0.1 Kombinatoryka

Kombinatoryka obejmuje takie pojęcia jak silnia liczby naturalnej n, permutacje, wariacje bez powtòrzeń i wariacje z powtòrzeniami oraz kombinacje. Niżej podajemy opis tych pojęć z przykładami zadań i rozwiązaniami.

0.1.1 Silnia liczby naturalnej $n!$

Iloczyn kolejnych liczb naturalnych aż do liczby n włącznie nazywamy silnią liczby n i oznaczmy symbolem $n!$, piszemy

$$n! = 1 * 2 * 3 * \cdots * (n-1) * n$$

Przyjmujemy umownie że $0! = 1$
Wypiszmy silnie kolejnych liczb naturalnych

$$\begin{aligned}
&0! = 1\\
&1! = 1\\
&2! = 1 * 2 = 2\\
&3! = 1 * 2 * 3 = 6\\
&4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24\\
&5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120\\
&6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720\\
&7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(n-1)! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * \cdots * (n-1)\\
&n! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1) * n
\end{aligned}$$

0.1.2 Ćwiczenia

Rozpatrzmy zadania z rozwiązaniami obliczania silni.

Przykład 0.1 *Oblicz wartość ułamka*

$$\frac{5!\ *\ 7!}{4!\ *\ 6!}$$

Rozwiązanie:
Łatwo uprościmy ten ułamek pisząc

$$5! = \underbrace{1 * 2 * 3 * 4}_{4!} * 5 = 4! * 5, \qquad 7! = \underbrace{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6}_{6!} * 7 = 6! * 7$$

obliczamy

$$\frac{5!\ *\ 7!}{4!\ *\ 6!} = \frac{4! * 5\ *\ 6! * 7}{4!\ *\ 6!} = 5 * 7 = 35$$

Przykład 0.2 *Uprość ułamek*

$$\frac{n!}{(n-1)!}$$

Rozwiązanie:
Łatwo uprościmy ten ułamek pisząc

$$(n-1)! \quad = \quad 1*2*3*4*5*6*7*\cdots*(n-1)$$

$$n! \quad = \quad \overbrace{1*2*3*4*5*6*7*\cdots*(n-1)}^{(n-1)!}*n$$

upraszczamy ulamek

$$\frac{n!}{(n-1)!} \quad = \quad \frac{\overbrace{1*2*3*4*5*6*7*\cdots*(n-1)}^{(n-1)!}*n}{1*2*3*4*5*6*7*\cdots*(n-1)} = n$$

0.1.3 Zadania

Zadanie 0.1 *Oblicz wartość ułamka*

$$\frac{3!\ *\ 5!\ *\ 7!\ *9!}{2!\ *\ 4!\ *\ 6!\ *8!}$$

Zadanie 0.2 *Uprość ułamek*

$$\frac{2n!}{(2n-3)!}$$

0.2 Permutacje

0.2.1 Definicja

Permutacją n-elementową danego n-elementowego zbioru nazywamy ustawienie wszystkich n elementów tego w pewnej kolejności. Dwie permutacje składające się z tych samych elementów są różne, jeżeli różnią się kolejnością elementów.

0.2.2 Ćwiczenia

Rozpatrzmy następujące zadania z rozwiązaniemi obliczania permutacji.

Przykład 0.3 *Permutacje cyfr liczby dwucyfrowej* 23 *składają się z tych samych cyfr* 2 *i* 3 *tworzą dwie różne permutacje*

$$23, \quad 32 \qquad ilosc\, permutacji \quad 2! = 2$$

Zauważmy, że innych permutacji cyfr 2 *i* 3 *nie ma.*

Podobnie wypiszmy wszystkie permutacje cyfr liczby trzycyfrowej 257

$$\begin{array}{ll} 257 & 275 \\ 527 & 572 \\ 725 & 752 \end{array} \qquad ilosc\, permutacji \quad 3! = 6$$

Przykład 0.4 *Wypisz wszystkie permutacje zbioru dwuelementowego ab*

$$ab \quad ba \qquad ilosc\, permutacji \quad 2! = 2$$

Zauważmy, że innych permutacji liter a i b nie ma.

Podobnie wypiszmy wszystkie permutacje zbioru trzyelementowego abc

$$\begin{array}{ll} abc & acb \\ bac & bca \\ cab & cba \end{array} \qquad ilosc\, permutacji \quad 3! = 6$$

Ogólnie, ilość n-elementowych permutacji ze zbioru n-elementowego równa równa jest $n!$ Permutacje oznaczamy literą P_n, piszemy

$$P_n = n! = 1 * 2 * 3 * 4 * \cdots * n$$

0.2.3 Zadania

Zadanie 0.3 *Wypisz wszystkie permutacje cyfr liczby trzycyfrowej* 391

Zadanie 0.4 *Wypisz wszystkie permutacje elementów zbioru cztero-elementowego $ABCD$*

0.3 Wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń

0.3.1 Definicja

Wariacje z powtórzeniami. *Wariacją k-elementową ze zbioru n-elomentowego ($n \geq k$) nazywamy ciąg k elementów wybranych ze zbioru n-elementowego. Ciąg k-elementowy jest wariacją z powtórzeniami, jeżeli w tym ciągu mogą powtarzać się elementy zbioru z którego tworzone są k-elementowe wariacje.*

Wariacje bez powtórzeń. *Wariacją k-elementową bez powtórzeń jest ciąg w którym nie ma powtórzeń elementów zbioru n-elementowego.*
W wariacjach bez powtórzeń i w wariacjach z powtórzeniami kolejność elementów jest ważna. To znaczy, że dwie wariacje są różne, jeżeli składają się z tych samych elementów ale różnią się kolejnością elementów.

0.3.2 Ćwiczenia

Rozpatrzy proste przykłady wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń.

Przykład 0.5 *Ile liczb dwucyfrowych można utworzyć z cyfr* 3, 4 *?*

Rozwiązanie.
Łatwo znajdujemy te liczby

$$\begin{array}{cc} 33, & 34 \\ 43, & 44 \end{array}$$

Zauważmy, że cyfra 3 występuje na pierwszej i drugiej pozycji w liczbie 33, cyfra 4 występuje na pierwszej i drugiej pozycji w liczbie 44. To są wariacje z powtórzeniami. Natomiast, liczby 34 i 43 mają różne cyfry. Zatem liczby 34 i 43 to są wariacje bez powtórzeń.

Przykład 0.6 *Pojęcie wariacji bez powtórzeń lub z powtórzeniami dobrze ilustruje proces losowania k-elementów ze zbioru n-elementowego, który zawiera tylko elementy różne.*

Mianowicie, wariacje z powtórzeniami tworzymy w ten sposób, że wylosowany element wrzucamy spowrotem do urny przed losowaniem następnego elementu. Losujemy tak długo aż wylosujemy k-elementów. W ten sposób otrzymamy ciąg k-elementów w którym mogą być wylosowane te same elementy.

Podobnie tworzymy k-elementowe wariacje bez powtórzeń z tą różnicą, że wylosowanego elementu nie wrzucamy spowrotem do urny przed losowaniem następnego elementu. W ten sposób otrzymujemy k-elementową wariacje w której wszystkie elementy są różne, to znaczy nie ma elemetów powtórzonych.

Ilość możliwych k- elementowych wariacji z powtórzeniami utworzynych ze zbioru n-elementowego obliczamy ze wzoru

$$V_n^k = n^k$$

Rozpatrzmy następne przykłady obliczania ilości wariacji.

Przykład 0.7 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe z powtórzeniami ze zbioru też 2-elementowego. Łatwo znajdujemy

$$\begin{array}{cc} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych utworzonych cyfra 1 i 2 to ilość wariacji z powtórzeniami $V_2^2 = 2^2 = 4$

Przykład 0.8 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe z powtórzeniami ze zbioru 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

11	12	13
21	22	23
31	32	33

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych utworzonych cyfra 1, 2, 3 to ilość wariacji z powtórzeniami $\overline{V}_3^2 = 3^2 = 9$

Przykład 0.9 *Wypisz wszystkie liczby trzycyfrowe utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby trzycyfrowe to są wariacje 3-elementowe z powtórzeniami ze zbioru też 3-elementowego. Łatwo znajdujemy liczby trzycyfrowe

111	122	113
121	122	123
131	132	133
211	212	213
221	122	123
231	132	233
311	312	313
321	322	323
331	332	333

Odpowiedź: Ilość liczb trzycyfrowych utworzonych cyfra 1, 2, 3 to ilość wariacji z powtórzeniami

$$\overline{V}_3^3 = 3^3 = 27$$

0.3.3 Zadania

Zadanie 0.5 *Wypisz wszystkie wariacje 2-elementowe z powtórzeniami utworzone ze zbioru 3-elementowego* $\{a,\ b,\ c\}$.

Zadanie 0.6 *Wypisz wszystkie wariacje 3-elementowe z powtórzeniami utworzone ze zbioru 3-elementowego* $\{a,\ b,\ c\}$.

Zadanie 0.7 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr* $\{2,\ 5,\ 7,\ 9\}$.

0.3.4 Wariacje bez powtórzeń

Wariacja k-elementowa bez powtórzeń to ciąg elementów różnych wybranych ze zbioru n-elementowego ($1 \leq k \leq n$).
Liczba wszystkich k-elementowych wariacji bez powtórzeń wybranych ze zbioru n-elementowego określona jest wzorem:

$$W_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1) * (n-k+2) * \cdots * (n-1) * n$$

lub pisząc iloczyn w odwrotnej kolejności jego czynników mamy wzór

$$W_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n * (n-1) * \cdots * (n-k) * (n-k+1).$$

Pojęcie wariacji bez powtórzeń i obliczanie ilości k-elementowych wariacji bez powtórzeń wybranych ze zbioru n-elementowgo wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

0.3.5 Ćwiczenia

Przykład 0.10 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe bez powtórzeń wybrane ze zbioru też 2-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

$$12 \quad 21$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 1 i 2 to ilość wariacji bez powtórzeń. W tym przypadku równa jest ilości permutacji $W_2^2 = 2! = 2$

Przykład 0.11 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe bez powtórzeń wybrane ze zbioru 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

$$\begin{array}{cc} 12 & 13 \\ 21 & 23 \\ 31 & 32 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach utworzonych cyfr 1, 2, 3 to ilość wariacji bez powtórzeń

$$W_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6.$$

Przykład 0.12 *Wypisz wszystkie liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby trzycyfrowe to są wariacje 3-elementowe bez powtórzeń wybrane ze zbioru też 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach

$$\begin{array}{cc} 123 & 132 \\ 213 & 231 \\ 312 & 321 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 1, 2, 3 to ilość wariacji bez powtórzeń. W tym przykładzie to jest ilość permutacji $W_3^3 = 3! = 6$

0.3.6 Zadania

Zadanie 0.8 *Wypisz wszystkie wariacje 2-elementowe bez powtórzeń utworzone ze zbioru 3-elementowego* $\{a, b, c\}$.

Zadanie 0.9 *Wypisz wszystkie wariacje 3-elementowe bez powtórzeń utworzone ze zbioru 3-elementowego* $\{a, b, c\}$.

Zadanie 0.10 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr* $\{2, 5, 7, 9\}$.

Zadanie 0.11 *Wypisz wszystkie wariacje bez powtórzeń 2-elementowe wybrane ze zbioru 4-elementowego* $\{a, b, c, d\}$.

0.4 Kombinacje

0.4.1 Definicja

Kombinacją k-elementową wybraną ze zbioru n-elementowego nazywamy k-elementowy podzbiór zbioru n-elementowego. Zatem w kombinacji kolejność elementów jest nie ważna. To znaczy, że dwie kombinacje są różne tylko wtedy gdy różnią się co namniej jednym elementem.

Ilość kombinacji k-elementowych wybrach ze zbioru n-elementowego obliczmy ze wzoru

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

lub stosując symbol Newtona piszemy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zatem ilość kombinacji k-elementowych wybranych ze zbioru n-elementowego równa jest ilości k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego.

0.4.2 Ćwiczenia

Pojęcie kombinacji i obliczanie ilości k-elementowych kombinacji wybranych ze zbioru n-elementowgo wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 0.13 *Ile można utworzyć par do gry w szachy w klasie liczącej 20 uczniów, żeby każdy uczeń grał tylko raz z każdym wybranym uczniem?*

Rozwiązanie:
Ilość par utworzonych z 20 uczniów równa jest ilości kombinacji 2-elementowych ze zbioru 20-elementowego, gdyż dwie pary są różne tylko wtedy gdy różnią się co najmniej jednym elementem, czyli każda para jest 2-elementowym podzbiorem. Każdy uczeń może dobrać partmera do gry w szachy na $20-1=19$ sposobów. Zatem ilość par różnych równa się $\frac{19*20}{2}=190$.
Ilość kombinacji 2-elementowych ze zbioru 20-elementowego obliczamy również ze wzoru

$$C_{20}^{2}=\binom{20}{2}=\frac{20!}{2!(20-2)!}=\frac{19*20}{2}=190$$

Przykład 0.14 *W klasie jest 15 uczniów. Na ile sposobów można wybrać*

(i) trzech przedstawicieli

(ii) czterech przedstawicieli

Rozwiązanie (i):
Dwie trójki są różne, jeżeli różnią się co namniej jednym uczniem, kolejność wyboru uczniów do trójki jest nie ważna. Zatem pytanie jest ile można utworzyć 3-elementowych kombinacji ze zbioru 15-elementowego lub ile można utworzyć 3-elementowych podzbiorów ze zbiroru 15-elementowego ?
Obliczamy ze wzoru:

$$C_{15}^{3}=\binom{15}{3}=\frac{15!}{3!(15-3)!}=\frac{13*14*15}{6}=13*7*5=455$$

Odpowiedź: Ilość możliwych przedstawicieli uczniów w grupach po 3 równa jest 455 trójek
Podobne jest rozwiązanie (ii)

Przykład 0.15 *Ile jest możliwych wyników w grze "Duży Lotek", jeżeli wybieramy* 6 *liczby z* 49 *liczb ?*

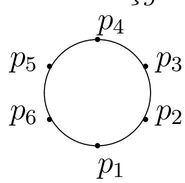
Rozwiązanie:
Ilość możliwych wyników równa jest ilości kombinacji 6-elementowych wybranych ze zbioru 49-elementowego.

Zatem obliczamy stosując wzór

$$C_{49}^{6}=\binom{49}{6} \quad = \quad \frac{49!}{(49-6)!*6!}$$
$$= \quad \frac{43!*44*45*46*47*48*49}{43!*\ 6!}$$
$$= \quad \frac{44*45*46*47*48*49}{1*2*3*4*5*6}=13983816$$

Odpowiedź: W ”Dużym Lotku” ilość możliwych wyników równa jest 13983816

Przykład 0.16 *Na okęgu zaznaczono sześć punktów* $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$



Wielokąty o wierzchołkach na okęgu

Ile można narysować różnych wielokątów w tym

(a) *trójkątów*

(b) *czworokątów*

(c) *pięciokątów*

(d) *sześciokątów*

o wierzchołkach na okręgu w punktach $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$

Rozwiązanie:
Dwa wielokąty są różne, jeżeli różnią się co najmniej jednym wierzchołkiem. Podobnie dwie kombinacje są różne, jeżeli różnią się co najmniej jednym elementem.
Zatem ilość trójkątów równa jest ilości 3-elemntowych komabinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych trójkątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_{6}^{3}=\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!(6-3)!}=\frac{1*2*3*4*5*6}{1*2*3*1*2*3}=\frac{4*5*6}{1*2*3}=4*5=20.$$

Podobnie ilość czworokątów równa jest ilości 4-elemntowych komabinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych czworokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_{6}^{4}=\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!(6-4)!}=\frac{1*2*3*4*5*6}{1*2**3*4*1*2}=\frac{5*6}{1*2}=15.$$

Ilość pięciokątów równa jest ilości 5-elemntowych komabinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych pięciokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^5 = \binom{6}{5} = \frac{6!}{5!(6-5)!} = \frac{1*2*3*4*5*6}{1*2*3*4*5*1} = \frac{6}{1} = 6.$$

Ilość sześciokątów równa jest ilości 6-elemntowych komabinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych sześciokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^6 = \binom{6}{6} = \frac{6!}{6!(6-6)!} = \frac{1*2*3*4*5*6}{1*2*3*4*5*6*0!} = 1, \qquad gdyz \qquad 0! = 1.$$

0.4.3 Zadania

Zadanie 0.12 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{4!+5!}{5!-4!}$$

Zadanie 0.13 *Ile jest permutacji 5-cio elementowych wybranych ze zbioru liter* $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ *?*

Zadanie 0.14 *Oblicz ile jest kombinacji 4-ro elementowych ze zbioru 6-cio elementowego liter* $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$. *Wypisz wszystkie kombinacje.*

Zadanie 0.15 *Oblicz ile jest liczb dwucyfrowych w których nie ma powtórzonych cyfr wybranych ze zbioru cyfr* $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\}$. *Wypisz te liczby.*

Zadanie 0.16 *Oblicz ile jest cztero-cyfrowych liczb w których nie ma powtórzonych cyfr wybranych ze zbioru cyfr* $\{1,\ 3,\ 5,\ 7, 9\}$.

Zadanie 0.17 *Na ile sposobów z klasy 15 uczniów można wybrać drużynę piłki nożnej 11 uczniów ?*

Zadanie 0.18 *W klasie jest 8 dziewczynek i 12 chłopców. Ile jest możliwych par, jedna dziewczynka i jeden chłopiec ?*

Zadanie 0.19 *Ile jest możliwych wyników w grze liczbowej, jeżeli wybieramy* 5 *liczb ze zbioru kolejnych liczb od* 1 *do* 40 *?*