## 0.1 Liczby rzeczywiste

Dotychczas poznaliśmy natępujące zbiory liczb:
Nieskończony zbiór liczb naturalnych:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., n, .....\}$$

Nieskończony zbiór liczb całkowitych

$$C = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

Liczb całkowitych jest tyle samo co liczb naturalnych. To znaczy liczb naturalnych wystarczy, żeby policzyć wszystkie liczby całkowite. To jest ta sama nieskończoność.
Nieskończony zbiór liczb wymiernych, czyli zbiór wszystkich możliwych ułamków

$$W = \{\frac{p}{q} : \quad p, q \in C, \quad q \neq 0\}$$

jest również równo liczny ze zbiorem liczb naturalnych. Zatem liczb wymiernych jest tyle samo co liczb naturalnych. To jest ta sama nieskończoność.

**Ziór liczb rzeczywistych** zawiera wszytkie liczby wymierne i jest istotnie większy od wszystkich wymienionych wyżej zbiorów liczbowych. To znaczy, że liczb naturalnych nie wystarczy, żeby policzyć liczby rzeczywiste. Istnieją liczby rzeczywiste, które nie są liczbami naturalnymi, ani liczbami całkowitymi, ani liczbami wymiernymi.
Na przykład taką liczbą rzeczywistą jest pierwiastek kwadratowy z liczby 2.

**Pierwiastek kwadratowy**.
*Pierwiastkiem kwadratowym z liczby wymiernej nieujemej $a \geq 0$, nazywamy liczbę $b \geq 0$ też nie ujemną, taką, że*

$$b^2 = a$$

*Wtedy piszemy*

$$\sqrt{a} = b$$

Na przykład

$$\text{dla } a = 4, \quad b = 2, \quad \sqrt{4} = 2, \quad \text{bo} \quad 2^2 = 4, \quad \textit{nigdy} \ \ b = -2 \ \ \textit{chociaz} \ \ b^2 = (-2)^2 = 4$$

$$\text{dla } a = 9, \quad b = 3, \quad \sqrt{9} = 3, \quad \text{bo} \quad 3^2 = 9,$$

$$\text{dla } a = \frac{4}{9}, \quad b = \frac{2}{3} \quad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}, \quad \text{bo} \quad (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}.$$

Rzeczywiście, jeżeli liczba $\sqrt{2}$ byłaby wymierna, to istniałyby liczby całkowite $p \in C$ i $q \in C$ takie, że

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad q \neq 0.$$

gdzie ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny, to znaczy liczby $p$ i $q$ nie mają wspònego dzielnika. Zatem, mamy

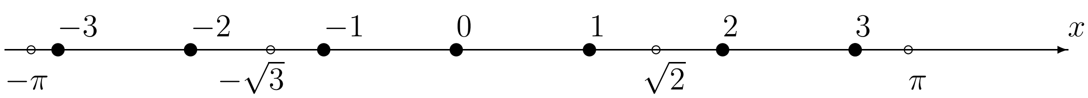
$$(\sqrt{2})^2 = (\frac{p}{q})^2, \quad 2 = \frac{p^2}{q^2}, \quad 2 * q^2 = p^2$$

Z ròwności $2 * q^2 = p^2$ wynika, że liczba $p^2$ jest podzielna przez 2. To znaczy, że liczba $p$ też jest podzielna przez 2. Wtedy $p = 2*k$ dla pewnego całkowitego $k \in C$.
Zatem, mamy

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2, \quad q^2 = 2\ k^2$$

Teraz $q^2 = 2\ k^2$ jest liczbą parzystą i podzielną przez 2. To znaczy, że ułamek $\frac{p}{q}$ jest skracalny. To przeczy istnieniu liczb całkowitych $p$, $q$. Dlatego liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna, natomiast jest liczbą rzeczywistą.

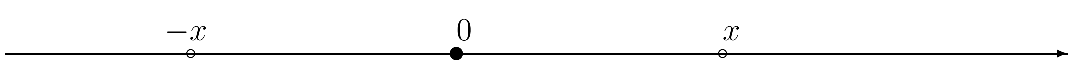
Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamu literą $R$. Zbiór liczb rzeczywistych jest rozszerzeniem zbioru liczb wymiernych o liczby, niewymierne takie jak $\pi$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...;
Zatem zachodzi następująca relacja: $W \subset R$.
Zbiór liczb rzeczywistych jest zamknięty ze względu na cztery operacje arytmetyczne.
Liczby rzeczywiste podobnie jak liczby naturalne, całkowite i wymierne interpretujemy jako punkty na osi liczbowej. Dokładniej, liczba $x$ oznacza odległość punktu $x$ na od punktu oznaczonego przez zero.




Oś liczbowa. Liczby rzeczywiste

### 0.1.1 Wartość bezwzglęna

Wartość bezwzględna liczby $x$ to jest na osi liczbowej odległość punktu $x$ od początku oznaczonego przez 0. Zatem, wartość bezwzględna liczby $x$ jest zawsze nieujemna.




Oś liczbowa.
Niżej podajemy definicję wartości bezwzględnej funkcj $y = |x|$.

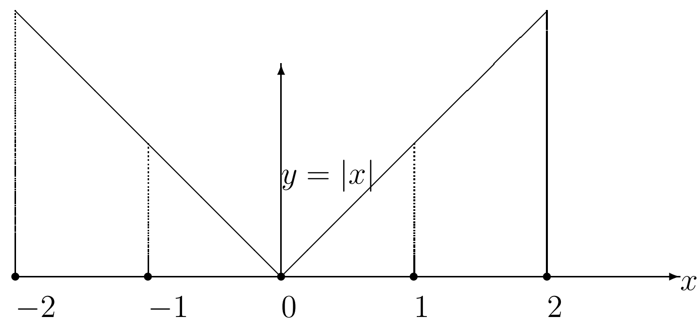
**Definition 0.1** *Wartość bezwzględną liczby $x$ określamy jak następuje:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{gdy} \quad x < 0 \end{cases}$$

Na przykład $|5| = 5$ bo $5 > 0$, również $|-5| = -(-5) = 5$, gdy $x = -5 < 0$. Również wartość bezwzględną liczby $x$ jest dana wzorem

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Zauważmy, że $\sqrt{4} = 2$, nigdy $-2$.




Wykres funkcji: wartość bezwzlędna $y = |x|$

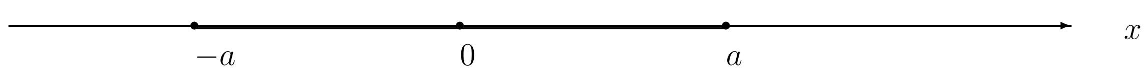
**Odcinek na osi liczbowej.** Z definicji wartości bezwzględnej liczby $x$, wynika nierówność

$$|x| \le a, \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad -a \le x \le a, \quad a \ge 0.$$

Rzeczywiście, zauważamy, że

$$|x| \le a, \quad \text{gdy} \quad x \le a \quad \text{i} \quad -x \le a, \quad \text{to znaczy} \quad -a \le x \le a.$$

Na osi liczbowej zaznaczmy zbiór liczb $x$, które spełniają $-a \le x \le a$




Odcinek na osi liczbowej $|x| \le a$.

Podobnie, odcinek $[a, b]$ o początku w punkcie $a$ i końcu w punkcie $b$, to jest zbiór punktów $x$ leżących pomiędzy punktami $a$ i $b$ zapisujemy jak następuje:

$$[a, b] = \{x \in R : \; a \le x \le b\}$$

Długość odcinka $[a, b]$, to jest odległość punktu $a$ od punktu $b$. Zatem odległość punktu $a$ od punktu $b$ jest równa wartości bezwzględnej różnicy $|b - a|$.

**Przykład 0.1** *Rozwiąż równanie*

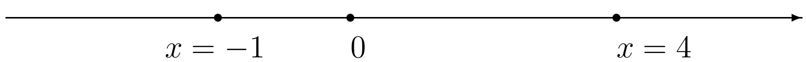
$$|2x - 3| = 5.$$

*Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.*

**Rozwiązanie.** Z defincji wartości bezwzględnej

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3=5, & gdy \quad 2x-3 \geq 0, \quad to \quad x=4, \\ -(2x-3)=5 & gdy \quad -2x+3 \leq 0, \quad to \quad x=-1, \end{cases}$$

Rozwiązanie x=-1 lub $x = 4$ podane jest niżej na osi liczbowej.




Rozwiązanie $x = -1$ lub $x = 4$.

**Przykład 0.2** *Rozwiąż nierówwnść*

$$|x-3| \leq 2.$$

**Rozwiązanie.** Z definicji wartości bezwzlęnej nierówność

$$|x-3| \leq 2.$$

jest równoważna z podwójną nierównością

$$-2 \leq x-3 \leq 2, \qquad \text{lub} \quad 1 \leq x \leq 5.$$

Odpowiedź: $1 \leq x \leq 5$.

**Przykład 0.3** *Podaj zbiór punktów, które spełniają nierówność*

$$|x-1| + |x+1| \leq 1.$$

*Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej.*

**Rozwiązanie.** Z definicji wartości bezwzlęnej znajdujemy

1. *dla* $\quad x-1 \leq 0, \quad |x-1| = -(x-1) = 1-x, \quad |x+1| = -(x+1) = -1-x$

$$|x-1| + |x+1| = 1-x-1-x = -2x \leq 1,$$

gdy $\quad x \geq -\frac{1}{2},$

2. *dla* $\quad -1 \leq x \leq 1, \quad |x-1| = (x-1) = x-1, \quad |x+1| = -(x+1) = -1-x$

$$|x-1| + |x+1| = x-1-1-x = -2 \leq 1,$$

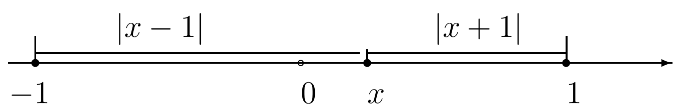
gdy $\quad -1 \leq x \leq 1$

3. *dla* $\quad x+1 \geq 0, \quad |x-1| = x-1, \quad |x+1| = x+1$

$$|x-1| + |x+1| = (x-1)+(x+1) = 2x \leq 1,$$

gdy $\quad x \leq \frac{1}{2},$

Odpowiedź: Nierówność jest spełniona dla $-1 \leq x \leq 1$. To znaczy dla wszystkich $x$ takich, że $|x| \leq 1$.
Również zauważmy, że odległość punktu $x \in [-1, 1]$ od punktu $-1$ plus odległość tego punktu $x \in [-1, 1]$ od 1 równa się 1. Zatem nierówność jest spełniona również dla $x = -1$ lub $x = 1$, wtedy zachodzi znak równości. Zaznaczmy to rozwiązanie na rysunku.




Rownanie $|x-1| + |x+1| = 1$.

**Zadanie 0.1** *Rozwiąż równanie*

$$|3x - 5| = 4.$$

*Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.*

**Zadanie 0.2** *Rozwiąż równanie*

$$|2x - 3| = 5.$$

*Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.*

**Zadanie 0.3** *Rozwiąż nierówność*

$$|x - 5| \leq 2.$$

*Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.*

**Zadanie 0.4** *Podaj zbiór punktów, które spełniają nierówność*

$$|x| + |x - 2| \leq 2.$$

*Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej*