0.1 Reprezentacja liczb w komputerze

Zapis liczb w zmiennym przecinku. Ułamki dziesiętne właściwe i niewłaściwe piszemy oddzielając część całkowitą od części ułamkowej właściwej przecinkiem w polskiej notacji, natomiast w notacji anglo-języcznej oddzielamy kropką.
Na przykład ułamki

$$\frac{25}{4}, \qquad \frac{125}{1000}$$

w zapisie ułamków dziesiętnych piszemy

$$6,25, \qquad 0,125$$

Jeszcze inny zapis ułamków dziesiętnych używany jest w komputerach. Mianowicie, liczba

$$x = 6,25$$

podzielona przez 10 i pomnożona przez 10

$$x = \frac{6,25}{10} * 10$$

nie zmienia wartości. W komputerze liczba ta reprezentowana jest w postsci zmiennego przecinka

$$x = 0,625 * 10^1$$

Ogólnie ułamki dziesiętne reprezentowane są w komputerach w postaci zmiennego przecinka

$$x = \mp m 10^c,$$

gdzie mantysa

$$m = 0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r \qquad 0 \le \alpha_i \le 9 \quad i = 1,2,\ldots,r$$

natomiast cecha c jest liczbą całkowitą.
Najbardziej znacząca cyfra $\alpha_1 \ge 1$ jest zawsze większa lub równa 1.
Dlatego mantysa m spełnia następującą nierówność

$$0.1 \le m < 1.$$

Jasne, że liczba x może mieć dokładną zmienno przecinkową reprezentacje w komputerze, jeżeli jej mantysa ma skończoną liczbę cyfr.

Na przykład liczba

$$x = 25$$

ma dokładną reprezentacje w komputerze

$$x = 0.25 * 10^2$$

ponieważ jej mantysa $m = 0.25$ i cecha $c = 2$.
Natomiast, liczba

$$x = \frac{1}{3} = 0.33333\cdots$$

ma nieskończenie wiele cyfr. Dlatego liczba $x = 0.33333\cdots$ nie ma dokładnej reprezentacji komputerowej.
Jednak każdą liczbę, nawet z mantysą o nieskończonej ilości cyfr, można zapisać w komputerze z dokładnością błędu zaokrągleń

$$\epsilon = 0.\underbrace{000...0}_{r-zer}5 = 0.5\ 10^{-r}$$

mantysy na r-tym miejscu po przecinku.
Stała $\epsilon = 0.5 * 10^{-r}$ określa dokładnośċ arytmetyki r-cyfrowej.

Błąd zaokrągleń. Liczby w zapisie dziesiętnym zokrąglamy na r-tym miejscu po przecinku w ten sposób, że do cyfry na r-tym miejscu dodajemy 1, jeżeli następna cyfra jest większa lub równa 5. W przeciwnym razie cyfry po r-ym miejscu kasujemy. Operację zaokrąglania liczby x na r-tym miejscu oznaczamy symbolem $fl_r(x)$.

Przykład 0.1 *Zaokrąglamy liczbę*

$$\frac{22}{7} = 3.142857142857...;$$

na 5-tym miejscu po przecinku $(r = 5)$ *jak następuje:*

$$fl_5(3.142857142857...) = 3.14286$$

Obliczamy błąd zaokrągleń

$$\epsilon = fl_5(3.142857142857...) - 3.14286 = 0.000002857143...$$

Podobnie liczbę

$$x = \frac{2}{3} = 0.66666666666...$$

zaokrąglone na 4-tym miejscu po przecinku $(r = 4)$

$$fl_4(0.6666666666\cdots) = 0.6667$$

Obliczamy błąd zaokrągleń

$$\epsilon = fl_4(0.6666666666\cdots) - 0.6667 = 0.0000333...$$

0.2 Błąd bezwzględny zaokrąglenia.

Bezwzględnym błędem zaokrąglenia liczby

$$x = \mp m 10^c$$

nazywamy różnicę

$$\epsilon_x = fl_r(x) - x$$

Błąd zaokąglenia spełnia nierówność

$$\mid fl_r(x) - x \mid \leq \epsilon * 10^c,$$

Ponieważ w zapisie zmiennego przecinka dla liczby $x = m{*}10^c$ mamy nieròwnośċ

$$|fl_r(m) * 10^c - m * 10^c| \leq \epsilon * 10^c$$

gdzie $\epsilon = 0.5\ 10^{-r}$ jest stałą w arytmetyce r-cytrowej.

Przykład 0.2 *Zaogrąglij liczbę*

$$x = 0.57367864 * 10^2$$

na trzecim miejscu po przecinku i oblicz błąd bezwzględny zaokrąglenia.
Rozwiązanie.
Błąd bezwględny zaokąglenia liczby x wynosi

$$\begin{aligned}
&\epsilon_x = |fl_3(x) - x| = \\
&= |fl_3(0.57367864 * 10^2) - 0.57367864 * 10^2| = \\
&= |0.574 * 10^2 - 0.57367864 * 10^2| = \\
&= 0.032136 < \underbrace{0.5\ 10^{-3}}_{\epsilon} {*} 10^2 = 0.05
\end{aligned}$$

gdzie $\epsilon = 0.5\ 10^{-3} = 0.0005$ *jest stałą w arytmetyce 3-cyfrowej.*

0.3 Błąd względny zaokrąglenia.

Względny błąd zaokrąglenia danej liczby $x = \mp m\ 10^c \neq 0$ określamy jak następuje:

$$\delta_x = \frac{\epsilon_x}{x} = \frac{fl_r(x) - x}{x}, \quad \text{gdy} \ \ x \neq 0.$$

Ponieważ mantysa $m \geq 0.1$, dlatego błąd względny spełnia nierówność

$$|\delta_x| \leq \delta, \qquad dla \qquad \delta = 0.5 * 10^{1-r}.$$

Mianowicie, zauważamy, że

$$\begin{aligned}|\delta_x| =| \frac{fl_r(x)-x}{x} | &= | \frac{fl_r(\mp m10^c) \pm m10^c}{\mp m10^c} | = \\ = \frac{|fl_r(\mp m) \pm m|}{| \mp m|} &\leq \frac{\epsilon}{0.1} = 10\epsilon = 0.5 * 10^{1-r}.\end{aligned}$$

Skąd wynika nierówność

$$| \frac{| fl_r(x)-x}{x} |\leq 0.5 * 10^{1-r}, \qquad \text{dla} \quad x \neq 0.$$

Stała liczba $\delta = 0.5 * 10^{1-r}$ określa precyzję arytmetyki r-cyfrowej. Tak więc, absolutna wartość błądu względnego

$$|\delta_x| \leq \delta$$

nie przewyższa komputerowej precyzji

$$\delta = 0.5 * 10^{1-r}.$$

Na przykład, jeżeli $r = 3$ wtedy komputerowa precyzja

$$\delta = 0.5 * 10^{-2} = 0.005$$

Przykład 0.3 *Oblicz błąd względny zaokrąglenia liczby*

$$x = 0.57367864 * 10^2$$

w arytmetyce 3-cyfrowej.

Rozwiązanie. Obliczamy

$$\begin{aligned}|\delta_x| &= |\frac{fl(x)-x}{x}| \\ &= |\frac{fl(0.57367864) * 10^2 - 0.574 * 10^2|}{0.57367864 * 10^2} \\ &= \frac{0.032136}{0.57367864 * 10^2} = \underbrace{0.0005601742}_{b.wzgledny}\end{aligned}$$

Zauważmy, że w tym przykładzie błąd względny

$$\delta_x = 0.0005601742$$

jest mniejszy od komputerowej precyzji

$$\delta = 0.5 * 10^{1-3} = 0.005$$

w arytmetyce 3-cyfrowej

Błąd procentowy zaokrąglenia.
Błąd procentowy zaokrąglenia związany jest bezpośrednio z błędem względnym zaokrąglenia.
Mianowicie, błąd procentowy zaokrąglenia liczby x

$$p_x\% = 100 * \delta_x\%$$

lub

$$p_x\% = 100\frac{fl(x) - x}{x}\%, \quad \text{gdy} \;\; x \neq 0.$$

Przykład 0.4 *Oblicz błąd procentowy zaokrąglenia liczby*

$$x = 0.57367864 * 10^2$$

w arytmetyce 3-cyfrowej.

Rozwiązanie.
Błąd względny zaokrąglenia liczby $x = 0.57367864 * 10^2$ w arytmetyce 3-cyfrowej obliczyliśmy w poprzednim przykładzie. Zatem, mając błąd względny

$$\delta_x = 0.0005601742$$

obliczamy błąd procentowy zaokrąglenia liczby x.

$$\begin{aligned} p_x\% &= 100 * \; 0.0005601742\% \\ &= 0.0005601742\% \\ &= \underbrace{0.00005601742}\%. \end{aligned}$$

Przykład 0.5 .

(a) *Zaokrąglij liczby*

$$x = 2,718281, \qquad y = 3.1459265$$

na czwartym miejscu po przecinku.

(b) *Oblicz błąd bezwzględny, błąd względny i błąd procentowy zaokrąglonych liczb x i y.*

Rozwiązanie.
(a) Zgodnie z zasadą zaokrąglania liczba

$$x = 2,718281$$

zaokrąglona na 4-tym miejscu po przecinku ma wartość

$$\overline{x} = 2,7183$$

Zauważmy, że do cyfry 2, która jest na 4-tym miejscu dodaliśmy 1, ponieważ następna cyfra 8 na pozycji 5-tej jest większa od 5.
(b) Obliczamy błąd bezwzględny

$$\epsilon_x = \overline{x} - x = 2,7183 - 2.718281 = \underbrace{0.000019}$$

i błąd względny

$$\delta_x = \frac{\overline{x} - x}{x} = \frac{0.000019}{2.718281} = \underbrace{0.00000698971}$$

Błąd procentowy zaokrąglenia otrzymujemy mnożąc błąd względny prze 100

$$\begin{aligned} p_x\% &= 100 * \delta_x\% \\ &= 100 * 0.00000698971\% \\ &= \underbrace{0.000698971}_{b.wzgledny}\% \end{aligned}$$

Podobnie liczbę

$$y = 3.14592653589$$

zaokrąglamy do wartości

$$\overline{y} = 3,1459$$

kasując, począwszy od cyfry 2 na puzycji 5-tej, wszystkie natępne cyfry, ponieważ cyfra 2 jest mniejsza od 5.
Błąd bezwzględny

$$\epsilon_y = \overline{y} - y = 3,1459 - 3,145926 = -\underbrace{0.000026}$$

Błąd względny

$$\delta_y = \frac{\overline{y} - y}{y} = \frac{-0.000026}{3,145926} = \underbrace{-0.00000826702}_{b.wzgledny}$$

Błąd procentowy zaokrąglonej liczby y

$$\begin{aligned} p_y\% &= 100 * \delta_x\% \\ &= 100 * (-0.00000826702)\% \\ &= \underbrace{-0.000826702}_{b.procentowy}\% \end{aligned}$$

0.4 Zadania

Zadanie 0.1 .
(*a*) *Napisz następujące liczby w postaci zmiennego przecinka*

$$(i) \quad 2\frac{3}{4}, \qquad (ii) \quad \frac{29}{7}, \qquad (iii) \quad -\frac{238}{13}.$$

i podaj mantysę i cechę każdej z tych liczb.
(*b*) *Zaokrąglij te liczby na 3-cim miejscu po przecinku.*

Zadanie 0.2 .

(a) Zaokrąglij liczby

$$x = 5,436891, \qquad y = 12.367348$$

na trzecim miejscu po przecinku.

(b) Oblicz błąd bezwzględny, błąd względny i błąd procentowy zaokrąglonych liczb x i y.

Prof. dr Tadeusz STYŠ Czerwiec 16, 2018