}{450} = \frac{5}{9}$$

Rozwiązanie (b). Podobnie obliczamy prawdopodobieństwo wybrania z listy nazwiska chłopca. Razem na liście jest $250 + 200 = 450$ uczniów. Zbiór wszstkich zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_{450}\}$$

składa się z $N = 450$, zdarzeń elementarnych. Kade z tych zdarzeń elementarnych $\omega_1,\ i = 1, 2, 3, \cdots, 450$ polega na wylosowaniu z listy 450 uczniów jedno nazwisko.
Liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu, że otrzymamy chłopieca równa się $k = 200$. Prawdopodobieństwo, że to jest chłopiec

$$P(A) = \frac{200}{450} = \frac{4}{9}$$

1.4 Zdarzenia Losowe złożone

Alternatywa, koniukcja i różnica zdarzeń losowych jest zdarzeniem losowym złożonym.
Zatem, wykonując te operacje na zbiorze zdarzeń elementarnych, otrzymujemy zdarzenia losowe złożone.

Przykład 1.8 *W doświadczeniu z rzutu kostką zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych jest zbiór*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

W tym zbiorze Ω wyróżniamy następujące podzbiory jako zdarzenia złożone:

- *Zdarzenie pewne określone przez zbiór*

  $$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

  wszystkich zdarzeń elementarnych.
  Pradopodobieństwo zdarzenia pewnego

  $$P(\Omega) = 1$$

  ponieważ każde ze zdarzeń elementarnych

  $$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6$$

sprzyja zdarzeniu pewnemu Ω.
Przawdopodobieństwo zdarzenia elementarnego ω_i, $i = 1,2,3,4,5,6$ *jest równe* $\frac{1}{6}$, *piszemy*

$$P(\omega_i) = \frac{1}{6}. \qquad i =, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- *oczekiwany wynik zdarzenia* A *to parzysta ilość oczek. To zdarzenie losowe zachodzi, jeżeli zdarzy się* ω_2 *lub* ω_4 *lub* ω_6. *To znaczy, gdy prawdziwa jest alternatywa*

  $$\omega_2 \cup \omega_4 \cup \omega_6$$

  Zatem zdarzenie A *jest określone przez podzbiór*

  $$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$$

  zbioru Ω *wszystkich zdarzeń elementarnych. Zdarzenia elementarne* $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ *sprzyjają zajściu zdarzenia* A.
  Prawdopodobieństwo tego zdarzenia

  $$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- *oczekiwany wynik zdarzenia* A *to ilość oczek mniejsza niż 3.*
  To zdarzenie losowe zachodzi, jeżeli wynik rzutu kostką jest jedno oczko lub dwa oczka, gdy prawdziwa jest alternatywa

  $$\omega_1 \cup \omega_2$$

  Zatem zdarzenie A *jest określone przez podzbiór*

  $$A = \{\omega_1, \omega_2\} \subset \Omega$$

  Zdarzenia elementarne ω_1, ω_2 *sprzyjają zdarzeniu* A
  Prawdopodobieństwo zajścia tego zdarzenia

  $$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- *oczekiwany wynik zdarzenia* A *to ilość oczek większa od 3. To zdarzenie losowe zachodzi, jeżeli zdarzy się* ω_4 *lub* ω_5 *lub* ω_6, *gdy pradziwa jest alternatywa* $\omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6$. *Zatem zdarzenie* A *jest określone przez podzbiór*

  $$A = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \subset \Omega$$

  zbioru Ω *wszystkich zdarzeń elementarnych. Każde ze zdarzeń* $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ *sprzyja zdarzeniu* A
  Prawdopodobieństwo tego zdarzenia

  $$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

1.5 Operacje na Zdarzeniach Losowych

Podstawową relacją w zbiorach jest ralacja przynależności elementu do zbioru. Relację, że element x należy do zbioru Ω, piszemy $x \in \Omega$. Również relację, że x nie jest elementem zbioru Ω, piszemy $x \notin \Omega$.
Zdarzenia losowe rozumiemy jako podzbiory zbioru zdarzeń elementarnych. Operacje na zbiorach takie jak suma, iloczyn i różnica zbiorów odnoszą się również do działań na zdarzeniach losowych, ponieważ są to działania na podzbiorach zbioru zdarzeń elentarnych.

1.6 Zdarzenie Przeciwne

Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A oznaczamy symbolem $A^{'}$. Zdarzenie przeciwne $A^{'}$ zachodzi, jeżeli nie zaszło zdarzenie losowe A

Przykład 1.9 *Rozaważmy doświadczenie rzutu kostką sześcienną. Niech zdarzenie A polega na uzyskaniu parzystej liczby oczek w rzucie kostką.*

Wtedy zdarzenie

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$$

jest podzbiòrem zbioru zdarzeǹ elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \qquad A \subset \Omega$$

Zdarzenie przeciwne A' zachodzi, jeżeli pojawi się nieparzysta liczba oczek

$$A^{'} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$$

Podzbiòr $A^{'}$ jest ròwnież podzbiorem zbioru zdarzeǹ elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \qquad A^{'} \subset \Omega$$

Zauważmy, że zdarzenie przeciwne ròwne jest rȯżnicy zbioru wszystkich zdarzeǹ elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

i zdarzenia A
Zatem mamy

$$A^{'} = \Omega - A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} - \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$$

1.7 Alternatywa Zdarzeń

Alterternetywą zdarzeń losowych A i B jest zdarzenie

$$C = A \cup B$$

które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A lub zachodzi zdarzenie B.

Przykład 1.10 *Rozpatrzmy doświadczenie rzutu kostką sześcienną. Niech zdarzeniem A będzie liczba oczek na kostce większa od 5, natomiast zdarzeniem B niech będzie liczba oczek mniejsza od 2.*

Rozwiązanie.
W rzucie kostką zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

Jasne, że zdarzenie

$$A = \omega_6$$

natomiast zdarzenie

$$B = \omega_1$$

Alternatywą tych zdarzeń jest podzbiór

$$C = A \cup B = \{\omega_1, \omega_6\}$$

zbioru zdarzeń elementarnych Ω. Piszemy

$$C = A \cup B \subset \Omega$$

1.8 Koniukcja Zdarzeń

Koniukcją zdarzeń losowych A i B jest zdarzenie

$$D = A \cap B,$$

które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A i jednocześnie zachodzi zdarzenie B.

Przykład 1.11 *Rozpatrzmy doświadczenie rzutu kostką sześcienną. Niech zdarzeniem A będzie liczba oczek większa od 3, zdarzeniem B niech będzie liczba oczek mniejsza od 5.*

Rozawiązanie.
W rzucie kostką zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

Jasne, że zdarzenie A określa podzbiór

$$A = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \subset \Omega,$$

oraz zdarzeniem B określa podzbiór

$$B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \subset \Omega$$

Koniukcja $A \cap B$ jest zdarzeniem

$$D = A \cap B = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \cap \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{\omega_4\}$$

które składa się z tych samych zdarzeń elementarnych równocześnie należących do A i do B.

1.9 Zdarzenia Rozłączne

Zdarzenia A i B wyłączają się, jeżeli ich koniukcja jest zbiorem pustym. To znaczy $A \cap B = \emptyset$.

Przykład 1.12 *Rozpatrzmy doświadczenie rzutu kostką sześcienną. Niech w doświadczeniu rzutu kostką zdarzenie*

$$A = \{\omega_1, \omega_6\}$$

oznacza pojawienie się jednego oczka lub sześciu oczek, natomiast zdarzenie

$$B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$$

oznacza pojawienie się trzech oczek lub czterech oczek lub pięciu oczek.

Rozwiązanie.
W rzucie kostką zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

Zdarzenia A i B są rozłączne, gdyż ich koniukcja

$$A \cap B = \{\omega_1, \omega_6\} \cap \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\} = \emptyset$$

jest zbiorem pustym zdarzeń.

1.10 Różnica Zdarzeń Losowych

Różnica zdarzeń losowych A i B to jest zdarzenie

$$E = A - B$$

które zachodzi wtedy, gdy zdarzenie A zachodzi, natomiast zdarzenie B nie zachodzi.
Wtedy różnica zdarzeń jest koniukcją zdarzenia A i zdarzenia przeciwnego do zdarzenia B

$$E = A \cap B'$$

Przykład 1.13 *Rozpatrzmy doświadczenie rzutu kostką sześcienną. Niech zdarzeniem A będzie parzysta ilość oczek, natomiast zdarzeniem B niech będzie ilość oczek podzielna przez 3.*

Rozwiązanie.
W rzucie kostką zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

Jasne, że zdarzenie A zachodzi, jeżeli otrzymamy element podzbioru

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$$

zbioru

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

zdarzenie B nie zachodzi, jeżeli nie otrzymamy elementu podzbioru

$$B = \{\omega_3, \omega_6\} \subset \Omega$$

zbioru $\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$
natomiast otrzymamy element podzbioru

$$B^{'} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\} \subset \Omega$$

zbioru $\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$
Zatem różnica zdarzeń losowych A i B to jest zdarzenie

$$E = A - B$$

które zachodzi, jeżeli otrzymamy element podzbioru A i jednocześnie nie otrzymamy elementu podzbioru B.
Wtedy

$$E = A \cap B^{'} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \cap \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\} = \{\omega_2, \omega_4\}$$

lub

$$E = A - B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} - \{\omega_3, \omega_6\} = \{\omega_2, \omega_4\} \subset \Omega$$

1.11 Przykłady Zdarzeń Losowych

Niżej podajemy przykłady zdarzeń losowych i zdarzeń sprzyjających określonemu zdarzeniu losowemu.

Przykład 1.14 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z tego zbioru liczby podzielnej przez 5.

Rozwiązanie (1.14). Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

składa się $N = 20$ zdarzeń.
Zbiór zdarzeń sprzyjających

$$A = \{5, 10, 15, 20\}$$

składa się z $k = 4$ liczb podzielnych przez 5.
Zatem prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 5 ze zbioru 20 liczb jest równe

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Przykład 1.15 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$$

wybieramy losowo dwie liczby ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb z których co najmniej jedna jest podzielne przez 3.

Rozwiązanie (1.15). W tym przykładzie zdarzeniemi elementarnymi będą wszystkie pary liczb podane w tablicy

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,5), & (1,7), & (1,9), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,5), & (2,7), & (2,9), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,5), & (3,7), & (3,9), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,5), & (5,7), & (5,9), \\ (7,1), & (7,2), & (7,3), & (7,5), & (7,7), & (7,9), \\ (9,1), & (9,2), & (9,3), & (9,5), & (9,7), & (9,9), \end{array} \right\}_{N=6\times 6}$$

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych składa się z $N = 36$ zdarzeń.
Zbiór zdarzeń sprzyjających składa się z par liczb wybranych z powyższej tablicy w których co najmniej jedna liczba jest podzielna przez 3.
Zatem zbiór zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A, który jest określony w tablicy

$$A = \left\{ \begin{array}{cccccc} & & (1,3), & & & (1,9) \\ & & (2,3), & & & (2,9), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,5), & (3,7), & (3,9), \\ & & (5,3), & & & (5,9), \\ & & (7,3), & & & (7,9), \\ (9,1), & (9,2), & (9,3), & (9,5), & (9,7), & (9,9), \end{array} \right\}_{k=20}$$

składa się z $k = 20$ par liczb w których co najmniej jedna z liczb jest podzielna przez 3.

Zatem prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ z których co najmniej jedna jest podzielna przez 3 jest równe

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Przykład 1.16 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby z tego zbioru podzielnej przez 6.

Rozwiązanie (1.16). Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

składa się z $N = 20$ zdarzeń.
Zbiór zdarzeń losowych sprzyjających zdarzeniu

$$A = \{6, 12, 18\},$$

że wylosowana liczba jest podzielna przez 6, składa się z $k = 3$ liczb.
Zatem prawdopodobieństwo wylosowania liczby ze zbioru Ω podzielnej przez 6 jest równe

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{3}{20}$$

Przykład 1.17 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby z tego zbioru mniejszej 6.

Rozwiązanie (1.17). Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

składa się z $N = 20$ zdarzeń.
Zbiór zdarzeń losowych sprzyjających zdarzeniu

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

że wylosowana liczba jest mniejsza od 6, składa się z $k = 5$ liczb.
Zatem prawdopodobieństwo wylosowania liczby mniejszej od 6 ze zbioru Ω jest równe

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Przykład 1.18 .
(*i*) *Podaj zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych w doświadczeniu rzutu dwoma kostkami.*
(*ii*) *W rzucie dwiema kostkami zdarzenie A zachodzi, jeżeli suma oczek na obu kostkach jest parzysta. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A.*
(*iii*) *Podaj zdarzenie przeciwne $A^{'}$ do zdarzenia A.*

Rozawiązanie (i) Możliwe są następujaące wyniki:

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 1, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6. lub
- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 2, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6. lub
- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 3, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6. lub
- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 4, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6. lub
- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 5, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6. lub
- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 6, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.

Zatem zdarzeniami elementarnymi tego doświadczenia są pary liczb podane niżej w tablicy :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6), \end{array} \right\}_{N=6\times 6}$$

Rozwiązanie (ii). W rzucie dwiema kostkami suma oczek jest parzysta, jeżeli na pierwszej i jednocześnie na drugiej kostce pojawi się parzysta ilość oczek, albo jednocześnie na pierwszej i na drugiej kostce pojawi się nieparzysta ilość oczek.
Wszystkich zdarzeń elementarnych jest $6 \times 6 = 36$. Natomiast ilośč zdarzeň

sprzyjających zdarzeniu A, który jest podanych niżej w tablicy

$$A = \left\{ \begin{array}{ccc} (1,1), & (1,3), & (1,5), \\ (2,2), & (2,4), & (2,6), \\ (3,1), & (3,3), & (3,5), \\ (4,2), & (4,4), & (4,6), \\ (5,1), & (5,4), & (5,5), \\ (6,2), & (6,4), & (6,6), \end{array} \right\}$$

jest równa $\frac{36}{2} = 18$
Zatem prawdopodobieństwo zdarzenie A, że w sumie na obu kostkach wypadnie parzysta ilość oczek jest równe

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Rozwiązanie (iii). Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A w rzucie dwiema kostkami będzie nieparzysta suma oczek. To znaczy, że na pierwszej kostce pojawi się nieparzysta liczba oczek, natomiast na drugiej kostce pojawi się parzysta ilość oczek, albo odwrotnie, na pierwszej kostce pojawi się parzysta ilość oczek, natomiast na drugiej kostce pojawi się nieparzysta liczba oczek.
Zbiór zdarzeń sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu A' podany niżej w tablicy

$$A' = \Omega - A = \left\{ \begin{array}{ccc} (1,2), & (1,4), & (1,6), \\ (2,1), & (2,3), & (2,5), \\ (3,2), & (3,4), & (3,6), \\ (4,1), & (4,3), & (4,5), \\ (5,2), & (5,4), & (5,6), \\ (6,1), & (6,3), & (6,5), \end{array} \right\}$$

składa się z $6 \times 6 = 36$ zdarzeń.
Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego A', że w sumie na obu kostkach wypadnie nieparzysta ilość oczek jest równe

$$P(A') = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Przykład 1.19 *Antek wytypował 6 liczb z 49 na kuponie gry liczbowej "totolotka" oczekując głównej wygranej, to znaczy oczekując trafionych w 6 liczb*

wylosowanych w "totolotku".
(i) *Oblicz prawdopodobieństwo, że wytypowane 6 liczb są trafione w 6 liczb wylosowanych w "totolotku"*
(ii) *Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród 6 liczb wybranych przez Antka pięć liczb jest trafonych w 6 liczb wylosowanych w "totolotku"*

Rozwiązanie (i). Najpierw ustalmy zbiór zdarzeń elementarnych. Intuicyjnie jasne, że zdarzeniem elementarnym będzie sześć liczb

$$\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$$

wybranych losowo ze zbioru liczb $\{1, 2, ..., 49\}$.

Pytanie ile będzie różnych szóstek ze zbioru 49-ciu liczb?.
Rozumiemy, że dwie szóstki są różne, jeżeli rożnią się co najmiej jedną liczbą. Prostą odpowiedź na to pytanie znajdujemy w kombinatoryce. Mianowicie, ilość różnych szóstek równa jest ilości kombinacji z 49-ciu liczb po sześć liczb. Tą liczbę kombinacji określamy wzorem

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \ * (49-6)!} = \frac{49!}{6! \ * 43!} = 13983816$$

Zatem, zbiór wszystkich kombinacji $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$ sześciu liczb wybranych z 49-ciu liczb

$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49, \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych.
Odpowiedź: Niech $A \in \Omega$ oznacza zdarzenie wylosowania sześciu liczb ze zbioru

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 48, 49\}$$

Tylko jedna szòstka liczb wygrywa. którа sprzyja zdarzeniu A. Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest ròwne

$$P(A) = \frac{1}{13983816}$$

Rozwiązanie (ii). Niech sześć liczb $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ będzie wynikiem losowania totolotka. Wiemy z rozwiązania (i), że zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49, \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

zawiera $\binom{49}{6} = 13983816$ elementów.
Oznaczmy przez A zdarzenie, że gracz wytypował liczby $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ wśród których pięć liczby są trafione. To znaczy, że w tym zbiorze liczb

$$\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$$

pięć liczb są ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$.
Teraz policzmy ile jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A. Najpierw, zuważmy,

że jedną liczbą nie trafioną może być k_1 lub k_2 lub k_3 lub k_4 lub k_5 lub k_6. Zatem, jedną z pięciu liczb trafionych możemy zastąpić liczbą nie trafioną otrzymując inną piątkę liczb trafionych. Taką zamianę można dokonać na $\binom{6}{1} = 6$ sześć sposobów.
W ten sposób znajdujemy sześć różnych szóstek ́jako zdzarzenia sprzyjających zdarzeniu A.
Ponadto, pozostało 43 liczby nie zo stały wylosowane w totolotka. Każdą z tych 43 nie wytypowanych w grze można wymienić na jedną z sześciu nie trafionych przez gracza. Zatem, zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A wylosowania poprawnych pięciu liczba jest $6*43 = 258$. Oznacza to, że prawdopodobieństwo wylosowania poprawnych 5 liczby z wylosowanych sześciu liczb równe jest

$$P(A) = \frac{258}{13983816} = 0.00001845$$

1.12 Zadania

Zadanie 1.1 *.*
(i) *Wykonaj 50 rzutów monetą i policz ilość reszek w* 10, 20, 30, 40 *i* 50 *rzutach.*
Oblicz czętości pojawienia się reszki i orła dla 10, 20, 30, 40 *i* 50 *rzutów monetą.*
(ii) *Wskaż liczbę charakterystyczną dla tego doświadczenia blisko której stabilizują się obliczone częstości.*

Zadanie 1.2 *Wykonaj 10 rzutów dwoma jednakowymi monetami.*
(i) *Oblicz częstość pojawienia się dwóch orlów jednocześnie na obu kostkach w 10-ciu rzutach .*
(ii) *Oblicz częstość pojawienia się orła i reszki jednocześnie na obo kostkach w 10-ciu rzutach.*

Zadanie 1.3 *Rozpatrz model probabilistyczny rzutu dwoma monetami.*
(i) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się dwóch orlów jednocześnie na obu monetach.*
(ii) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się orła i reszki jednocześnie na obu kostkach.*

Zadanie 1.4 *Wykonaj 10 rzutów dwoma kostkami.*
(i) *Oblicz częstość pojawienia się dwóch takich samych oczek jednocześnie na obu kotkach w 10-ciu rzutach.*
(ii) *Oblicz częstość pojawienia się oczek na obu kostakach, których suma równa jest 4 w 10-ciu rzutach.*
(iii) *Oblicz częstość pojawienia się oczek na obu kostkach, których suma równa jest 7.*

Zadanie 1.5 *Rozpatrz model probabilistyczny rzutu dwoma kostkami sześciennymi.*
(i) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się dwóch takich samych ilości oczek na obu kostkach.*
(ii) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się ilości oczek, których suma na obu kostkach jest równa 4.*
(iii) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się ilości oczek, których suma na obu kostkach jest równa 12.*

Zadanie 1.6 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 4.

Zadanie 1.7 *Ze zbioru 20-stu kolejnych liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo dwie liczby, bez powtórzeń. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3 lub 4.

Zadanie 1.8 *Ze zbioru 20-stu kolejnych liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 7.

Zadanie 1.9 *Ze zbioru 20-stu kolejnych liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby mniejszej niż 7.

Zadanie 1.10 *W modelu probabilistycznym rzutu kostką sześcienną zbiór zdarzeń elementarnych*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

(i) *Podaj alternatywę $A \cup B$ i koniukcję $A \cap B$ zdarzeń losowych*

$$A = \{\omega_1, \omega_6\}, \qquad B = \{\omega_2, \omega_6\}$$

(ii) *Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A i zdarzenia B.*
(iii) *Znajdź zdarzenia przeciwne A' i B' do zdarzeń losowych A i B.*
(iv) *Oblicz prawdopodobieństwa zcdarzeń losowych przeciwnych A' i B'.*

Przykład 1.20 *Na 10 kuponach "totolotka" Janek skreślił po 6 liczb wybranych z 49 na każdym kuponie oczekując głównej wygranej, to znaczy oczekując trafionych 6 liczb wylosowanych w "totolotku" co najmniej na jednym kuponie.*
(i) *Oblicz prawdopodobieństwo, że co najmniej na jednym kuponie Janek trafnie wybrał* 6 *liczb dokładnie z 6-ciu liczb wylosowanych w "totolotku"*
(ii) *Oblicz prawdopodobieństwo, że co najmniej na jednym kuponie Janek trafnie wybrał dokładnie pięć liczb z 6-ciu liczb wylosowanych w "totolotku"*

Prof. dr Tadeusz STYŠ Warszawa, czerwiec 27, 2018