Temat 4: Ułamki dziesiętne. Procenty

Przed sformułowaniem zadań przypominamy pojęcia podstawowe.

0.1 Ułamki dziesiętne

Ułamki zwyczajne o mianownikach $10, 100, 1000, \cdots;$ na zywamy ułamkami dziesiętnymi. Ułamki dziesiętne zapisujemy używając przecinka zamiast kreski.
Na przykład

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10} &= 0,1, & \frac{1}{100} &= 0,01, & \frac{1}{1000} &= 0,001. \\
\frac{3}{10} &= 0,3, & \frac{5}{100}, &= 0,05, & \frac{35}{1000} &= 0.035 \\
2\frac{3}{10} &= 2,3, & 10\frac{12}{100} &= 1.20, & 12\frac{6}{1000} &= 0.072.
\end{aligned}$$

Mamy relacje odwrotne, ułamki dziesiętne zamieniamy na ułamki zwyczajne

$$\begin{aligned}
0,1 &= \frac{1}{10}, & 0,01 &= \frac{1}{100}, \\
0,001 &= \frac{1}{1000}, & 0,3 &= \frac{3}{10}, \\
0.05 &= \frac{5}{100}, & 0,035 &= \frac{35}{1000}.
\end{aligned}$$

Każdy ułamek zwyczajny możemy zapisać w postaci ułamka dziesiętnego. Zamiana ułamka zwyczajnego na dziesiętny polega na zapisaniu tego ułamka przy mienowniku, $10, 100, 1000, \cdots;$ Sposòb zamiany ułamków zwyczajnych na dziesiętne polega na dzieleniu licznika przez mianownik.
Na przykład

Przykład 0.1 *Zamień ułamek* $\frac{3}{4}$ *na ułamek dziesiętny.*
Rozwiązanie. *Dzielimy* 3 *przez 4*

$$\begin{array}{rl}
 & 0,75 \\
 & -- \\
 & 3,00 \quad : 4 \\
- & 0 \\
 & -- \\
 & 30 \\
- & 28 \\
 & -- \\
 & \ \ 20 \\
- & \ \ 20 \\
 & -- \\
 & \ \ \ 0
\end{array}$$

Odpowiedz: $\frac{1}{4} = 0,75$

Zadanie 0.1 *Zamień ułamek zwyczajny na dziesiętny*

$$(i) \quad \frac{3}{5}$$
$$(ii) \quad \frac{37}{50}$$
$$(iii) \quad \frac{253}{250}$$

0.2 Procenty i promile

$p\%$ procent to ułamk $\frac{p}{100}$ o mianowniku 100. To znaczy $p\% = \frac{p}{100}$

Na przykład

1% jeden procent to ułamek $\frac{1}{100} = 0.01$ o mianowniku 100. To znaczy $1\% = \frac{1}{100}$

25% to ułamek $\frac{25}{100} = 0.25$ o mianowniku 100. To znaczy $25\% = \frac{25}{100}$

100% to ułamek $\frac{100}{100} = 1$. To znaczy $100\% = \frac{100}{100} = 1$

Ogòlnie, obliczamy wartośċ b ròwną $p\%$ z danej całości a stosując wzòr

$$b = p\% \; * \; a = \frac{p}{100} * a$$

Na przykład

Przykład 0.2 *Oblicz* 15% *z wartości* $a = 60$

$$b = 15\% * 60 = \frac{15}{100} * 60 = \frac{15 * 60}{100} = \frac{15 * 6}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

Przykład 0.3 *Oblicz* 25% *z wartości a=3000*

$$b = 25\% * 3000 = \frac{25}{100} * 3000 = \frac{25 * 3000}{100} = \frac{75000}{100} = 750$$

Odwrotnie, oblicz całośċ a wiedząc, że jej $p\%$ ròwna się b.
Ogòlnie obliczamy całośċ

$$a = \frac{b}{p\%} = \frac{b}{\frac{p}{100}} = \frac{100}{p} b$$

Przykład 0.4 *Wiemy, że* $p\% = 30\%$ *całości* a *ròwna się* $b = 600$. *Oblicz całośċ* a

Rozwiązanie.

$$a = \frac{600}{30\%} = \frac{600}{\frac{30}{100}} = \frac{100}{30} 600 = 2000$$

W obliczeniach finansowych i innych istnieje potrzeba obliczania procentu $p\%$

jakim jest liczba b *z liczby* a

To znaczy zamiana danego ułamka

$$\frac{b}{a}$$

na $p\%$ procent.
Na przykład

Przykład 0.5 *Oblicz jakim procentem jest liczba* $b = 45$ *z liczby* $a = 360$.
To znaczy zamień ułamek

$$\frac{45}{360}$$

na procent.
Rozawiązanie:
Dzielimy licznik $b = 45$ przez mianownik $a = 360$. Wynik dzielenia mnożymy przez 100

$$\begin{array}{rrl} & 0,12 & \\ & -- & \\ & 45,00 & : 360 \\ - & 360 & \\ & -- & \\ & 90 & \\ - & 90 & \\ & -- & \\ & 0 & \end{array}$$

Odpowiedz: $\frac{45}{360} * 100\% = 0,12 * 100\% = 12\%$

Zadanie 0.2 *Oblicz* 75% *z całości* $a = 2000$

Zadanie 0.3 *Oblicz* 15% *z całości* $a = 4000$

Zadanie 0.4 *Wiemy, że* $p = 50\%$ *z całości* a *równa się* $b = 800$. *Oblicz całość* a

Zadanie 0.5 *Wiemy, że* $p = 30\%$ *z wartości* a *równa się* $b = 5000$. *Oblicz całość* a

Zadanie 0.6 *Oblicz jakim procentem jest liczba* $b = 35$ *z liczby* $a = 280$.
To znaczy zamień ułamek

$$\frac{35}{280}$$

na procent.

Promile
Promile to ułamki o mianowniku 1000.
$p\%\%$ promili to ułamek $\frac{p}{1000}$ o mianowniku 1000. Zatem $p\%\% = \frac{p}{1000}$

Na przykład

$1\%\%$ promil to ułamek $\frac{1}{1000} = 0.001$ o mianowniku 1000. To znaczy $1\%\% = \frac{1}{1000}$.

25%% to ułamek $\frac{25}{1000} = 0.025$ o mianowniku 1000. To znaczy $25\%\% = \frac{25}{1000}$

1000%% to całość $\frac{1000}{1000} = 1$. To znaczy $1000\%\% = \frac{1000}{1000} = 1$

Obliczamy $p\%\%$ promili z całości a

$$b = p\%\% \ * \ a = \frac{p}{1000} * a$$

jako ułamek o mianowniku 1000 z a.

Zadanie 0.7 *Oblicz* 15%% *z całości a=3000*

$$15\%\% * 3000 = \frac{15}{1000} * 3000 = \frac{15 * 3000}{1000} = 45$$

Zadanie 0.8 *Oblicz* 25%% *z całości a=3000*

$$25\%\% * 3000 = \frac{25}{1000} * 3000 = \frac{25 * 3000}{1000} = 75$$

Odwrotnie, oblicz całość a wiedząc, że jej $p\%\%$ równa się b.
Zatem całość

$$a = \frac{b}{p\%\%} = \frac{b}{\frac{p}{1000}} = \frac{1000}{p} b$$

Zadanie 0.9 30%% *promili z całości* a *równa się* $b = 600$*. Oblicz całość* a

Rozwiązanie.

$$\frac{30}{1000} * a = 600, \quad a = \frac{600}{\frac{30}{1000}} = \frac{600 * 1000}{30} = 20000$$

Zadanie 0.10 *Oblicz* 75%% *z całości* $a = 2000$

Zadanie 0.11 *Oblicz* 15%% *z całości* $a = 4000$

Odwrotnie, mając $p\%\%$ z całości a, oblicz całość a.

Zadanie 0.12 50%% *promili całości* a *równa się* $b = 800$*. Oblicz całość* a

Zadanie 0.13 30%% *promili całości* a *równa się* $b = 5000$*. Oblicz całość* a

0.2.1 Procent składany

Wprowadźmy następujące oznaczenia

- K_0 - kapitał początkowy
- K_n - kapitał po n latach
- p - stopa procentowa w skali roku

- n - ilość lat oszczędzania

Po pierwszym roku oszczędzania kapitał K_0 wzrośnie o $p\%$. Obliczamy kapitał K_1 po pierwszym roku oszczędzania

$$K_1 = K_0 + K_0\frac{p}{100} = K_0(1 + \frac{p}{100})$$

Po drugim roku oszczędności kapitał K_1 wzrośnie o $p\%$. Obliczamy kapitał K_2 po drugim roku oszczędzania

$$K_2 = K_1 + K_1\frac{p}{100} = K_1(1 + \frac{p}{100}) = K_0(1 + \frac{p}{100})^2$$

Ogólnie, stosując zasadę indukcji zupełnej, jeżeli po $n-1$ latach oszczędzania kapitał K_{n-1} wrośnie o $p\%$

$$K_{n-1} = K_0(1 + \frac{p}{100})^{n-1}$$

to po n latach oszczędznia obliczamy kapitał

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1}\frac{p}{100} = K_0(1 + \frac{p}{100})^n$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na końcowy kapitał po n latach oszczędzania

$$K_n = K_0(1 + \frac{p}{100})^n$$

Przykład 0.6 *Oblicz o ile wzrośnie kapitał* $150000 PLN$ *po 10 latach, jeżeli stopa prcentowa* $p = 5\%$.

Rozwiaązanie. Stosując wzór, obliczamy

$$K_{10} = 150000(1 + \frac{5}{100})^{10} = 150000 * 1.05^{10} = 150000 * 1.62889 = 244334 PLN$$

Odpowiedź: Kapitał $150000 PLN$ wzrośnie przez 10 lat o $94334 PLN$, jeżeli stopa procentowa w stosunku rocznym wynosi $p = 5\%$.

Spłata kredytu. Podobnie obliczamy procent składany od kredytu.
Po pierwszym roku spłacania kapitał K_0 zmaleje o $p\%$

$$K_1 = K_0 - K_0\frac{p}{100} = K_0(1 - \frac{p}{100})$$

Po drugim roku spłacania kapitał K_1 zmaleje o $p\%$

$$K_2 = K_1 - K_1\frac{p}{100} = K_1(1 - \frac{p}{100}) = K_0(1 - \frac{p}{100})^2$$

Ogólnie, stosując zasadę indukcji zupełnej, jeżeli po $n-1$ latach spłacania kapitał zmaleje do sumy

$$K_{n-1} = K_0(1 - \frac{p}{100})^{n-1}$$

to po n latach spłacania kapitał zmaleje do sumy

$$K_n = K_{n-1} - K_{n-1}\frac{p}{100} = K_0(1 - \frac{p}{100})^n$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na końcowy kapitał po n latach spłacania kredytu.

$$K_n = K_0(1 - \frac{p}{100})^n$$

Przykład 0.7 *Oblicz o ile zmaleje kredyt od kapitału* $150000PLN$ *po 10 latach spłacania. i po 150 latach spłaconia, jeżeli stopa prcentowa* $p = 5\%$.

Rozwiaązanie. Stosując wzór, obliczamy

$$K_{10} = 150000(1 - \frac{5}{100})^{10} = 150000 * 0.95^{10} = 150000 * 0.598737 = 89810PLN$$

$$K_{150} = 150000(1 - \frac{5}{100})^{150} = 150000 * 0.95^{150} = 150000 * 0.0004555 = 68.33PLN$$

Odpowiedź: Po 10 latach kredyt zmaleje o $60189.5PLN$. Natomiast po 150 latach kredyt zmaleje o $149931.67PLN$.

Zadanie 0.14 *Oblicz o ile zmaleje kredyt od kapitału* $200000PLN$ *po 10 latach spłacania. i po 180 latach spłaconia, jeżeli stopa prcentowa* $p = 5\%$.

Prof. dr Tadeusz STYŚ Warszawa, 30 kwiecień 2018